Hughes-Hallett
Gleason
Lock
Flath
et al.

CÁLCULO APLICADO

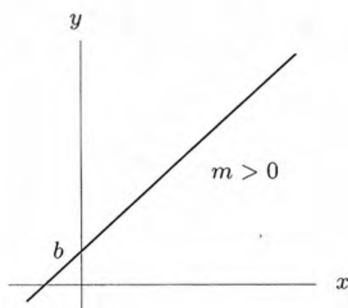
Segunda Edición

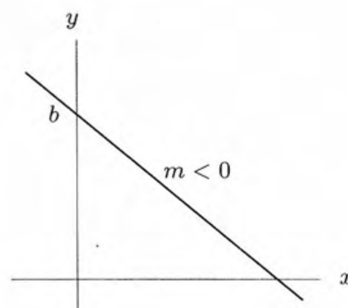


CÁLCULO APLICADO

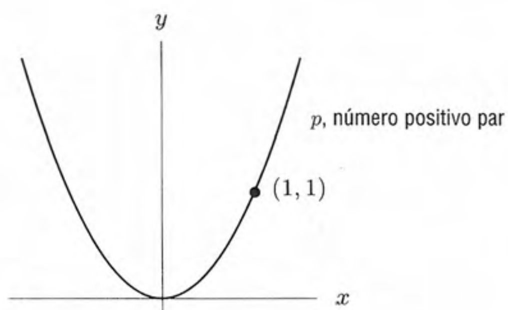
GRÁFICAS DE FAMILIAS DE FUNCIONES

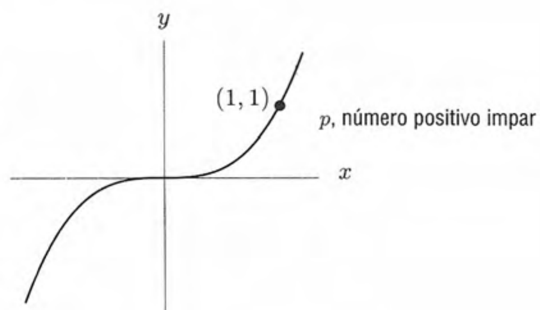
Función lineal $y = b + mx$

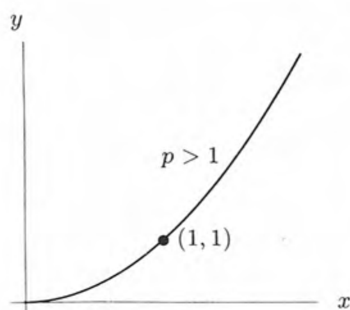


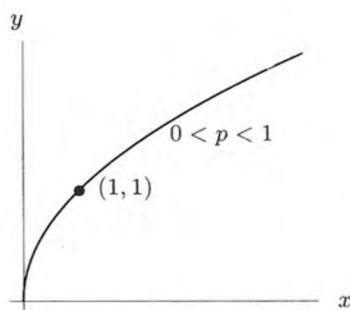


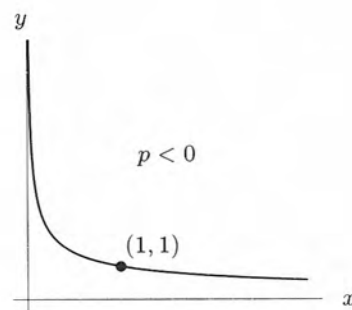
Función potencial $y = x^p$



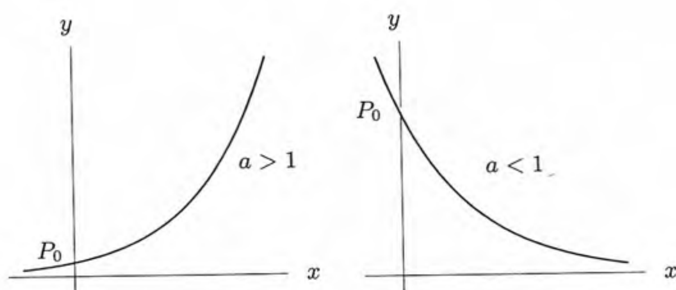




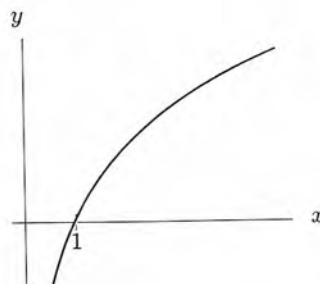




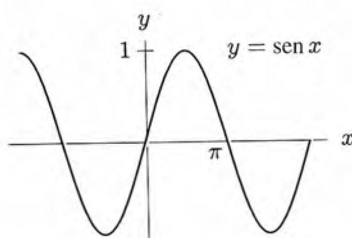
Función exponencial: $y = P_0 a x$

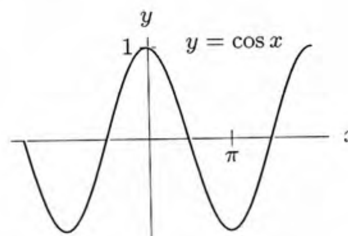


Función logarítmica: $y = \ln x$

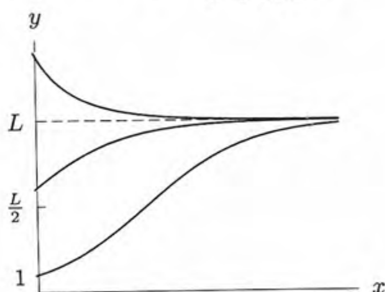


Funciones periódicas





Función logística: $y = \dfrac{L}{1 + Ce^{-kx}}$



Función pulso: $y = axe^{-bx}$



CÁLCULO APLICADO

Hughes-Hallett

Gleason

Lock

Flath

et al.

SEGUNDA EDICIÓN
MÉXICO, 2004

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:


correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.


fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102


e-mail:
info@patriacultural.com.mx


home page:
www.patriacultural.com.mx

Título original de la obra:
Applied Calculus / Deborah Hughes-Hallet, Andrew M. Gleason, Patti Frazer Lock, Daniel E. Flath, et. al. 2nd ed.

ISBN 0471-20792-6

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinador editorial: Armando Castañeda González
Diseño de interiores: EDITEC, S.A. de C.V.
Diseño de portada: EDITEC, S.A. de C.V

Traducción:
Dra. Ana Elizabeth García Hernández
Profesora de Asignatura
Depto. de Física y Matemáticas
Universidad Iberoamericana

Revisión técnica:
Dr. Francisco Castillo Aranguren
Profesor Titular
ITESM-CEM

Cálculo aplicado

bajo el sello de Compañía Editorial Continental
Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial
Registro núm. 43

ISBN 970-24-0725-7 (segunda edición)
(ISBN 968-26-1314-0 primera edición)

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición: 1999
Segunda edición: 2004

CÁLCULO APLICADO

Segunda edición en inglés
(segunda edición en español)

Producido por el Consorcio de Cálculo, que inicialmente fue fundado por la National Science Foundation Grant.

Deborah Hughes-Hallett
University of Arizona

William G. McCallum
University of Arizona

Andrew M. Gleason
Harvard University

Brad G. Osgood
Stanford University

Patti Frazer Lock
St. Lawrence University

Douglas Quinney
University of Keele

Daniel E. Flath
University of South Alabama

Andrew Pasquale
Chelmsford High School

Sheldon P. Gordon
SUNY Farmingdale

Karen Rhea
University of Michigan

David O. Lomen
University of Arizona

Jeff Tecosky-Feldman
Haverford College

David Lovelock
University of Arizona

Jeff B. Trash
University of Southern Mississippi

Thomas W. Tucker
Colgate University

con la colaboración de

Otto K. Bretscher
Colby College

Eric Connally
Elytics

Richard D. Porter
Northeastern University

Coordinado por
Elliot J. Marks

Dedicado a Robin, Kari, Eric y Dennis,
y
Laura, Hannah, Ben, Natty, Isaac y Matthias

PREFACIO

El cálculo es uno de los mayores logros del intelecto humano. Inspirados en problemas de astronomía, Newton y Leibniz desarrollaron las nociones del cálculo hace 300 años. Desde entonces, siglo tras siglo se ha demostrado el poder del cálculo para resolver preguntas de matemáticas, ciencias físicas, ingeniería, y ciencias sociales y biológicas.

El cálculo es una excelente herramienta debido a su extraordinaria capacidad para reducir problemas complicados a simples reglas y procedimientos. En esto radica el riesgo de enseñar cálculo: es posible exponer el tema sólo como un conjunto de reglas y procedimientos, pero con ello puede perderse el valor matemático y también el práctico. En esta segunda edición de *Cálculo aplicado* continuamos nuestro esfuerzo por darle un nuevo enfoque a la enseñanza del cálculo, tanto en sus conceptos como en sus procedimientos.

Una visión enfocada: comprensión de conceptos

Nuestro objetivo es proporcionar a los estudiantes una comprensión clara de las nociones del cálculo, con el fin de que tengan una base sólida para los cursos siguientes. Este libro es producto de conversaciones con miembros de algunas facultades de administración, economía, biología y otras disciplinas, así como con numerosos matemáticos que enseñan cálculo aplicado. Como resultado de dichos debates incluimos nuevos temas y omitimos otros tradicionales, cuya inclusión no se justificaba. En el proceso también cambiamos el enfoque de ciertos temas.

La segunda edición: una nueva organización

La segunda edición mantiene el mismo enfoque de la primera, aunque brinda una nueva organización al tomar en cuenta a los profesores, y para quienes se ha adoptado la organización comúnmente preferida por ellos, en la cual todos los capítulos de derivadas se encuentran juntos. De esta forma se mantiene la posibilidad de emplear los conceptos clave de las ediciones anteriores. En particular:

- El capítulo 1 ha sido condensado, y con material de la sección 1.5 de la primera edición se creó un nuevo enfoque teórico de límites al infinito y comportamiento final.
- Las secciones 2.2 y 2.3 de la primera edición se combinaron en una sola sección.
- El capítulo *Métodos breves de derivación* es ahora el capítulo 3.
- El capítulo 4, *Uso de la derivada*, es el capítulo 5 de la edición anterior. Existe una nueva sección, la 4.3, que contiene *Máximos y mínimos globales*, con más aplicaciones a las ciencias de la vida.
- El capítulo 6 de la primera edición ha sido dividido en tres capítulos: capítulo 6, *Uso de la integral definida*; capítulo 7, *Antiderivadas*, y capítulo 8, *Probabilidad*.
- Existe una nueva sección 10.1, *Modelado matemático: planteamiento de una ecuación diferencial*.
- Hay otro capítulo nuevo: el 11, *Series geométricas*.

Debido a que los usuarios eligen diferentes temas para cubrirse en un curso semestral de cálculo aplicado, hemos diseñado este libro para un solo curso (con gran flexibilidad para la selección de temas) o incluso un curso de dos semestres. En el *Manual del instructor* se encuentran programas de muestra que resumen varias opciones. Dicho material se encuentra solamente en inglés y para la posibilidad de obtenerlo es necesario ponerse en contacto con la editorial (Depto. de Mercadotecnia).

Principios guía: problemas variados y la regla de cuatro

Debido a que la mayoría de los estudiantes aprenden más cuando desarrollan más actividad, este libro contiene gran cantidad de ejercicios, los cuales son de primordial importancia. Además, hemos encontrado múltiples representaciones que motivan a los estudiantes a reflexionar sobre el significado del material. Por tanto, nos hemos guiado por los siguientes principios:

- Nuestros problemas son variados. Algunos son muy sencillos y otros un desafío. La mayor parte de los problemas exigen que los estudiantes comprendan los conceptos, y no se pueden resolver siguiendo una simple fórmula o plantilla que venga dentro del texto.
- La *Regla de cuatro*. Es una regla práctica que se refiere a que los temas deben presentarse en forma geométrica, numérica, analítica y verbal.

¿Qué necesita saber el estudiante?

Este libro está destinado para estudiantes de negocios, ciencias sociales y ciencias de la vida. Hemos encontrado que este material estimula a los estudiantes bien preparados a pensar, y a su vez es accesible para aquellos que tienen pocos conocimientos de álgebra. A través de métodos numéricos, gráficos y algebraicos se les facilitan varias formas para que dominen el material. Este enfoque los alienta a perseverar y, como consecuencia, ayuda a disminuir el porcentaje de errores.

Tecnología

Hemos aprovechado el uso de las computadoras y calculadoras graficadoras para ayudar a los estudiantes a aprender el pensamiento matemático. Por ejemplo, el uso de una calculadora graficadora para realizar acercamientos (*zoom*) de las funciones es una excelente forma de observar la linealidad local. La habilidad de usar la tecnología de modo efectivo como herramienta es de gran importancia. Se espera que los estudiantes utilicen su propio criterio para determinar dónde es útil la tecnología.

No obstante, el libro no requiere un *software* o tecnología específica. Los instructores han utilizado el material con calculadoras graficadoras, *software* de graficación y sistemas de álgebra computacional. Cualquier tecnología con la capacidad para graficar funciones y ejecutar integraciones numéricas es suficiente.

Contenido

El contenido representa nuestra visión de cómo se puede enseñar el cálculo aplicado. Es lo suficientemente flexible para adaptarse a las necesidades y requerimientos particulares de cada curso. Se pueden agregar o eliminar temas de manera sencilla, o cambiar el orden de su estudio.

Capítulo 1. Funciones y cambio

Introduce el concepto de función y la idea de cambio, incluyendo la distinción entre cambio total y razón de cambio, así como todas las funciones elementales. Aunque las funciones son probablemente conocidas, los enfoques gráfico, numérico, verbal y de modelado de las mismas tal vez resultarán nuevos. Para la comprensión de procesos reales se introducen las funciones exponenciales, que son parte fundamental en dicho estudio.

Enfoque sobre modelado. La primera sección introduce al estudiante en el ajuste de fórmulas para obtener datos, y la segunda provee información más específica sobre el interés compuesto y la definición del número e.

Enfoque teórico. Esta sección analiza los límites al infinito y comportamiento final.

Capítulo 2. Razón de cambio: la derivada

Este capítulo presenta el concepto clave de la derivada de acuerdo con la regla de cuatro. El propósito de este capítulo es dar al estudiante un conocimiento práctico del significado de la derivada y su interpretación como una razón de cambio instantánea. Al finalizar el capítulo el estudiante será capaz de encontrar derivadas en forma numérica (considerando un cociente de diferencias arbitrariamente pequeño); visualizar derivadas de manera gráfica (como la pendiente de la gráfica) e interpretar el significado de la primera y la segunda derivada en diferentes aplicaciones. También entenderá el concepto de *marginalidad* y reconocerá la derivada como una función por sí misma.

Enfoque teórico. Esta sección analiza los límites y la continuidad, y presenta la definición simbólica de la derivada.

Capítulo 3. Métodos breves de derivación

Se introducen las derivadas de todas las funciones del capítulo 1, así como las reglas para derivar productos, cocientes y funciones compuestas.

Enfoque teórico. Esta sección usa la definición de la derivada para obtener las reglas de derivación.

Enfoque práctico. Esta sección provee problemas de derivación para que el estudiante adquiera habilidad en la forma de resolverlos.

Capítulo 4. Uso de la derivada

El objetivo es capacitar al estudiante en el uso de la derivada para la solución de problemas; incluye la optimización y la graficación. No es necesario cubrir todas las secciones.

Capítulo 5. Cambio acumulado: la integral definida

Presenta el concepto clave de la integral definida; sigue los mismos lineamientos del capítulo 2.

El propósito de este capítulo es dar al estudiante una comprensión práctica de la integral definida como límite de las sumas de Riemann, y destacar la conexión entre la derivada y la integral definida en el teorema fundamental del cálculo. Utilizamos el mismo método del capítulo 2: se introdujo el concepto fundamental con detenimiento, pero sin entrar al estudio de técnicas. El estudiante concluirá el capítulo con un buen dominio de la integral definida como límite de las sumas de Riemann, tendrá capacidad para calcular en forma numérica y sabrá cómo interpretar la integral definida en varios contextos. Algunos instructores cubren el capítulo 5 inmediatamente después del capítulo 2 sin dificultad.

Enfoque teórico: Esta sección presenta el segundo teorema fundamental del cálculo, y también las propiedades de la integral definida.

Capítulo 6. Uso de la integral definida

Este capítulo presenta aplicaciones de la integral definida. No se pretende que sea exhaustivo ni es necesario estudiar todas las secciones.

Capítulo 7. Antiderivadas

Las antiderivadas se abordan desde un punto de vista gráfico, numérico y analítico. Se incluye la integración por sustitución. El teorema fundamental del cálculo se usa para evaluar integrales definidas y analizar antiderivadas.

Enfoque práctico: Esta sección provee una serie de problemas de integración con el objeto de que el alumno adquiera mayor habilidad en su resolución.

Capítulo 8. Probabilidad

Este capítulo trata funciones de densidad, funciones de distribución, la mediana y el promedio.

Capítulo 9. Funciones de varias variables

Introduce las funciones de dos variables desde diferentes puntos de vista mediante diagramas de contorno, fórmulas y tablas. Lo anterior desarrolla en el estudiante la habilidad para leer diagramas de contorno y pensar en forma gráfica, así como leer tablas y pensar de manera numérica, además de habilitarlo para que pueda aplicar estos conocimientos en el modelado junto con su práctica de álgebra. La idea de la derivada parcial se introduce desde los puntos de vista gráfico, numérico y analítico. Se aplican las derivadas parciales a problemas de optimización, y se termina con un análisis de los multiplicadores de Lagrange.

Enfoque teórico: En esta sección se usa la optimización para demostrar la fórmula para la recta de regresión.

Capítulo 10. Modelado matemático mediante ecuaciones diferenciales

Este capítulo introduce el tema de las ecuaciones diferenciales. Se hace énfasis en el modelado, así como en las soluciones cualitativas y su interpretación. Incluye aplicaciones de sistemas de ecuaciones diferenciales a modelos poblacionales, la propagación de una enfermedad y también las interacciones depredador-presa.

Capítulo 11. Series geométricas

Este nuevo capítulo aborda las series geométricas y sus aplicaciones en los negocios, la economía y las ciencias de la vida.

Cambios respecto a la primera edición

La primera edición fue empleada por un grupo diverso y numeroso de escuelas con sistemas semestrales o trimestrales, tanto en grandes auditorios como en clases normales, en laboratorios de computación, ante grupos pequeños y con enfoques tradicionales, así como en lugares donde utilizaban diferentes tecnologías. Mientras preparábamos la presente edición, solicitamos los comentarios de un gran número de

matemáticos que han empleado el texto. Nos ofrecieron muchas sugerencias valiosas, las cuales hemos tratado de incorporar, pero al mismo tiempo hemos conservado nuestro objetivo original de enfocar un número limitado de temas. Continuamos esas pláticas con nuestros colegas de disciplinas relacionadas para atender las necesidades matemáticas de sus estudiantes.

Cambios generales

- En todo el libro se incluyeron más aplicaciones en el campo de las ciencias biológicas y de la vida.
- Se agregaron gráficas y tablas para las respuestas cortas.
- Muchos problemas son nuevos, así como sus aplicaciones. Donde ha sido apropiado, se agregaron más problemas sencillos y de nivel medio.

Descripción de cambios, capítulo por capítulo, respecto a la primera edición de cálculo aplicado

- El capítulo 1 ha sido modernizado y simplificado. Desarrollamos una nueva sección, que es la de Enfoque teórico: límites al infinito y comportamiento final, con base en el material de la sección 1.5 de la primera edición.
- El capítulo 2, en la sección 2.2, La función derivada, combina las secciones 2.2 y 2.3 de la primera edición.
- El capítulo 3, antes capítulo 4, ha sido reubicado para que dé continuidad al tema de la derivada.
- El capítulo 4 es el capítulo 5 anterior. La sección 4.3, Máximos y mínimos globales, que incluye aplicaciones de optimización en las ciencias de la vida, es nueva.
- El capítulo 5, antes capítulo 3, ha sido reubicado para ser el capítulo siguiente al de Uso de la derivada.
- El capítulo 6 ha sido dividido en tres capítulos: Uso de la integral definida, Antiderivadas y Probabilidad.
- El capítulo 7, relativo a las antiderivadas, está basado en material del capítulo 6 de la primera edición. La sección 7.2, Integración por sustitución, es nueva. El enfoque práctico de la integración se ha colocado aquí.
- El capítulo 8, referente a la probabilidad, proviene del capítulo 6 de la primera edición.
- El capítulo 9 es el anterior capítulo 7.
- En el capítulo 10, la sección 10.1, Modelado matemático: planteamiento de una ecuación diferencial, es nueva. Antes, este capítulo era el 8.
- El capítulo 11, que es nuevo, trata sobre las series geométricas y sus aplicaciones en el campo de los negocios, la economía y las ciencias de la vida.

Material adicional

El siguiente material adicional se tiene disponible en Estados Unidos en su versión original en inglés. En México, algunos de estos materiales se pueden adquirir; para ello se tiene que contactar con el Depto. de Mercadotecnia de la editorial CECSA.

- **Manual del instructor, con preguntas muestra para examen.** Contiene sugerencias para la enseñanza, programas de calculadora, algunas transparencias para proyectar diapositivas y preguntas de examen que vienen de acuerdo con las secciones de los capítulos.
- **Manual de soluciones del instructor.** Con las soluciones completas a todos los problemas.
- **Manual de soluciones del estudiante.** Con soluciones completas de la mitad de los problemas de número impar.
- **CD-ROM de Recursos del instructor.** Contiene el *Manual del Instructor*, el *Manual de Soluciones del Instructor* y otros recursos valiosos.
- **Guía de estudio del estudiante.** Con guías de estudio y materiales adicionales realizados por Ansie Meiring, de la Universidad de Pretoria.

Series de manuales para iniciarse en la tecnología

- **Conocimientos básicos del programa Mathematica,** de C-K. Cheung, G.E. Keough, Charles Landraitis y Robert H. Gross, del Boston College.
- **Conocimientos básicos del programa Maple,** de C-K. Cheung y G. E. Keough, del Boston College, y Michael May, de la Universidad de St. Louis.
- **Conocimientos básicos en la calculadora graficadora TI-83/82,** de Carl Swenson, de la Universidad de Seattle.
- **Conocimientos básicos en la calculadora graficadora TI-86/85,** de Carl Swenson, de la Universidad de Seattle.
- **Conocimientos básicos en la calculadora graficadora TI-92/92 Plus,** de Carl Swenson y Brian Hopkins, de la Universidad de Seattle.

La Faculty Resource Network

Se trata de una red electrónica compartida de profesores que se dedican a usar de manera eficaz la tecnología en el salón de clases. Este grupo puede ayudarle a aplicar técnicas de innovación en clase, implementar paquetería de programación específica y ajustar la experiencia de la tecnología a las necesidades individuales de cada clase. Para mayores detalles consulte

http://he-cda.wiley.com/WileyCDA/Section/id-106078.html

eGrade

eGrade es un sistema de evaluación en línea que contiene un gran banco de reactivos para desarrollar habilidades, problemas de tarea y soluciones. Ahora los profesores pueden automatizar los problemas que asignen, deliberar, evaluar y enviar toda clase de tareas, exámenes rápidos y otro tipo de exámenes, los cuales darán a los estudiantes una evaluación inmediata y la retroalimentación de su trabajo. Así, Wiley *eGrade* le ayudará a entender la matemática de manera más gráfica. Para mayor información visite el sitio

www.wiley.com/college/egrade

Calculus Machina for Calculus

Se trata de un programa basado en la Web; es paquetería de programación inteligente que resuelve y documenta problemas de cálculo en tiempo real. Para estudiantes, *Calculus Machina* es un tutorial electrónico que guía paso a paso en el aprendizaje. A medida que el estudiante trabaja en un problema en línea, *Calculus Machina* provee una retroalimentación adaptada del texto, permitiendo a los alumnos identificar y aprender de sus errores en forma más eficiente. Los profesores pueden utilizar *Calculus Machina* para ver un avance de los problemas y explorar funciones en forma gráfica y analítica. Para mayor información visite www.wiley.com/college/machina.

Agradecimientos

En primer lugar, deseamos expresar nuestro aprecio a la Fundación Nacional para la Ciencia (National Science Foundation) por su fe en nuestra capacidad para producir y revitalizar el historial del cálculo; en particular a Louise Raphael, John Kenelly, John Bradley, Bill Haver y James Lightbourne. También queremos agradecer a los miembros de nuestro Consejo Consultivo: Benita Albert, Lida Barrett, Bob Davis, Lovenia DeConge-Watson, John Dossey, Ron Douglas, Don Lewis, Seymour Parter, John Prados y Steve Rodi, por su guía y asesoramiento.

Además, deseamos agradecer a todas las personas que en Estados Unidos nos alentaron a escribir este libro y nos ofrecieron un gran apoyo con sus consejos. También nos gustaría agradecer a las siguientes personas por todo lo que hicieron para el éxito del proyecto: David Arias, Ruth Baruth, Jeffery Bergen, Ted Bick, Graeme Bird, Kelly Brooks, Lucille Buonocore, J. Curtis Chipman, Dipa Choudhury, Larry Crone, Gene Crossley, Jane Devoe, Jeff Edmunds, Gail Ferrell, Joe Fiedler, Holland Filgo, Rosangela Sviercoski Ferreira, Sally Fischbeck, David Flath, Ron Frazer, Lynn Garner, David Graser, Ole Hald, Jenny Harrison, John Hennessey, Yvette Hester, David Hornung, Richard Iltis, Adrian Iovita, Mary Johenk, Jerry Johnson, Thomas Judson, Bonnie Kelly, Donna Krawczyk, Theodore Laetsch, T.-Y. Lam, Sylvain Laroche, Kurt Lemmert, Suzanne Lenhart, Madelyn Lesure, Janny Leung, Julie Lindstrom, Thomas Lucas, Alfred Manaster, Peter McClure, Georgia Kamvosoulis Mederer, Kurt Mederer, David Meredith, Mohammad Moazzam, Saadat Moussavi, Patricia Oakley, Mary Ellen O'Leary, Header Olszyk, Jim Osterburg, Mary Parker, Ruth Parsons, Greg Peters, Laura Piscitelli, Kim Presser (y 122 profesores de matemáticas de la USC-Columbia), Sarah Richardson, Laurie Rosatone, Daniel Rovey, Harry Row, Halip Saifi, Merillat St. Amand, Kenneth Santor, Anne Scanlan-Rohrer, Alfred Schipke, Bruce Spatz, Virginia Stallings. Brian Stanley, Marian Stas, Mary Jane Sterling, Robert Styer, "Suds" Sudholz, Thomas Timchek, Jake Thomas, John S. Thomas, Praja Trivedi, J. Jerry Uhl, Nicola Viegi, Tilaka Vijithakumara, Alan Weinstein, Hung-Hsi Wu.

Los reportes de los siguientes revisores nos fueron de mucha ayuda para integrar esta segunda edición:

Victor Akatsa, Carol Joyce Blumberg, Jennifer Fowler, Helen Hancock, Ken Hannsgen, John Haverhals, Mako E. Haruta, Linda Hill, Thom Kline, Jill Messer Lamping, Dennis Lewandowski, Lige Li, William O. Martin, Ted Marsden, Michael Mocciola, Maijian Qian, Joyce Quella, Peter Penner, Barry Peratt, Emily Roth, Jerry Schuur, Barbara Shabell, Peter Sternberg, Virginia Stover, Bruce Yoshiwara, Katherine Yoshiwara.

En particular, nos gustaría agradecer a Ray Cannon, Bob Condon y Ernie Solheid por sus sobresalientes contribuciones.

Sobre todo, al destacado equipo que trabajó día y noche para capturar el texto en la computadora (y volverlo a capturar), obtener las soluciones escritas y las ilustraciones etiquetadas. Apreciamos enormemente su ingenio, energía y dedicación. Gracias a Srdjan Divac, Mike Esposito, David Grenda, Alex Kasman, Alex Mallozzi, Kyle Niedzwiecki, Mary Prisco, Ted Pyne, Rebecca Rapoport, Ann Ryu, David Ryu, Noah Syroid y Xianbao Xu.

Deborah Hughes-Hallett	David O. Lomen	Douglas Quinney
Andrew M. Gleason	David Lovelock	Karen Rhea
Patti Frazer Lock	William G. McCallum	Jeff Tecosky-Feldman
Daniel E. Flath	Brad G. Osgood	Joe B. Thrash
Sheldon P. Gordon	Andrew Pasquale	Thomas W. Tucker

A los estudiantes: cómo aprender de este libro

- Quizá este libro sea diferente a otros textos de matemáticas que haya utilizado; así que sería bueno saber algunas de sus diferencias desde el principio. En cada etapa, el libro destaca el significado (en términos prácticos, gráficos o numéricos) de los símbolos que se utilizan. Se hace menos énfasis en procedimientos ("sustitución y simplificación") y usos de fórmulas, y se destaca más la interpretación de estas fórmulas de lo que podría esperarse, especialmente en este último punto. A menudo se le pedirá que explique verbalmente sus ideas, o que justifique su respuesta por medio de gráficas.
- El libro contiene en un lenguaje claro las ideas principales del cálculo. El éxito en el uso de este libro depende de la lectura, cuestionamientos y razonamiento sobre las ideas presentadas. Resultará de utilidad leer detalladamente el texto, no sólo los ejemplos desarrollados.
- Existen pocos ejemplos en el texto que sean exactamente como los problemas que vienen de tarea, por tanto dichos problemas no pueden ser resueltos buscando otros problemas resueltos similares. El éxito con las tareas lo logrará a medida que comprenda las ideas del cálculo.
- Muchos de los problemas del libro son de "final abierto". Esto significa que existe más de un método correcto de tratamiento y más de una solución correcta. Algunas veces, el resolver un problema se basa más en ideas de sentido común que no están explícitamente indicadas, pero que usted conoce porque son parte de su vida diaria.
- Este libro se basa en el supuesto de que usted tiene acceso a una calculadora o computadora para graficar funciones, encontrar raíces (aproximadas) de ecuaciones y calcular integrales numéricamente. Existen muchas situaciones donde usted no estará en condiciones de obtener una solución exacta del problema, pero puede utilizar una calculadora o una computadora para obtener una aproximación razonable. Una respuesta obtenida de esta manera suele ser tan útil como una exacta. Sin embargo, el problema no siempre indica si se necesita una calculadora, así que debe utilizar su propio criterio.

  Si usted siente desconfianza por la tecnología, escuche a esta estudiante, que al principio pensaba de la misma manera:

  > Utilizar computadoras es extraño, pero en mi opinión es sorprendentemente benéfico y conduce al éxito en la clase. Tengo dificultad para visualizar las gráficas en mi mente y esto siempre me ha llevado al fracaso en el cálculo. Con la ayuda de las computadoras, la presión ya no fue un problema y estuve en condiciones de concentrarme en los conceptos que fundamentan el trazo de gráficas; a partir de entonces todo comenzó a ser gradualmente más claro. Fui mejorando en la visualización de cómo deberían ser las gráficas. Es la vieja historia de no poder conseguir trabajo sin experiencia previa ni lograr adquirir experiencia sin tener un trabajo. Al elaborar gráficas mediante las computadoras fue más fácil concentrar la atención en lo que expresan las gráficas, en lugar de fijar la atención solamente en cómo hacerlas bien. Lo que las gráficas simbolizan es la base fundamental de esta clase. Cuando pude ver lo que estaba tratando de describir y aprendí de donde viene, fui capaz de entender más sobre los conceptos, porque podía cambiar las condiciones y ver los resultados. Por primera vez pude ver cómo funcionaba todo...

  Ésta es la opinión de una estudiante de la Universidad de Arizona, que cursó cálculo en el otoño de 1990; fue la primera vez que se utilizó este texto. A ella le aterraba el cálculo y en su primer examen obtuvo una C, pero al final logró una A en el curso.
- Este libro trata de dar el mismo valor a los tres métodos para describir funciones: el gráfico (una figura), el numérico (una tabla de valores) y el algebraico (una fórmula). En ocasiones resulta más fácil trasladar un problema determinado de una forma a otra. Por ejemplo, se puede reemplazar la gráfica de una parábola con su ecuación, o elaborar una tabla de valores para ver su comportamiento. Es importante ser flexibles con respecto al enfoque: si observa que por un método se le dificulta el problema, intente con otro.
- Los estudiantes que usan este libro han encontrado que el comentar estos problemas en pequeños grupos les resulta bastante útil. Hay muchos problemas que no son fáciles y quizá sea útil considerar las perspectivas de los demás compañeros para su solución. Si no es factible el trabajo en grupo, los alumnos deben ver si el maestro puede organizar una sesión de análisis donde se traten estos problemas.
- Probablemente se preguntará qué obtendrá del libro. La respuesta es: si realiza un esfuerzo verdadero, tendrá la capacidad de entender realmente uno de los logros más importantes del milenio: el cálculo, y a su vez conocerá el tremendo alcance de las matemáticas en la era de la tecnología.

Deborah Hughes-Hallett	David O. Lomen	Douglas Quinney
Andrew M. Gleason	David Lovelock	Karen Rhea
Patti Frazer Lock	William G. McCallum	Jeff Tecosky-Feldman
Daniel E. Flath	Brad G. Osgood	Joe B. Thrash
Sheldon O. Gordon	Andrew Pasquale	Thomas W. Tucker

CONTENIDO

1 FUNCIONES Y CAMBIO 1

2 RAZÓN DE CAMBIO: LA DERIVADA 93

6 USO DE LA INTEGRAL DEFINIDA 255

7 ANTIDERIVADAS 277

8 PROBABILIDAD 301

9 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES 321

10 MODELADO MATEMÁTICO MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES 375

11 SERIES GEOMÉTRICAS 419

Capítulo 1

FUNCIONES Y CAMBIO

Las funciones son realmente fundamentales para las matemáticas. De manera usual decimos: "el funcionamiento del mercado de valores es una función de la confianza de los consumidores", o bien "la presión sanguínea del paciente es una función de los medicamentos prescritos". En cada caso, la palabra *función* expresa la idea de que el conocimiento de cierta información nos lleva al conocimiento de otra. En matemáticas, las funciones más importantes son aquellas en las que el conocimiento de un número nos indica otro número. Si conocemos la longitud del lado de un cuadrado, podemos determinar su área. Si conocemos la circunferencia de un círculo, podemos determinar su radio.

El cálculo se inicia con el estudio de las funciones. Este capítulo establece las bases del cálculo para estudiar el comportamiento de algunas funciones comunes. También vemos formas de manejar gráficas, tablas y fórmulas que representan estas funciones.

El cálculo nos permite estudiar el cambio. En este capítulo veremos cómo medir el cambio y la razón promedio de cambio.

1.1 ¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

En matemáticas, una *función* se usa para representar la forma en que una cantidad depende de otra.

Veamos un ejemplo. En diciembre de 2000 las temperaturas en Chicago eran inusualmente bajas en las vacaciones de invierno. Las máximas temperaturas diarias durante los días 19 al 28 de diciembre aparecen en la tabla 1.1.

Tabla 1.1 *Temperaturas máximas diarias en Chicago, 19 al 28 de diciembre de 2000*

Fecha (diciembre 2000)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Temperatura máxima (°F)	20	17	19	7	20	11	17	19	17	20

Aun cuando nunca hayamos pensado en que algo tan impredecible como la temperatura sea una función, la temperatura *es* una función de la fecha, porque cada día da lugar a una y sólo a una temperatura máxima. No hay fórmula para la temperatura (de lo contrario, no necesitaríamos del servicio meteorológico); sin embargo, la temperatura satisface la definición de una función: cada fecha, t, tiene una temperatura de salida única, H, relacionada con ella.

Definamos una función de la siguiente manera:

> Una **función** es una regla que toma ciertos números como entradas y asigna a cada uno un número definitivo de salida. El conjunto de todos los números de entrada recibe el nombre de **dominio** de la función, y el conjunto de los números de salida resultantes se denomina el **rango** de la función.

La entrada se llama *variable independiente* y la salida, *variable dependiente*. En el ejemplo de la temperatura, el conjunto de fechas $\{19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28\}$ es el dominio, y el conjunto de temperaturas $\{7, 11, 17, 19, 20\}$ es el rango. Llamamos f a la función, y la denotamos como $H = f(t)$. Una función puede tener resultados idénticos, pero diferentes entradas (por ejemplo, diciembre 20, 25 y 27).

Algunas cantidades, por ejemplo las fechas, son *discretas*, es decir, sólo pueden tomar valores aislados (las fechas deben ser números enteros). Otras cantidades, como el tiempo, son *continuas* porque pueden ser cualquier número. Para una variable continua, los dominios y los rangos con frecuencia se escriben usando la notación de intervalos:

El conjunto de números t tal que $a \leq t \leq b$ se escribe $[a, b]$

El conjunto de números t tal que $a < t < b$ se escribe (a, b)

Representación de funciones: tablas, gráficas, fórmulas y enunciados

Las funciones pueden ser representadas por tablas, gráficas, fórmulas y enunciados. Por ejemplo, la función que da las temperaturas máximas en Chicago puede estar representada por la gráfica de la figura 1.1, así como por la tabla 1.1.

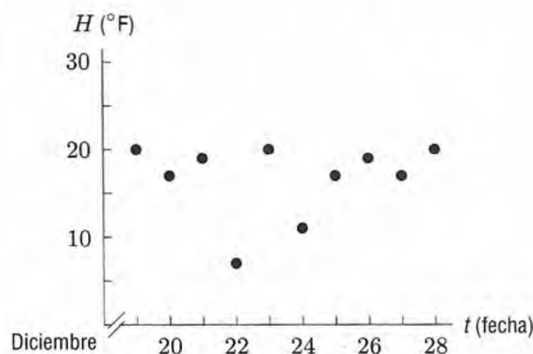


Figura 1.1. Temperaturas en Chicago, diciembre de 2000.

Otras funciones aparecen de manera natural como gráficas. La figura 1.2 contiene imágenes de electrocardiogramas (ECG) que muestran los patrones de los latidos del corazón de dos pacientes, uno normal y otro anormal. Aunque es posible construir una fórmula para aproximar una función de un ECG, raras veces se hace. El patrón de repeticiones es lo que un doctor necesita conocer y se puede determinar más fácilmente en una gráfica que en una fórmula. Sin embargo, cada ECG representa una función que indica la actividad eléctrica como función del tiempo.

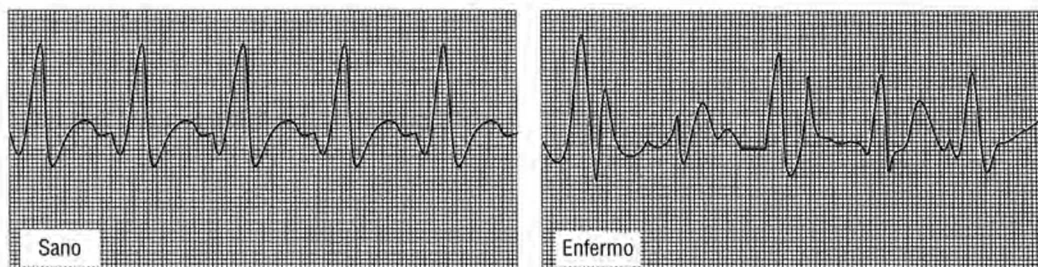


Figura 1.2. Lecturas de ECG en dos pacientes.

Considere el grillo del árbol de nieve. Para nuestra sorpresa, todos los grillos chirrian esencialmente al mismo ritmo si están a la misma temperatura. Esto significa que el ritmo del chirrido es una función de la temperatura. En otras palabras, si conocemos la temperatura podemos determinar el ritmo de los chirridos. Aún más sorprendente es que el ritmo de un chirrido, C, en chirridos por minuto, aumenta de manera constante con la temperatura, T, en grados Fahrenheit y se puede calcular, con cierto grado de exactitud, mediante la fórmula

$$C = f(T) = 4T - 160$$

La gráfica de esta función se muestra en la figura 1.3.

Como $C = f(T)$ aumenta con T, podemos decir que f es una *función creciente*.

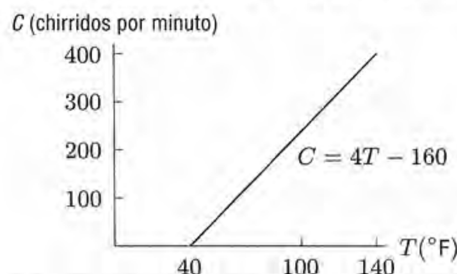


Figura 1.3. Ritmo de chirridos de un grillo con respecto a la temperatura.

Notación de funciones e intersecciones

Se escribe $y = f(t)$ para expresar el hecho de que y es una función de t. La variable independiente es t, la variable dependiente, y y f es el nombre de la función. La gráfica de una función tiene una *intersección* en el punto donde cruza el eje horizontal o el vertical. Los valores de las abscisas de las intersecciones horizontales* también son conocidas como los *ceros* de la función.

Ejemplo 1 El valor de un automóvil, V, es una función del tiempo de uso del auto, a, así que $V = f(a)$.

(a) Interprete el enunciado $f(5) = 9$ en términos del valor del automóvil, si V es en miles de dólares, y a en años.

(b) En las mismas unidades, el valor de un Honda[1] se aproxima por $f(a) = 13.25 - 0.9a$. Encuentre e interprete las intersecciones verticales y horizontales de la gráfica de esta función de depreciación f.

*N. del Rev. Téc. El valor (número) de la abscisa de la intersección de la gráfica con el eje horizontal se conoce como *abscisa en el origen* de la gráfica (función). Asimismo, la ordenada (número) de la intersección de la gráfica con el eje vertical se denomina *ordenada en el origen* de la gráfica (función).

[1]Datos obtenidos del libro *Kelley Blue*, www.kbb.com.

Solución (a) Como $V = f(a)$, el enunciado $f(5) = 9$ significa que $V = 9$ cuando $a = 5$. Esto nos dice que el automóvil vale $9,000* cuando tiene cinco años.

(b) Como $V = f(a)$, una gráfica de la función f tiene el valor del automóvil en el eje vertical, y la edad del automóvil en el eje horizontal. La ordenada en el origen de f es el valor de V cuando $a = 0$. Éste es $V = f(0) = 13.25$; así, el Honda valía $13,250 cuando estaba nuevo. La abscisa en el origen de f es el valor de a tal que $V(a) = 0$, por tanto

$$13.25 - 0.9a = 0$$

$$a = \frac{13.25}{0.9} = 14.7.$$

Después de 15 años, el Honda no tendrá ningún valor.

Puesto que $V = f(a)$ disminuye a medida que a aumenta, decimos que f es una *función decreciente*.

Problemas para la sección 1.1

1. La población de una ciudad, P, en millones, es una función de t, el número de años desde 1950, así $P = f(t)$. Explique el significado del enunciado $f(35) = 12$ en términos de la población de esta ciudad.

2. ¿Qué gráfica de la figura 1.4 se relaciona mejor con cada una de las siguientes historias?[2] Escriba una historia para la gráfica restante.

(a) Justo cuando salí de casa me di cuenta que había olvidado mis libros, así que regresé para recogerlos.

(b) Todo marchaba bien hasta que se desinfló una llanta.

(c) Al principio iba calmado, pero después apresuré el paso cuando me di cuenta que iba a llegar tarde.

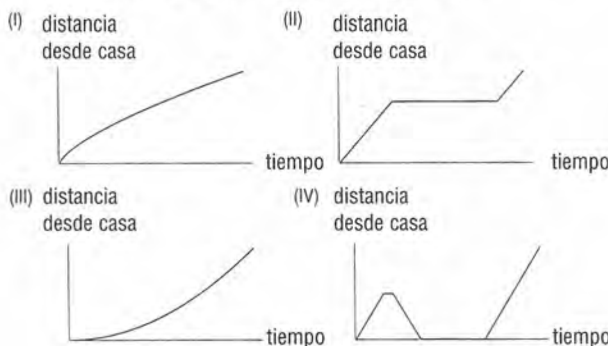


Figura 1.4.

3. El número de ventas por mes, S, es una función de la cantidad, a gastados en publicidad ese mes, de modo que $S = f(a)$.

(a) Interprete el enunciado $f(1{,}000) = 3{,}500$.

(b) ¿Qué gráfica de la figura 1.5 representa más acertadamente esta función?

(c) ¿Qué representa la ordenada en el origen de la gráfica de esta función, en términos de ventas y publicidad?

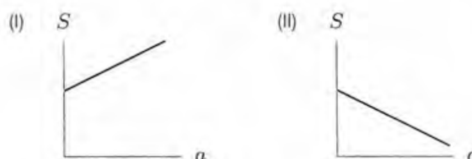


Figura 1.5.

4. En las montañas de los Andes, en Perú, el número, N, de especies de murciélagos es una función de la altura, h, en pies sobre el nivel del mar, así $N = f(h)$.

(a) Interprete el enunciado $f(500) = 100$ en términos de especies de murciélagos.

(b) ¿Cuáles son los significados de la ordenada en el origen, k, y la abscisa en el origen, c, en la figura 1.6?

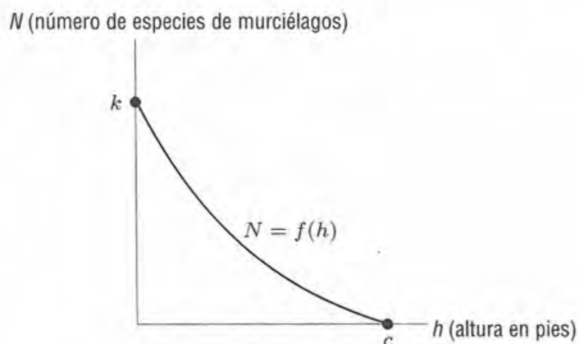


Figura 1.6.

* N. E. Las cantidades que aparecen en todo el libro están expresadas en dólares estadounidenses.

[2]Adaptado de Terwel, Jan, "Real Math in Cooperative Groups in Secondary Equation", *Cooperative Learning in Mathematics*, Neal Davidson, lectura: Addison Wesley, 1990, p. 234.

5. En un día frío se deja a la intemperie un objeto al tiempo $t = 0$. Su temperatura, $H = f(t)$ en °C, está graficada en la figura 1.7.

(a) ¿Qué significa el enunciado $f(30) = 10$ en términos de temperatura? Incluya unidades para 30 y para 10 en su respuesta.

(b) Explique qué representan la ordenada en el origen, a, y la abscisa en el origen, b, en términos de la temperatura del objeto y del tiempo de exposición.

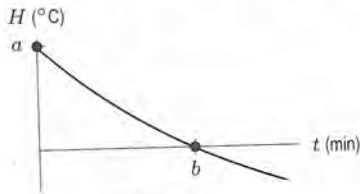


Figura 1.7.

6. La población de Washington, D. C. creció de 1900 a 1950; permaneció aproximadamente constante durante la década de 1950 y disminuyó de 1960 al 2000. Trace una gráfica de la población como una función de los años desde 1900.

7. Los inversionistas financieros saben que, en general, entre más alta sea la tasa de la ganancia esperada de una inversión más alto será el riesgo correspondiente.

(a) Trace la gráfica de esta relación mostrando la ganancia esperada como una función del riesgo.

(b) En la figura del inciso (a) señale el punto con la mayor ganancia esperada y el menor riesgo. (Los inversionistas esperan encontrar ese tipo de oportunidades.)

8. En los pantanos a la orilla de la costa de Nueva Inglaterra los caracoles comen algas.[3] Describa qué le indica la figura 1.8 respecto al efecto de los caracoles en la diversidad de algas. ¿La gráfica apoya el enunciado referente a que la diversidad alcanza su punto máximo en niveles predatorios intermedios?

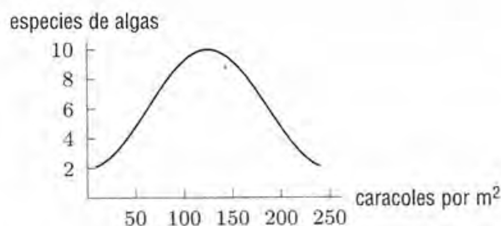


Figura 1.8.

9. La concentración de medicamento en el cuerpo de un paciente, después de una inyección, aumenta con rapidez hasta un máximo y luego disminuye lentamente. Trace la gráfica de la concentración de medicamento en el cuerpo como una función de tiempo, a partir de que fue aplicada la inyección. Suponga que el paciente no tiene ningún medicamento en el cuerpo antes de la inyección. Indique cuál es la concentración máxima y el tiempo que toma alcanzar dicha concentración.

10. Se realiza un depósito en una cuenta que genera intereses. La figura 1.9 muestra el saldo, B, en la cuenta t años después.

(a) ¿Cuál fue el depósito original?

(b) Calcule $f(10)$ e interprételo.

(c) ¿Cuándo el saldo es de $5,000?

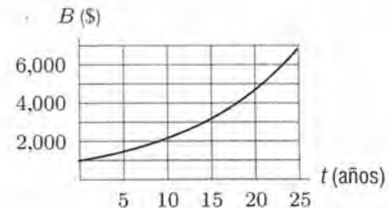


Figura 1.9.

11. **(a)** Se coloca una papa en un horno casero al tiempo $t = 0$. ¿Cuál de las gráficas de la figura 1.10 podría representar la temperatura de la papa como función de tiempo?

(b) ¿Qué significa la ordenada en el origen de la gráfica en términos de la temperatura de la papa?

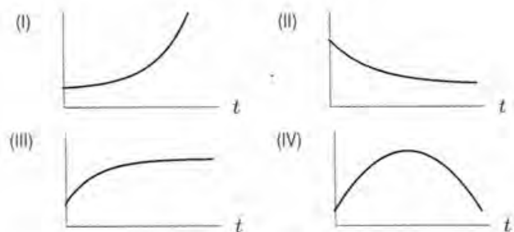


Figura 1.10.

12. La figura 1.11 muestra la cantidad de nicotina, $N = f(t)$, en miligramos en el torrente sanguíneo de una persona como una función de tiempo, t, en horas, desde que la persona terminó de fumar un cigarrillo.

(a) Calcule $f(3)$ e interprétela en términos de niveles de nicotina.

(b) Aproximadamente, ¿cuántas horas han transcurrido desde que el nivel de nicotina bajó a 0.1 miligramos?

(c) ¿Cuál es la ordenada en el origen? ¿Qué representa en términos de nicotina?

(d) Si esta función tuviera una abscisa en el origen, ¿qué representaría?

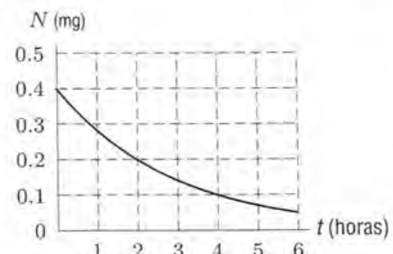


Figura 1.11.

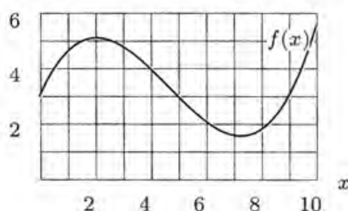
[3]Rosenzweig, M. L., *Species Diversity in Space and Time*, Cambridge University Press, Cambridge, Mass., 1995, p. 343.

Para las funciones de los problemas 13 al 17 encuentre $f(5)$.

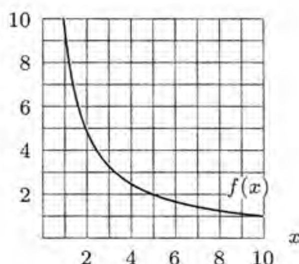
13. $f(x) = 2x + 3$

14. $f(x) = 10x - x^2$

15.



16.



17.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2.3	2.8	3.2	3.7	4.1	5.0	5.6	6.2

18. Hizo calor toda la mañana y de pronto enfrió hacia el medio día; después cayó una tormenta. Después de la tormenta, nuevamente hizo calor antes de que enfriara al oscurecer. Trace la gráfica de la temperatura como función del tiempo.

19. Después que se aplica cierto medicamento a un paciente que tiene un ritmo cardiaco rápido, éste disminuye de modo considerable y luego sube lentamente a medida que el medicamento es eliminado. Trace una posible gráfica del ritmo cardiaco respecto al tiempo a partir del momento en que se aplica el medicamento.

20. La figura 1.12 muestra el uso de fertilizantes en Estados Unidos, India y la antigua Unión Soviética en los últimos 50 años.[4]

(a) Calcule el uso de fertilizantes en 1910 para Estados Unidos, India y la antigua Unión Soviética.

(b) Escriba un enunciado para cada una de las tres gráficas en donde describa cómo ha cambiado el uso de fertilizantes en cada región durante el periodo de 50 años.



Figura 1.12.

21. El rendimiento de gasolina de un automóvil (millas/galón) alcanza su punto máximo cuando el automóvil va a una velocidad de 45 millas/hora y es menor cuando el automóvil va más rápido o más despacio de 45 millas/hora. Trace la gráfica del rendimiento de gasolina como función de la velocidad del automóvil.

22. Un tanque de gasolina a seis metros bajo tierra tiene una fuga. La gasolina se escurre y contamina la tierra a su alrededor. Trace la gráfica de la cantidad de contaminación como función de la profundidad (en metros) bajo el suelo.

23. Explique qué le indica la figura 1.13 respecto a una línea de ensamble cuya productividad se representa como función del número de trabajadores en la línea.

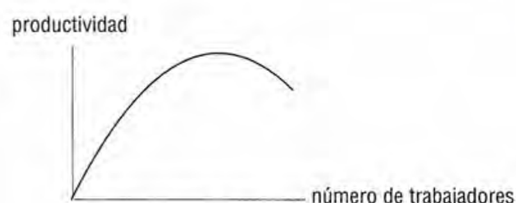


Figura 1.13.

24. **(a)** La gráfica de $r = f(p)$ se muestra en la figura 1.14. ¿Cuál es el valor de r cuando p es 0? ¿Y cuando p es 3?

(b) ¿A qué es igual $f(2)$?

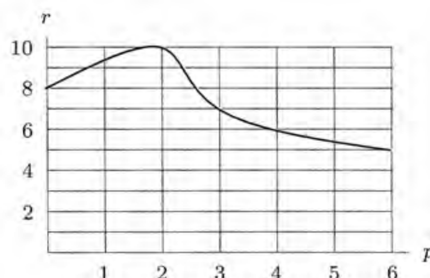


Figura 1.14.

25. Sea $y = f(x) = x^2 + 2$.

(a) Encuentre el valor de y cuando x es cero.

(b) ¿A qué es igual $f(3)$?

(c) ¿Cuáles son los valores de x que hacen que y tome el valor de 11?

(d) ¿Existe algún valor de x que haga que el valor de y sea igual a 1?

[4]The Worldwatch Institute, *Vital Signs 2001*, W.W. Norton, Nueva York, 2001, p. 32.

1.2 FUNCIONES LINEALES

Probablemente las funciones que se usan con más frecuencia sean las *funciones lineales*, cuyas gráficas son líneas rectas. Las funciones de rapidez de chirridos y la depreciación del Honda en la sección anterior son lineales. Ahora veremos más ejemplos de las funciones lineales.

Marcas olímpicas y mundiales

Durante los primeros años de los Juegos Olímpicos, la altura ganadora del salto con garrocha masculino aumentó aproximadamente ocho pulgadas cada cuatro años. La tabla 1.2 muestra que la altura se inició en 130 pulgadas en 1900 y aumentó en un equivalente de dos pulgadas entre 1900 y 1912. Entonces, la altura fue una función lineal del tiempo.

Tabla 1.2 *Altura ganadora (aproximada) para el salto masculino con garrocha*

Año	1900	1904	1908	1912
Altura (pulgadas)	130	138	146	154

Si y es la altura ganadora en pulgadas, y t el número de años desde 1900, podemos escribir

$$y = f(t) = 130 + 2t$$

Como $y = f(t)$ aumenta con t, decimos que f es una *función creciente*. El coeficiente 2 nos indica la razón, en pulgadas por año, a la cual aumenta la altura. Esta razón es la *pendiente* de la recta de la figura 1.15. La pendiente está dada por la razón

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{Aumento de la altura}}{\text{Intervalo de tiempo}} = \frac{146 - 138}{8 - 4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ pulgadas/año}$$

El cálculo de la pendiente (aumento de altura/intervalo de tiempo) usando otros dos puntos sobre la recta dará el mismo valor.

¿Y qué hay de la constante 130? Ésta representa la altura inicial en 1900, cuando $t = 0$. Geométricamente, 130 es la ordenada en el origen.

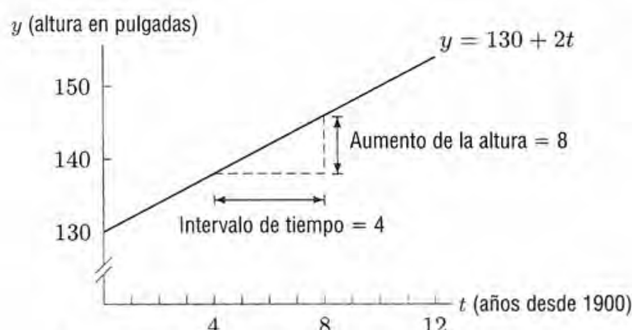


Figura 1.15. Marcas olímpicas de salto con garrocha.

Usted se preguntará si la tendencia lineal continúa después de 1912. De modo sorprendente no, no con exactitud. La fórmula $y = 130 + 2t$ pronostica que la altura en la Olimpiada del 2000 sería de 330 pulgadas, es decir, 27 pies y 6 pulgadas, lo cual es considerablemente más alto que el valor real de 19 pies 4.27 pulgadas. Hay entonces un claro riesgo de *extrapolar* demasiado a partir de una información dada. También observe que la información de la tabla 1.2 es *discreta*, porque está dada sólo en puntos específicos (cada cuatro años). Sin embargo, sólo hemos considerado a la variable t como si fuera *continua*, porque la función $y = 130 + 2t$ es congruente para todos los valores de t. La gráfica de la figura 1.15 corresponde a una función continua, porque es una recta sólida en lugar de cuatro puntos separados que representan los años en que se efectuó la Olimpiada.

Ejemplo 1 Si y es el tiempo récord mundial en que se corre una milla, en segundos, y t es el número de años desde 1900, entonces las marcas muestran que, aproximadamente

$$y = g(t) = 260 - 0.4t.$$

Explique el significado de la ordenada en el origen, 260, y la pendiente, -0.4, en términos del récord mundial en que se corre una milla y dibuje la gráfica.

Solución La ordenada en el origen, 260, nos dice que el récord mundial fue de 260 segundos en 1900 (en $t = 0$). La pendiente, -0.4, nos dice que el récord mundial disminuyó a razón de aproximadamente 0.4 segundos cada año. Véase la figura 1.6.

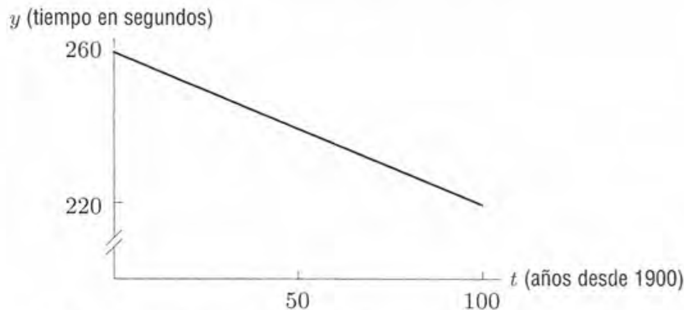


Figura 1.16. Tiempo récord mundial en que se corre una milla.

Pendiente y razón de cambio

Usaremos el símbolo Δ (la letra griega delta mayúscula) para indicar un "cambio en", por tanto, Δx significa un cambio en x y Δy significa un cambio en y.

Podemos calcular la pendiente de una función lineal $y = f(x)$ a partir de los valores de la función en dos puntos, dados por x_1 y x_2, usando la fórmula

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{Cambio en } x}{\text{Cambio en } y} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

A la cantidad $(f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$ se le denomina *cociente de diferencias*, ya que es el cociente de dos diferencias. (Véase la figura 1.17.) Puesto que la pendiente es $\Delta y/\Delta x$, la pendiente representa la *razón de cambio* de y respecto a x. Las unidades de la pendiente son unidades de y sobre unidades de x.

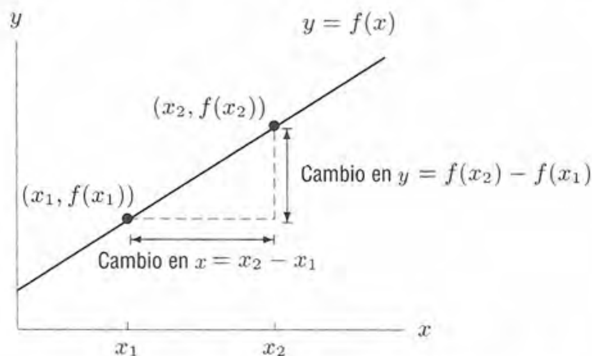


Figura 1.17. Cociente de diferencias $= \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Funciones lineales en general

Una **función lineal** tiene la forma

$$y = f(x) = b + mx.$$

Su gráfica es una recta donde

- m es la **pendiente**, o la razón de cambio de y respecto a x.
- b es la **ordenada en el origen** o valor de y cuando x es cero.

Observe que si la pendiente, m, es cero, tenemos $y = b$, una recta horizontal. Para una línea recta de pendiente m que pasa por el punto (x_0, y_0), tenemos

$$\text{Pendiente} = m = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Por tanto, podemos escribir la ecuación de la recta en la *forma punto-pendiente*:

La ecuación de una recta con pendiente m que pasa por el punto (x_0, y_0) es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ejemplo 2 La basura que se genera cada año en las ciudades de Estados Unidos está aumentando. La basura generada,[5] en millones de toneladas, fue de 205.2 en 1990 y de 220.2 en 1998.

(a) Suponiendo que la cantidad de basura generada en ciudades de Estados Unidos es una función lineal del tiempo, encuentre una fórmula para esta función calculando la ecuación de la recta que pase por estos dos puntos.

(b) Use esta fórmula para pronosticar la cantidad de basura que será generada en el año 2020.

Solución **(a)** Estamos buscando la cantidad de basura, W, como función del año, t, y los dos puntos son (1990, 205.2) y (1998, 220.2). La pendiente de la recta es

$$m = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{220.2 - 205.2}{1998 - 1990} = \frac{15}{8} = 1.875 \text{ millones de tons/año}$$

Para encontrar la ecuación de la recta debemos hallar la ordenada en el origen. Sustituimos el punto (1990, 205.2) y la pendiente $m = 1.875$ en la ecuación por W:

$$\begin{aligned} W &= b + mt \\ 205.2 &= b + (1.875)(1990) \\ 205.2 &= b + 3{,}731.25 \\ -3{,}526.05 &= b. \end{aligned}$$

La ecuación de la recta es $W = -3{,}526.05 + 1.875t$. Alternativamente, se podría haber usado la forma punto-pendiente para una línea recta, $W - 202.5 = 1.875(t - 1990)$.

(b) Para pronosticar la basura para el año 2020 sustituimos $t = 2020$ en la ecuación de la recta, $W = -3{,}526.05 + 1.875t$ y calculamos W:

$$W = -3{,}526.05 + (1.875)(2020) = 261.45.$$

Esta fórmula pronostica que en el año 2020 habrán 261.45 millones de toneladas de basura.

Reconocimiento de datos a partir de una función lineal. Los valores de x y y en una tabla pueden provenir de una función $y = b + mx$ si las diferencias de los valores de y son constantes para las mismas diferencias en x.

[5] *Statistical Abstracts of the US*, 2000, Tabla 396.

Ejemplo 3 ¿Cuáles de las siguientes tablas de valores podrían representar una función lineal?

x	0	1	2	3
$f(x)$	25	30	35	40

x	0	2	4	6
$g(x)$	10	16	26	40

t	20	30	40	50
$h(t)$	2.4	2.2	2.0	1.8

Solución Como $f(x)$ aumenta en 5 por cada incremento de 1 en x, los valores de $f(x)$ pueden provenir de una función lineal con pendiente $= 5/1 = 5$.

Entre $x = 0$ y $x = 2$, el valor de $g(x)$ aumenta 6 a medida que x aumenta 2. Entre $x = 2$ y $x = 4$ el valor de y aumenta en 10 conforme x aumenta en 2. Puesto que la pendiente no es constante, $g(x)$ no puede ser una función lineal.

Como $h(t)$ disminuye 0.2 por cada incremento de 10 en t, los valores de $h(t)$ pueden provenir de una función lineal con pendiente $= -0.2/10 = -0.2$.

Ejemplo 4 Los datos de la siguiente tabla están en una recta. Encuentre las fórmulas para cada una de las siguientes funciones y dé las unidades para la pendiente en cada caso:

(a) q como función de p

(b) p como función de q

p(dólares)	5	10	15	20
q(toneladas)	100	90	80	70

Solución **(a)** Si consideramos q como una función lineal de p, entonces q es la variable dependiente y p es la variable independiente. Podemos utilizar dos puntos arbitrarios para encontrar la pendiente. Los primeros dos puntos dan

$$\text{Pendiente} = m = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{90 - 100}{10 - 5} = \frac{-10}{5} = -2.$$

Las unidades son las unidades de q sobre las unidades de p, o toneladas por dólar.

Para escribir q como función lineal de p usamos la ecuación $q = b + mp$. Sabemos que $m = -2$ y podemos utilizar cualquiera de los puntos en la tabla para calcular b. Sustituyendo $p = 10$, $q = 90$ tenemos que

$$\begin{aligned} q &= b + mp \\ 90 &= b + (-2)(10) \\ 90 &= b - 20 \\ 110 &= b. \end{aligned}$$

Así, la ecuación de la recta es

$$q = 110 - 2p.$$

(b) Si ahora consideramos p como función lineal de q, entonces p es la variable dependiente y q es la variable independiente. Entonces tenemos que

$$\text{Pendiente} = m = \frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{10 - 5}{90 - 100} = \frac{5}{-10} = -0.5.$$

Las unidades de la pendiente son dólares por tonelada.

Como p es una función lineal de q, tenemos $p = b + mq$ y $m = -0.5$. Para encontrar b sustituimos cualquier punto de la tabla, como por ejemplo $p = 10$, $q = 90$, en esta ecuación

$$\begin{aligned} p &= b + mq \\ 10 &= b + (-0.5)(90) \\ 10 &= b - 45 \\ 55 &= b. \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación de la recta es

$$p = 55 - 0.5q.$$

De manera alternativa, note que podríamos haber llevado nuestra respuesta al inciso (a), que es $q = 110 - 2p$ y despejar p.

Familias de funciones lineales

Se dice que las fórmulas como $f(x) = b + mx$, en las que las constantes m y b pueden tomar diversos valores, definen una *familia de funciones*. Todas las funciones en una familia comparten ciertas propiedades (en este caso las gráficas son rectas.) Las constantes m y b reciben el nombre de *parámetros*. Las figuras 1.18 y 1.19 muestran gráficas con diversos valores de m y b. Observe que cuanto mayor es la magnitud de m la pendiente es más escarpada.

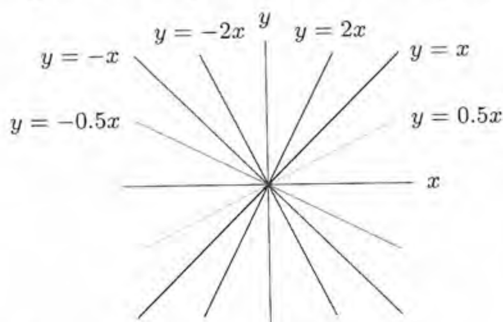


Figura 1.18. La familia $y = mx$ (con $b = 0$).

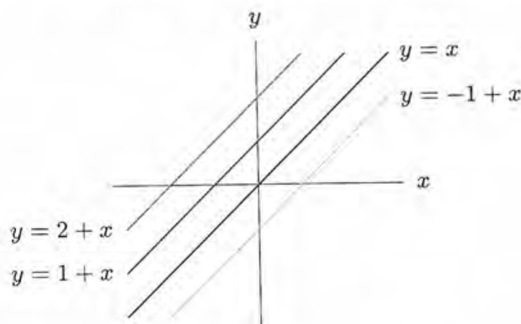


Figura 1.19. La familia $y = b + x$ (con $m = 1$).

Problemas para la sección 1.2

Para los problemas 1 al 4 determine la pendiente y la intersección con el eje y de la recta cuya ecuación se presenta.

1. $3x + 2y = 8$ **2.** $7y + 12x - 2 = 0$

3. $-4y + 2x + 8 = 0$ **4.** $12x = 6y + 4$

Para los problemas del 5 al 8 encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

5. $(0, 0)$ y $(1, 1)$ **6.** $(0, 2)$ y $(2, 3)$

7. $(4, 5)$ y $(2, -1)$ **8.** $(-2, 1)$ y $(2, 3)$

9. Enlace las gráficas de la figura 1.20 con las siguientes ecuaciones. (Observe que las escalas de x y y pueden ser diferentes.)

(a) $y = x - 5$ **(b)** $-3x + 4 = y$
(c) $5 = y$ **(d)** $y = -4x - 5$
(e) $y = x + 6$ **(f)** $y = x/2$

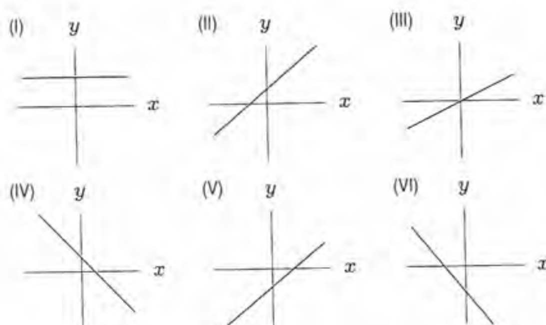


Figura 1.20.

10. La figura 1.21 muestra cuatro líneas rectas dadas por la ecuación $y = b + mx$. Enlace las rectas con las condiciones de los parámetros m y b.

(a) $m > 0, b > 0$ **(b)** $m < 0, b > 0$
(c) $m > 0, b < 0$ **(d)** $m < 0, b < 0$

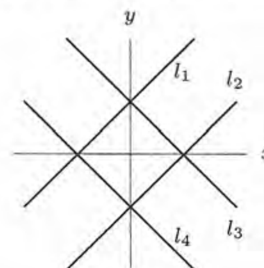


Figura 1.21.

10. (a) ¿Cuáles son las dos rectas de la figura 1.22 que tienen la misma pendiente? De estas dos rectas, ¿cuál tiene la mayor *ordenada en el origen*?

(b) ¿Cuáles son las dos líneas rectas que tienen la misma intersección con el eje y? De estas dos rectas, ¿cuál tiene la pendiente más escarpada?

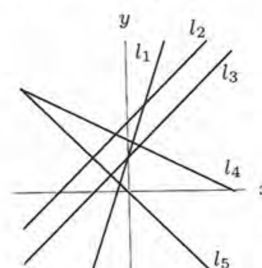


Figura 1.22.

12. Una empresa de telefonía celular cobra una tarifa mensual de \$25 más \$0.05 por minuto. Encuentre una fórmula para el cobro mensual, C, en dólares, como una función del número de minutos, m, en los que el teléfono es usado durante el mes.

13. La población de una ciudad era de 30,700 en el año 2000 y está creciendo en 850 personas por año.

(a) Dé una fórmula para la población de la ciudad, P, como función del número de años, t, desde el 2000.

(b) ¿Qué población predice la fórmula que habrá en el 2010?

(c) ¿Cuándo alcanzará la población los 45,000 habitantes?

14. Una empresa ofrece autos en renta a \$40 el día y 15 centavos por milla. Los autos de una empresa competidora se rentan en \$50 por día y 10 centavos por milla.

(a) Para cada compañía, escriba una fórmula que dé el costo de rentar un auto por un día como función de la distancia recorrida.

(b) En un mismo sistema de coordenadas, trace las gráficas de ambas funciones.

(c) ¿Cómo puede usted decidir cuál empresa es más barata?

15. ¿Cuáles de las siguientes tablas podrían representar funciones lineales?

(a)

x	0	1	2	3
y	27	25	23	21

(b)

t	15	20	25	30
s	62	72	82	92

(c)

u	1	2	3	4
w	5	10	18	28

16. Encuentre una fórmula para cada tabla del problema 15 que pueda representar una función lineal.

17. Encuentre la ecuación lineal usada para generar los valores de la tabla 1.3.

Tabla 1.3

x	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
y	27.8	29.2	30.6	32.0	33.4

18. La estructura de precios de una empresa que se muestra en la tabla 1.4 está diseñada para cubrir pedidos grandes. (Un monto por mayoreo abarca 12 docenas.) Encuentre una fórmula para:

(a) q como función lineal de p.

(b) p como función lineal de q.

Tabla 1.4

q (tamaño del pedido, monto por mayoreo)	3	4	5	6
p (precio/docena)	15	12	9	6

19. La producción mundial de leche aumentó a una tasa constante entre 1960 y 1990.[6] Véase la figura 1.23.

(a) Calcule la intersección con el eje vertical e interprétela en términos de la producción de leche.

(b) Calcule la pendiente e interprétela en términos de la producción de leche.

(c) Dé una fórmula aproximada para la producción de leche, M, como función de t.

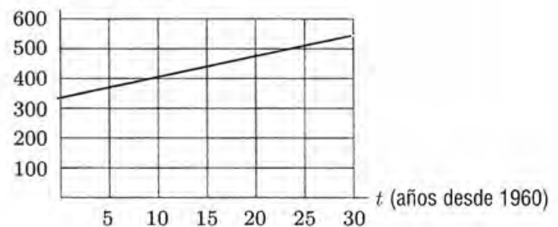


Figura 1.23.

20. La figura 1.24 muestra la distancia en millas que recorre desde su casa una persona que realiza un viaje de cinco horas.

(a) Calcule la ordenada en el origen. Dé las unidades e interprételas en términos de la distancia desde la casa.

(b) Calcule la pendiente de esta función lineal. Dé las unidades e interprételas en términos de la distancia desde la casa.

(c) Dé una fórmula para la distancia, D, desde la casa como una función del tiempo, t, en horas.

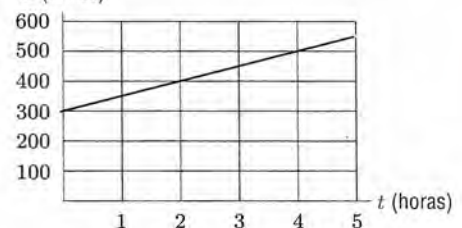


Figura 1.24.

21. Los valores de la reserva de oro canadiense, Q, en millones de onzas troy, están en la tabla 1.5.[7] Encuentre una fórmula para la reserva de oro como función lineal de tiempo desde 1986.

Tabla 1.5

Año	1986	1987	1988	1989	1990
Q (millones de onzas troy)	19.72	18.48	17.24	16.00	14.76

22. La tabla 1.6 indica el peso promedio, w, en libras, de los varones estadounidenses de 60 años para diversas alturas, h, en pulgadas.[8]

(a) ¿Cómo saber si los datos de esta tabla podrían representar una función lineal?

(b) Encuentre el peso, w, como función lineal de la altura, h. ¿Cuál es la pendiente de la recta? ¿Cuáles son las unidades de la pendiente?

(c) Encuentre la altura, h, como función lineal del peso, w. ¿Cuál es la pendiente de la recta? ¿Cuáles son las unidades de la pendiente?

Tabla 1.6

h (pulgadas)	68	69	70	71	72	73	74	75
w (libras)	166	171	176	181	186	191	196	201

[6] The Worldwatch Institute, *Vital Signs 2001*, W.W. Norton, Nueva York, 2001, p. 35.

[7] "Gold Reserves of Central Banks and Governments", *The World Almanac*, Funk and Wagnalls, Nueva Jersey, 1992.

[8] Adaptado de "Average Weight of Americans by Height and Age", *The World Almanac*, Funk and Wagnalls, Nueva Jersey, 1992, p. 956.

23. Los equipos de búsqueda y rescate trabajan para encontrar excursionistas perdidos. Los miembros del equipo de búsqueda se separan y caminan paralelamente uno del otro en el área que deben examinar. La tabla 1.7 muestra el porcentaje, P, de las perdidas que fueron encontradas a diferentes distancias de separación, d, de los buscadores.[9]

Tabla 1.7

Distancia de separación d (pie)	20	40	60	80	100
Porcentaje aproximado de personas encontradas, P	90	80	70	60	50

(a) Explique cómo puede saber que el porcentaje de personas encontradas, P, podría ser una función lineal de la distancia de separación, d.

(b) Represente P como función lineal de d.

(c) ¿Cuál es la pendiente de la función? Dé las unidades e interprete la respuesta.

(d) ¿Cuáles son las ordenadas en el origen y las abscisas en el origen de la función? Dé las unidades e interprete las respuestas.

24. La cuota mensual de un servicio de recolección de basura es de \$32 por 100 kg de desechos, y de \$48 por 180 kg de desechos.

(a) Encuentre una fórmula lineal para el costo, C, de basura recolectada como función del número de kilogramos de desechos, w.

(b) ¿Cuál es la pendiente de la recta calculada en el inciso (a)? Dé las unidades e interprete su respuesta en términos del costo de recolección de basura.

(c) ¿Cuál es la ordenada en el origen de la recta determinada en el inciso (a)? Dé las unidades con su respuesta e interprételas en términos del costo de recolección de basura.

25. Las ventas de discos compactos (CD) de música aumentaron rápidamente en la década de 1990. Las ventas ascendieron a 333.3 millones en 1991 y a 938.2 millones en 1999.[10]

(a) Encuentre una fórmula para las ventas, S, de CD de música, en millones de unidades, como función lineal del número de años, t, desde 1991.

(b) Dé las unidades e interprete la pendiente y la ordenada en el origen de esta función.

(c) Use la fórmula para pronosticar las ventas de CD de música en el 2005.

26. El número de especies de plantas en las dunas costeras de Australia disminuye a medida que a la latitud, en °S, aumenta. Existen 34 especies a 11 °S y 26 especies a 44 °S.[11]

(a) Encuentre una fórmula para el número, N, de especies de plantas de las dunas costeras en Australia como función lineal de la latitud, l, en °S.

(b) Dé las unidades e interprete la pendiente y la ordenada en el origen de esta función.

(c) Trace la gráfica de esta función entre $l = 11$°S y $l = 44$ °S. (Australia está dentro de estas latitudes.)

27. Los residentes del pueblo Maple Grove que reciben el suministro municipal de agua pagan una cantidad anual fija más un cargo por cada pie cúbico de agua utilizada. Al dueño de una casa que consumía 1,000 pies cúbicos le cobraron \$90, mientras que a otro que consumía 1,600 pies cúbicos le cobraron \$105.

(a) ¿A cuánto asciende el cobro por pie cúbico?

(b) Escriba una ecuación para el costo total de agua de un residente, como función de los pies cúbicos de agua consumidos.

(c) ¿Cuántos pies cúbicos de agua se consumen para tener un cargo de \$130?

28. Un controversial estudio danés de 1992[12] indicó que el número promedio de espermatozoides en seres humanos ha disminuido de 113 millones por mililitro en 1940 a 66 millones por mililitro en 1990.

(a) Exprese el número promedio de espermatozoides, S, como función lineal del número de años, t, desde 1940.

(b) La fertilidad del hombre resulta afectada si su cantidad de espermatozoides disminuye por debajo de 20 millones por mililitro. Si el modelo lineal que se formuló en el inciso (a) es adecuado, ¿en qué año cayó el promedio de espermatozoides por debajo de dicho nivel?

29. La gráfica de la temperatura Fahrenheit, °F, como función de la temperatura Celsius, °C, es una recta. Usted sabe que 212 °F y 100 °C representan la temperatura a la cual hierve el agua. De igual manera, 32 °F y 0 °C representan el punto de congelación del agua.

(a) ¿Cuál es la pendiente de la recta?

(b) ¿Cuál es la ecuación de la recta?

(c) Use la ecuación para encontrar la temperatura Fahrenheit que corresponde a 20 °C.

(d) ¿Qué temperatura tiene el mismo número de grados en las escalas Celsius y Fahrenheit?

30. Usted maneja a una velocidad constante de Chicago a Detroit y recorre una distancia de 275 millas. Aproximadamente a 120 millas de Chicago pasa por Kalamazoo, Michigan. Dibuje una gráfica de la distancia desde Kalamazoo como función del tiempo.

1.3 RAZONES DE CAMBIO

En la sección anterior vimos que la altura olímpica ganadora del salto con garrocha aumentó aproximadamente a una razón constante de dos pulgadas/año entre 1900 y 1912. De manera similar, el récord mundial de la milla disminuyó más o menos a una razón constante de 0.4 segundos/año. Ahora veremos cómo calcular razones de cambio cuando éstas no son constantes.

[9] Wartes, J., *An Experimental Analysis of Grid Sweep Searching*, Explorer Search and Rescue, Región Oeste, 1974.
[10] Recording Industry Association of America, *The World Almanac 2001*, p. 313.
[11] Rosenzweig, M. L., *Species Diversity in Space and Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, p. 292.
[12] "Investigating the Next Silent Spring", en *US News and World Report*, 11 de marzo de 1996, pp. 50-52.

Ejemplo 1 La tabla 1.8 muestra la altura de salto con garrocha que obtuvo el récord olímpico en las décadas de 1960 y 1980. Encuentre la razón de cambio de la altura ganadora entre 1960 y 1968, y entre 1980 y 1988. ¿En cuál de estos dos periodos la altura aumentó más rápido que de 1900 a 1912?

Tabla 1.8 *Altura ganadora (aproximada) en el salto de garrocha olímpico masculino*

Año	1960	1964	1968	···	1980	1984	1988
Altura (pulgadas)	185	201	212	···	227.5	226	237

Solución De 1900 a 1912 la altura aumentó dos pulgadas/año. Para comparar las décadas de 1960 y 1980 calculamos

$$\frac{\text{Razón promedio de cambio de altura}}{\text{1960 a 1968}} = \frac{\text{Cambio en la altura}}{\text{Cambio en el tiempo}} = \frac{212 - 185}{1968 - 1960} = 4.2 \text{ pulgadas/año}$$

$$\frac{\text{Razón promedio de cambio de altura}}{\text{1960 a 1968}} = \frac{\text{Cambio en la altura}}{\text{Cambio en el tiempo}} = \frac{237 - 227.5}{1988 - 1980} = 2.375 \text{ pulgadas/año}$$

Por tanto, la altura aumentaba más rápidamente durante la década de 1960 que de 1900 a 1912. En la década de 1980 la altura aumentaba un poco más rápido que de 1900 a 1912.

En el ejemplo 1 la función no tiene una razón de cambio constante (no es lineal). Sin embargo, podemos calcular una *razón promedio de cambio* en cualquier intervalo. La palabra promedio se usa debido a que la razón de cambio puede variar dentro del intervalo. Se tiene la siguiente fórmula general.

> Si y es una función de t, tal que $y = f(t)$, entonces
>
> $$\frac{\textbf{Razón promedio de cambio de } y}{\text{entre } t = a \text{ y } t = b} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
>
> Las unidades de la razón promedio de cambio de una función son unidades de y por unidad de t.

La razón promedio de cambio de una función lineal es la pendiente, y una función es lineal si la razón de cambio es la misma en todos los intervalos.

Ejemplo 2 Usando la figura 1.25 calcule la razón promedio de cambio del número de granjas[13] en Estados Unidos entre 1950 y 1970.

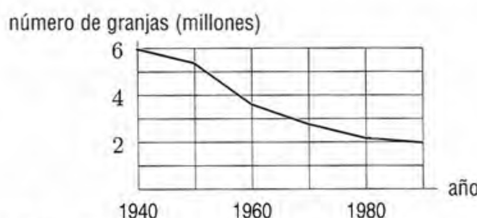


Figura 1.25. Número de granjas en Estados Unidos (en millones).

Solución La figura 1.25 muestra que el número, N, de granjas en Estados Unidos era de aproximadamente 5.4 millones en 1950 y de más o menos 2.8 millones en 1970. Si el tiempo, t, está en años, tenemos

$$\text{Razón promedio de cambio} = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{2.8 - 5.4}{1970 - 1950} = -0.13 \text{ millones de granjas por año.}$$

La razón promedio de cambio es negativa porque el número de granjas está disminuyendo. Durante este periodo el número de granjas disminuyó a una razón promedio de 0.13 millones, es decir, 130,000 granjas por año.

[13]*The World Almanac*, Funk y Wagnalls, Nueva Jersey, 1995, p. 135.

Funciones crecientes y decrecientes

Como la razón de cambio del récord de altura que ganó en salto con garrocha es positiva, sabemos que la altura está aumentando. La razón de cambio del número de granjas es negativa, por lo que el número de granjas está disminuyendo. Véase la figura 1.26. En general:

> Una función f es **creciente** si los valores de $f(x)$ aumentan a medida que x aumenta.
> Una función f es **decreciente** si los valores de $f(x)$ decrecen a medida que x aumenta.
>
> La gráfica de una función *creciente* sube a medida que nos movemos de izquierda a derecha.
> La gráfica de una función *decreciente* baja a medida que nos movemos de izquierda a derecha.



Figura 1.26. Funciones crecientes y decrecientes.

Hemos visto cómo un récord olímpico y el número de granjas cambian en el tiempo. En el siguiente ejemplo analizaremos la razón de cambio respecto a una cantidad diferente al tiempo.

Ejemplo 3 Los altos niveles de PCB (bifenilo policlorado, un contaminante industrial) en el ambiente afectan a los huevos de las hembras del pelícano. La tabla 1.9 muestra que conforme aumenta la concentración de PCB en los cascarones de huevo disminuye el grosor, lo cual aumenta la probabilidad que los huevos se rompan.[14]

Encuentre la razón promedio de cambio en el grosor del cascarón a medida que la concentración de PCB cambia de 87 partes por millón a 452 partes por millón. Indique las unidades y expliqué por qué su respuesta fue negativa.

Tabla 1.9 *Grosor de los cascarones de huevo de hembras del pelícano, y concentración de PCB en los cascarones*

Concentración, c, en partes por millón (ppm)	87	147	204	289	356	452
Grosor, h, en milímetros (mm)	0.44	0.39	0.28	0.23	0.22	0.14

Solución Puesto que estamos buscando la razón promedio de cambio del grosor respecto a un cambio en la concentración de PCB, tenemos

$$\text{Razón promedio de cambio en el grosor} = \frac{\text{Cambio en el grosor}}{\text{Cambio en el nivel de PCB}} = \frac{\Delta h}{\Delta c} = \frac{0.14 - 0.44}{452 - 87} = -0.00082\frac{\text{mm}}{\text{ppm}}.$$

Las unidades son unidades del grosor (mm) en unidades de concentración de PCB (ppm), o milímetros sobre partes por millón. La razón promedio de cambio es negativa debido a que el grosor del cascarón disminuye conforme la concentración de PCB aumenta. El grosor de los huevos de la hembra pelícano disminuye en un promedio de 0.00082 mm por millón adicional del PCB en el cascarón.

---

[14]Risebrough, R. W., "Effects of environmental pollutants upon animals other than man", en *Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical and Statistics*, vol. VI, University of California Press, Berkeley, 1972, pp. 443-463.

Visualización de la razón de cambio

Para una función $y = f(x)$ el cambio en el valor de la función entre $x = a$ y $x = c$ es $\Delta y = f(c) - f(a)$. Como Δy es una diferencia de dos valores de y, está representada por la distancia vertical en la figura 1.27. La razón promedio de cambio de f entre $x = a$ y $x = c$ está representada por la pendiente de la recta que une los puntos A y C en la figura 1.28. Esta recta se llama *recta secante* entre $x = a$ y $x = c$.

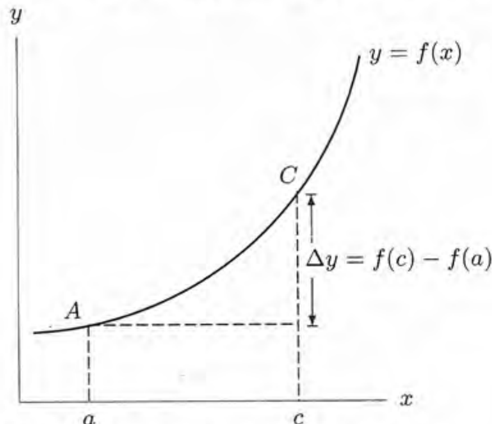


Figura 1.27. El cambio en una función está representado por una distancia vertical.

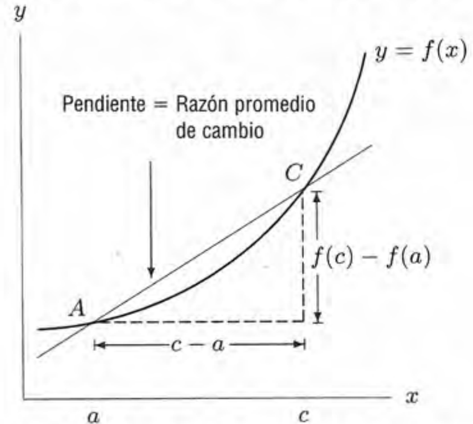


Figura 1.28. La razón promedio de cambio está representada por la pendiente de la recta.

Ejemplo 4 **(a)** Encuentre la razón promedio de cambio de $y = f(x) = \sqrt{x}$ entre $x = 1$ y $x = 4$.

(b) Trace la gráfica de $f(x)$ y represente esta razón promedio de cambio como la pendiente de una recta.

(c) ¿Cuál es mayor, la razón promedio de cambio de la función entre $x = 1$ y $x = 4$, o la razón promedio de cambio entre $x = 4$ y $x = 5$? ¿Qué nos indica esto en la gráfica de la función?

Solución **(a)** Puesto que $f(1) = \sqrt{1}$ y $f(4) = \sqrt{4} = 2$, entre $x = 1$ y $x = 4$, tenemos que

$$\text{Razón promedio de cambio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3}.$$

(b) La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ se muestra en la figura 1.29. La razón promedio de cambio de f entre 1 y 4 es la pendiente de la recta secante entre $x = 1$ y $x = 4$.

(c) Como la recta secante entre $x = 1$ y $x = 4$ tiene mayor pendiente que la recta secante entre $x = 4$ y $x = 5$, la razón promedio de cambio entre $x = 1$ y $x = 4$ es mayor que la razón de cambio entre $x = 4$ y $x = 5$. La razón de cambio es decreciente. Esto nos indica que la gráfica de esta función está curvada hacia abajo.

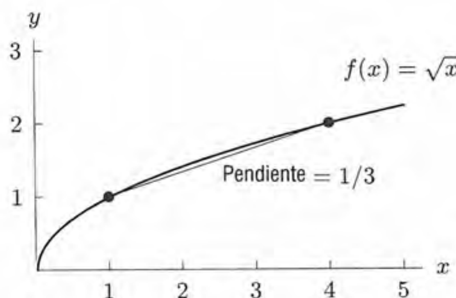


Figura 1.29. Razón promedio de cambio = pendiente de la recta secante.

Concavidad

La figura 1.29 muestra una gráfica que está curvada hacia abajo debido a que la razón de cambio es decreciente. La gráfica de la figura 1.27 está curvada hacia arriba porque la razón de cambio de la función es creciente. Hacemos las siguientes definiciones.

> La gráfica de una función es **cóncava hacia arriba** si está curvada hacia arriba a medida que nos movemos de izquierda a derecha; la gráfica es **cóncava hacia abajo** si está curvada hacia abajo (véase la figura 1.30). Una recta no es cóncava hacia arriba ni cóncava hacia abajo.



Figura 1.30. Concavidad de una gráfica.

Ejemplo 5 Empleando la figura 1.31 determine los intervalos en los que: **(a)** la función es creciente o decreciente, **(b)** la gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

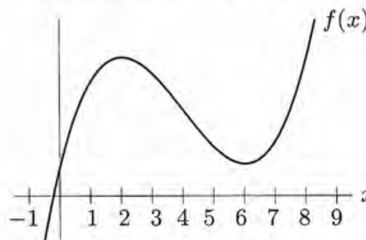


Figura 1.31.

Solución **(a)** La gráfica sugiere que la función es creciente para $x < 2$ y para $x > 6$. La curva es decreciente para $2 < x < 6$.

(b) La curva es cóncava hacia abajo a la izquierda y cóncava hacia arriba a la derecha. Es difícil decir exactamente dónde cambia de concavidad la curva, aunque parece que sucede en $x = 4$. Aproximadamente, la curva es cóncava hacia abajo para $x < 4$ y cóncava hacia arriba para $x > 4$.

Ejemplo 6 A partir de los siguientes valores de $f(t)$, ¿cree usted que f es creciente o decreciente? ¿Opina que la curva es cóncava hacia arriba, o cóncava hacia abajo?

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$	12.6	13.1	14.1	16.2	20.0	29.6	42.7

Solución Como los valores dados de $f(t)$ aumentan conforme t aumenta, f es creciente. A medida que leemos de izquierda a derecha, el cambio en $f(t)$ es pequeño al inicio, y cada vez aumenta (para un cambio constante en t), por lo que la curva asciende más rápidamente. Por tanto, la curva es cóncava hacia arriba. Además, trace la gráfica de los puntos y observe que una curva que pasa por éstos se arquea hacia arriba.

Distancia, velocidad y aceleración

Se lanza hacia arriba una toronja. La altura de la toronja sobre el suelo aumenta primero y después disminuye. Véase la tabla 1.10.

Tabla 1.10 *Altura,* y, *de la toronja sobre el suelo* t *segundos después de que es lanzada*

t (segundos)	0	1	2	3	4	5	6
y (pies)	6	90	142	162	150	106	30

Ejemplo 7 Encuentre el cambio y la razón promedio de cambio de la altura de la toronja durante los primeros tres segundos. Indique las unidades e interprete sus respuestas.

Solución El cambio en la altura durante los tres primeros segundos es $\Delta y = 162 - 6 = 156$ pies. Esto significa que la toronja se eleva un total de 156 pies durante los primeros tres segundos. La razón promedio de cambio durante este intervalo de tres segundos es $156/3 = 52$ pies/segundo. Durante los tres primeros segundos la toronja se eleva a una tasa promedio de 52 pies/segundo.

La rapidez promedio de cambio de la altura respecto al tiempo es la *velocidad*. Usted puede reconocer las unidades (pies por segundo) como unidades de velocidad.

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{Cambio en la distancia}}{\text{Cambio en el tiempo}} = \text{Razón promedio de cambio de la distancia respecto al tiempo.}$$

Existe una diferencia entre *velocidad* y *rapidez*. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta. Si consideramos a una dirección como positiva, la velocidad es positiva si el objeto se mueve en dicha dirección, y negativa si se mueve en la dirección opuesta. En el caso de la toronja, hacia arriba es positiva y hacia abajo, negativa. La rapidez es la magnitud de la velocidad, por lo que siempre es positiva o cero.

Ejemplo 8 Encuentre la velocidad promedio de la toronja en el intervalo que va de $t = 4$ a $t = 6$. Explique el signo de su respuesta.

Solución Como la altura es $y = 150$ pies en $t = 4$ y $y = 30$ pies en $t = 6$, se tiene

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{Cambio en distancia}}{\text{Cambio en tiempo}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{30 - 150}{6 - 4} = -60 \text{ pies/segundo}$$

El signo negativo significa que la altura está disminuyendo y que la toronja se mueve hacia abajo.

Ejemplo 9 Un automóvil circula por un camino recto. Su distancia desde que salió de la casa en el tiempo t se muestra en la figura 1.32. ¿La velocidad promedio del automóvil es mayor durante la primera hora, o durante la segunda hora?

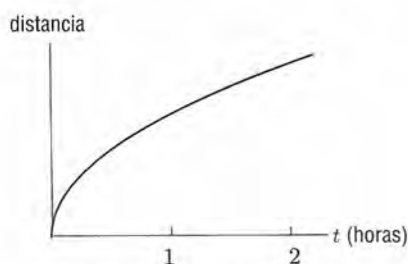


Figura 1.32. Distancia del automóvil desde la casa.

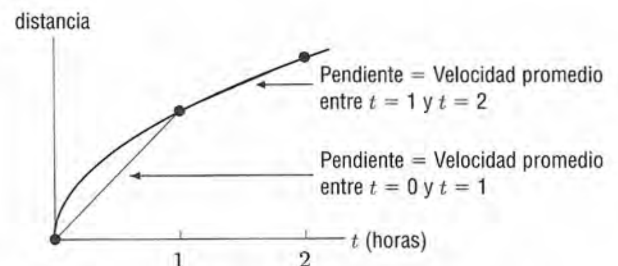
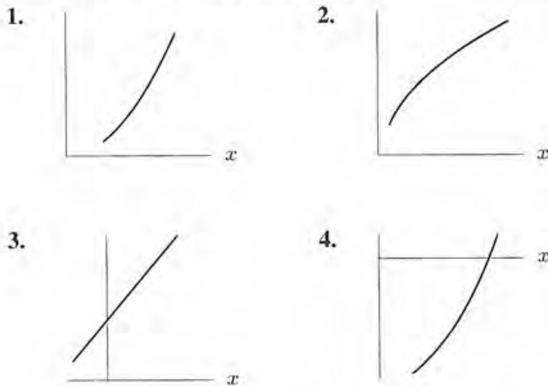


Figura 1.33. Velocidades promedio del automóvil.

Solución La velocidad promedio está representada por la pendiente de una recta secante. La figura 1.33 muestra que la recta secante entre $t = 0$ y $t = 1$ tiene una pendiente mayor que la recta secante entre $t = 1$ y $t = 2$. Por tanto, la velocidad promedio es mayor durante la primera hora.

Problemas para la sección 1.3

Para los problemas del 1 al 4 decida si la curva es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo o ninguna.



5. Trace la gráfica de una función $f(x)$ que sea creciente en todos los puntos, cóncava hacia arriba para las x negativas y cóncava hacia abajo para las x positivas.

6. La tabla 1.11 indica los valores de una función $w = f(t)$. ¿Esta función es creciente o decreciente? ¿La gráfica de esta función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?

Tabla 1.11

t	0	4	8	12	16	20	24
w	100	58	32	24	20	18	17

7. Identifique los intervalos de x en los que la función graficada en la figura 1.34 es:
   - **(a)** Creciente y cóncava hacia arriba.
   - **(b)** Creciente y cóncava hacia abajo.
   - **(c)** Decreciente y cóncava hacia arriba.
   - **(d)** Decreciente y cóncava hacia abajo.

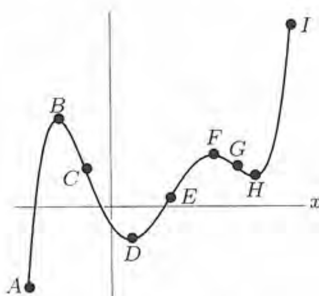


Figura 1.34.

8. La pesca marina total mundial[15] de pescado, en toneladas, fue de 17 millones en 1950 y de 91 millones en 1995. ¿Cuál fue la razón promedio de cambio de la pesca marina durante este periodo? Señale las unidades e interprete su respuesta.

9. La figura 1.35 muestra el valor total de las exportaciones mundiales (artículos comerciados internacionalmente), en miles de millones de dólares.[16]
   - **(a)** ¿El valor de las exportaciones fue mayor en 1990 o en 1960? ¿Aproximadamente cuánto?
   - **(b)** Calcule la razón promedio de cambio entre 1960 y 1990. Indique las unidades e interprete su respuesta en términos del valor de las exportaciones mundiales.

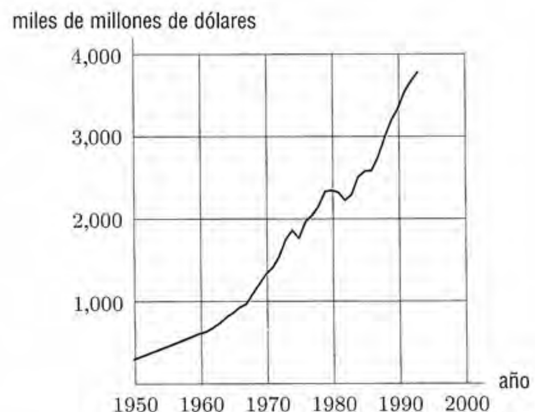


Figura 1.35.

10. La tabla 1.12 muestra la producción mundial de bicicletas.[17]
    - **(a)** Encuentre el cambio en la producción de bicicletas entre 1950 y 1990. Dé las unidades.
    - **(b)** Encuentre la razón promedio de cambio en la producción de bicicletas entre 1950 y 1990. Indique las unidades e interprete su respuesta en términos de la producción de bicicletas.

Tabla 1.12 *Producción mundial de bicicletas, en millones*

Año	1950	1960	1970	1980	1990	1993
Bicicletas	11	20	36	62	90	108

11. ¿Usted espera que la razón promedio de cambio (en unidades por año) de cada uno de los siguientes casos sea positiva o negativa? Explique su razonamiento.
    - **(a)** Número de acres de bosques tropicales en el mundo.
    - **(b)** Población del mundo.
    - **(c)** Número de casos de polio cada año en Estados Unidos, desde 1950.
    - **(d)** Altura de una duna de arena que está siendo erosionada.
    - **(e)** Costo de vida en Estados Unidos.

---

[15]*Time magazine*, 11 de agosto de 1997, p. 67.
[16]Lester R. Brown, *et al.*, *Vital Signs 1994*, W. W. Norton, Nueva York, 1994, p. 77.
[17]Lester R. Brown, *et al.*, *Vital Signs 1994*, W. W. Norton, Nueva York, 1994, p. 87.

12. La tabla 1.13 muestra la cantidad total gastada en productos de tabaco en Estados Unidos.
   (a) ¿Cuál es la razón promedio de cambio en la cantidad gastada en productos de tabaco entre 1987 y 1993? Dé las unidades e interprete su respuesta en términos del dinero gastado en productos de tabaco.
   (b) Durante este periodo de seis años, ¿existe algún intervalo durante el cual la razón promedio de cambio haya sido negativa? Si fue así, ¿cuándo ocurrió?

Tabla 1.13 *Gasto en tabaco en miles de millones de dólares*

Año	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Gasto	35.6	36.2	40.5	43.4	45.4	50.9	50.5

13. Encuentre la razón promedio de cambio de $f(x) = 2x^2$ entre $x = 1$ y $x = 3$.

14. La tabla 1.14 señala la ganancia neta de "The Gap, Inc.", que opera aproximadamente 2,000 tiendas de ropa.[18]
   (a) Encuentre el cambio en la ganancia neta entre 1993 y 1996.
   (b) Encuentre la razón promedio de cambio en la ganancia neta entre 1993 y 1996. Señale las unidades e interprete su respuesta.
   (c) De 1990 a 1997, ¿hubo algún intervalo de un año durante el cual la razón promedio de cambio haya sido negativa? Si fue así, ¿cuándo ocurrió?

Tabla 1.14 *Diferencias de ganancias netas, en millones de dólares*

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Utilidad	144.5	229.9	210.7	258.4	350.2	354.0	452.9

15. La figura 1.11 de la página 5 muestra la cantidad de nicotina $N = f(t)$, en mg, en el torrente sanguíneo de una persona como una función del tiempo, t, en horas, desde el último cigarrillo.
   (a) ¿La razón promedio de cambio en el nivel de nicotina es positiva o negativa? Explique su respuesta.
   (b) Encuentre la razón promedio de cambio en el nivel de nicotina entre $t = 0$ y $t = 3$. Dé las unidades e interprete su respuesta en términos de nicotina.

16. Encuentre la razón promedio de cambio de $f(x) = 3x^2 + 4$ entre $x = -2$ y $x = 1$. Ejemplifique gráficamente su respuesta.

17. Cuando se realiza un depósito de $1,000 en una cuenta que paga un interés de 8%, compuesto anualmente, el saldo, $B, en la cuenta después de t años está dado por $B = 1{,}000(1.08)^t$. Encuentre la razón promedio de cambio en el saldo en el intervalo $t = 0$ a $t = 5$. Indique las unidades e interprete su respuesta en términos del saldo en la cuenta.

18. La figura 1.36 muestra la longitud, L, en centímetros, de un esturión (un pez) como una función del tiempo, t, en años.[19]
   (a) ¿La función es creciente o decreciente? ¿La gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?
   (b) Calcule la tasa promedio de crecimiento de los esturiones entre $t = 5$ y $t = 15$. Dé las unidades e interprete su respuesta en términos del esturión.

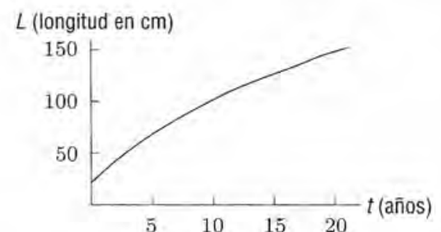


Figura 1.36.

19. La tabla 1.15 muestra la fuerza laboral total en Estados Unidos, L. Encuentre la razón promedio de cambio entre 1930 y 1990; entre 1930 y 1950; entre 1950 y 1970. Indique las unidades e interprete sus respuestas en términos de la fuerza laboral.[20]

Tabla 1.15 *Fuerza laboral en Estados Unidos, en miles de trabajadores*

Año	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
L	29,424	32,376	45,222	54,234	70,920	90,564	103,905

20. El número de hogares de Estados Unidos que tienen televisión por cable fue de 12,168,450 en 1977 y de 65,929,420 en 1997. Calcule la razón promedio de cambio en el número de hogares de Estados Unidos con televisión por cable durante este periodo de 20 años. Indique las unidades e interprete su respuesta.

21. La tabla 1.16 indica las ventas, S, de la Corporación Intel, productora importante de circuitos integrados.[21]
   (a) Encuentre el cambio en las ventas entre 1991 y 1995.
   (b) Encuentre la razón promedio de cambio de las ventas entre 1991 y 1995. Dé las unidades e interprete su respuesta.
   (c) Si la razón promedio de cambio continúa a la misma tasa entre 1995 y 1997, ¿en qué año las ventas serán por primera vez de $40,000 millones?

Tabla 1.16 *Ventas de Intel, en millones de dólares*

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
S	3,921	4,779	5,844	8,782	11,521	16,202	20,847	25,070

22. En la figura 1.37 se muestra el volumen de agua en un estanque durante un periodo de 20 semanas.
   (a) ¿La razón promedio de cambio del volumen es positiva o negativa en los siguientes intervalos?

   (i) $t = 0$ y $t = 5$ (ii) $t = 0$ y $t = 10$
   (iii) $t = 0$ y $t = 15$ (iv) $t = 0$ y $t = 20$

[18] Value Line Publishing, Inc., *Value Line Investment Survey*, Nueva York, 21 de noviembre de 1997, p. 1700.
[19] Von Bertalanffy, L., *General System Theory*, Braziler, Nueva York, 1968, p. 177.
[20] Funk and Wagnalls, *The World Almanac and Book of Facts 1995*, Nueva Jersey, 1994, p. 154.
[21] Value Line Publishing, Inc., *Value Line Investment Survey*, Nueva York, 23 de enero de 1998, p. 1060.

(b) ¿Durante cuál de los siguientes intervalos la razón promedio de cambio fue mayor?

(i) $0 \leq t \leq 5$ o $0 \leq t \leq 10$

(ii) $0 \leq t \leq 10$ o $0 \leq t \leq 20$

(c) Calcule la razón promedio de cambio entre $t = 0$ y $t = 10$. Interprete su respuesta en términos del agua.

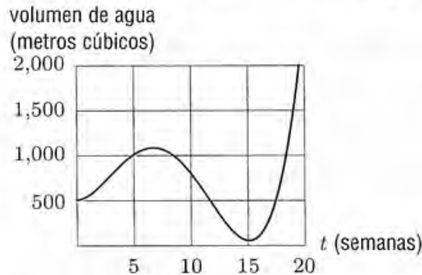


Figura 1.37.

23. La tabla 1.17 muestra el número de juegos de la División I de la NCAA en baloncesto masculino.[22]

(a) Calcule la razón promedio de cambio en el número de juegos de 1983 a 1989. Indique las unidades.

(b) Encuentre el incremento anual en el número de juegos por cada año, de 1983 a 1989. (Su respuesta debe constar de seis números.)

(c) Demuestre que la razón promedio de cambio calculada en el inciso (a) es el promedio de los seis cambios anuales hallados en el inciso (b).

Tabla 1.17 *División I de baloncesto de la NCAA*

Año	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
Juegos	7,957	8,029	8,269	8,360	8,580	8,587	8,677

24. Un automóvil se pone en marcha con lentitud y después acelera. De modo eventual disminuye la velocidad y se detiene. Grafique la distancia que ha recorrido el automóvil con respecto al tiempo.

25. Dibuje una gráfica de la distancia respecto al tiempo con las siguientes particularidades: la velocidad promedio siempre es positiva y la velocidad promedio de la primera parte del recorrido es menor que la velocidad promedio de la segunda parte del recorrido.

26. Cuando se le hace publicidad a un producto nuevo cada vez más gente lo prueba. Sin embargo, la tasa a la cual la gente lo prueba por primera vez, disminuye conforme pasa el tiempo.

(a) Realice la gráfica del número total de personas que han probado dicho producto con respecto al tiempo.

(b) ¿Qué sabe usted sobre la concavidad de la gráfica?

27. La figura 1.38 muestra la posición de un objeto en el tiempo t.

(a) Trace una recta sobre la gráfica cuya pendiente represente la velocidad promedio entre $t = 2$ y $t = 8$.

(b) ¿La velocidad promedio es mayor entre $t = 0$ y $t = 3$ o entre $t = 3$ y $t = 6$?

(c) ¿La velocidad promedio es positiva o negativa entre $t = 6$ y $t = 9$?

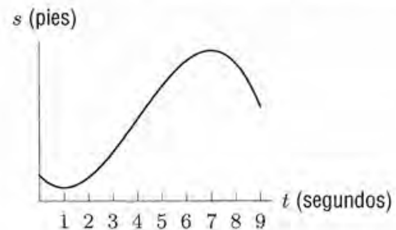


Figura 1.38.

28. En un experimento, se incita a un lagarto para que corra lo más rápido posible. La figura 1.39 muestra la distancia recorrida en metros como una función del tiempo en segundos.[23]

(a) Si el lagarto corriera cada vez más rápido, ¿cuál sería la concavidad de la gráfica? ¿Esto corresponde con lo que usted ve?

(b) Calcule la velocidad promedio del lagarto durante este experimento de 0.8 segundos.

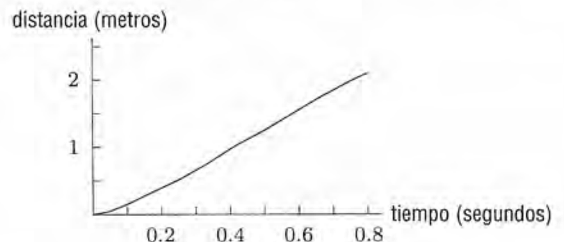


Figura 1.39.

29. Dibuje gráficas razonables para lo siguiente. Preste particular atención a la concavidad de las gráficas.

(a) El ingreso total de un negocio de renta de automóviles graficado respecto a la cantidad que gasta en publicidad.

(b) La temperatura de una taza de café caliente que está en una habitación, graficada como una función del tiempo.

30. Cada una de las funciones g, h, k en la tabla 1.18 es creciente, pero cada una aumenta en forma diferente. ¿Qué gráfica de la figura 1.40 se relaciona mejor con cada función?

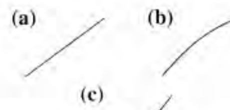


Figura 1.40.

Tabla 1.18

t	$g(t)$	$h(t)$	$k(t)$
1	23	10	2.2
2	24	20	2.5
3	26	29	2.8
4	29	37	3.1
5	33	44	3.4
6	38	50	3.7

[22]Pharos Books, *The World Almanac and Book of Facts 1992*, Nueva York, 1991, p. 863.

[23]Huey, R. B. y P. E. Hertz, "Effects of Body Size and Slope on the Acceleration of a Lizard", *J. Exp. Biol.*, volumen 110, 1984, pp. 113-123.

1.4 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES EN LA ECONOMÍA

En esta sección examinaremos algunas funciones de interés para aquellos que toman decisiones en una empresa o industria.

Función costo

La **función costo**, $C(q)$, da el costo total de producir una cantidad q de algún producto.

¿Qué clase de función espera usted que sea C? Entre más productos sean fabricados, más alto será el costo total, de modo que C es una función creciente. Los costos de producción pueden dividirse en dos partes: los *costos fijos*, en los que se incurre incluso si no se produce cosa alguna, y los *costos variables*, que dependen de cuántas unidades se produzcan. En esta sección analizaremos solamente las funciones lineales. Las funciones no lineales de costo se examinarán en la sección 2.5

Un ejemplo: costos de producción

Supongamos que hay una empresa que fabrica radios. La fábrica y la maquinaria necesaria para comenzar la producción son los costos fijos, en los que se incurre incluso si no se produce ningún radio. Los costos de mano de obra y materias primas son costos variables, puesto que estas cantidades dependen de cuántos radios se fabriquen. Los costos fijos para esta empresa son de \$24,000 y los costos variables, de \$7 por radio. Entonces

$$\begin{aligned}\text{Costos totales para la empresa} &= \text{Costos fijos} + \text{Costos variables}\\ &= 24{,}000 + 7 \cdot \text{número de radios,}\end{aligned}$$

por tanto, si q es el número de radios producidos,

$$C(q) = 24{,}000 + 7q.$$

Ésta es la ecuación de una recta con pendiente 7 y una intersección con el eje vertical de 24,000.

Ejemplo 1 Trace la gráfica de la función de costo $C(q) = 24{,}000 + 7q$. Sobre la gráfica, marque los costos fijos y el costo variable por unidad.

Solución La gráfica de la función de costo es la recta de la figura 1.41. Los costos fijos están representados por la intersección con el eje vertical de 24,000. El costo variable por unidad está representado por la pendiente de 7, que es el cambio en costo correspondiente al cambio de unidad en producción.

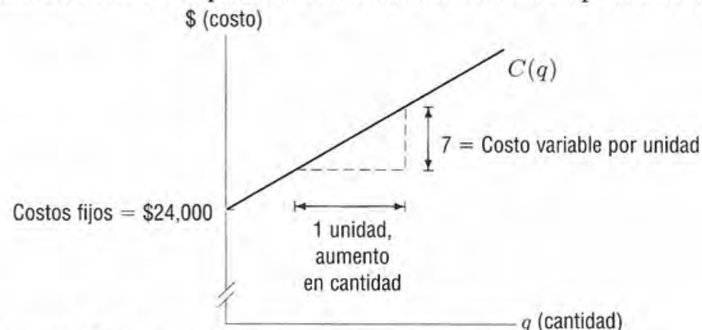


Figura 1.41. Función de costos para la empresa fabricante de radios.

Si $C(q)$ es una función lineal de costo,

- Los costos fijos están representados por la ordenada en el origen.
- Los costos variables por unidad están representados por la pendiente.

Ejemplo 2 En cada caso, trace una gráfica de una función lineal de costo que satisfaga las siguientes condiciones:

(a) Los costos fijos son grandes, pero el costo variable por unidad es pequeño.

(b) No existen costos fijos, pero los costos variables por unidad son altos.

Solución **(a)** La gráfica es una recta con una ordenada extensa en el origen y una pendiente pequeña. Véase la figura 1.42.

(b) La gráfica es una recta con una ordenada en el origen igual a cero (de modo que la recta pasa por el origen) y una pendiente positiva grande. Véase la figura 1.43. Las figuras 1.42 y 1.43 tienen las mismas escalas.

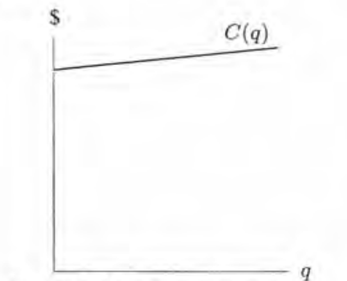


Figura 1.42. Costos fijos grandes, costo variable pequeño por unidad.

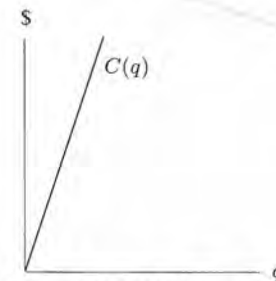


Figura 1.43. No hay costos fijos; elevado costo variable por unidad.

Función de ingreso

> La **función de ingreso**, $I(q)$, da el ingreso total que recibe una empresa por vender una cantidad, q, de algún producto.

Si el artículo se vende a un precio de p por unidad y la cantidad vendida es q, entonces

$$\text{Ingreso} = \text{precio} \bullet \text{cantidad, por lo que } I = pq.$$

Si el precio no depende de la cantidad vendida, entonces p es una constante; la gráfica del ingreso como función de q es una recta que pasa por el origen, con pendiente igual al precio p.

Ejemplo 3 Si los radios se venden a $15 cada uno, trace una gráfica de la función de ingresos del fabricante. Indique el precio de un radio en la gráfica.

Solución Puesto que $I(q) = pq = 15q$, la gráfica de ingreso es una recta que pasa por el origen con una pendiente de 15. Véase la figura 1.44. El precio es la pendiente de la recta.

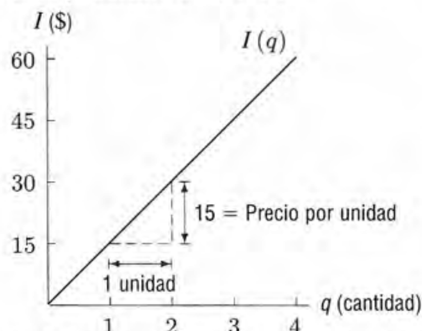


Figura 1.44. Función de ingreso para la empresa fabricante de radios.

Ejemplo 4 Dibuje las gráficas de la función de costos $C(q) = 24{,}000 + 7q$ y la función de ingreso $I(q) = 15q$ en un mismo sistema de coordenadas. ¿Para cuáles valores de q la empresa obtiene ganancias? Explique gráficamente su respuesta.

Solución La empresa obtiene ganancias siempre que los ingresos sean mayores que los costos, de modo que buscamos hallar los valores de q para los cuales la gráfica de $I(q)$ se encuentre arriba de la gráfica de $C(q)$. Véase la figura 1.45.

Encontramos el punto en el cual las gráficas de $I(q)$ y $C(q)$ se cruzan:

$$\begin{aligned} \text{Ingreso} &= \text{Costo} \\ 15q &= 24{,}000 + 7q \\ 8q &= 24{,}000 \\ q &= 3{,}000. \end{aligned}$$

Por tanto, la empresa obtiene ganancias si produce y vende más de 3,000 radios. La empresa pierde dinero si produce y vende menos de 3,000 radios.

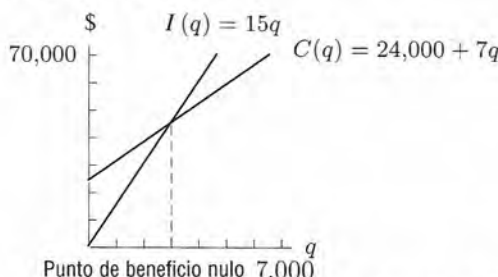


Figura 1.45. Funciones de costo e ingreso para la empresa fabricante de radios. ¿Qué valores de q generan utilidad?

Función de ganancia

Es frecuente que se tomen decisiones considerando la utilidad, usualmente denotada por π[24] para distinguirla del precio, p. Tenemos

Ganancia = ingreso − costo tal que $\pi = I - C$.

El *punto de beneficio nulo* para una empresa es aquel donde la utilidad es cero y el ingreso es igual al costo. El punto de beneficio nulo puede referirse ya sea a una cantidad q en la cual el ingreso es igual al costo, o a un punto en una gráfica.

Ejemplo 5 Encuentre una fórmula para la función de utilidad para el productor de radios. Trace una gráfica de ella y marque el punto de beneficio nulo.

Solución Como $I(q) = 15q$ y $C(q) = 24{,}000 + 7q$, tenemos que

$$\pi(q) = 15q - (24{,}000 + 7q) = -24{,}000 + 8q.$$

Observe que el valor negativo de los costos fijos está representado por la ordenada en el origen y el punto de beneficio nulo es la abscisa en el origen. Véase la figura 1.46.

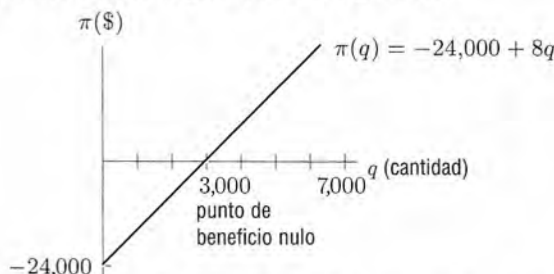


Figura 1.46. Utilidad para el fabricante de radios.

[24]Esta π nada tiene que ver con el área de un círculo y simplemente representa la equivalente griega de la letra "p".

Ejemplo 6 (a) Usando la tabla 1.19 calcule el punto en el que esta empresa no obtiene ganancias ni pérdidas.

(b) Encuentre la ganancia de la empresa si fabrica 1,000 unidades.

(c) ¿A qué precio cree usted que la empresa venda su producto?

Tabla 1.19 *Estimaciones de la empresa sobre costo e ingreso de un producto*

q	500	600	700	800	900	1000	1100
$C(q)$	5,000	5,500	6,000	6,500	7,000	7,500	8,000
$I(q)$	4,000	4,800	5,600	6,400	7,200	8,000	8,800

Solución (a) El punto de beneficio nulo es el valor de q para el cual el ingreso es igual al costo. Como el ingreso es menor al costo en $q = 800$ y el ingreso es mayor al costo en $q = 900$, el punto en el que no se obtienen ganancias ni pérdidas se encuentra entre 800 y 900. Los valores en la tabla indican que este punto es más cercano a 800, porque el costo y el ingreso son más cercanos en este punto. Una estimación razonable para el punto en el que no se obtienen pérdidas ni ganancias es $q = 830$.

(b) Si la empresa fabrica 1,000 unidades, el costo es de \$7,500 y el ingreso de \$8,000, por lo que la ganancia sería de $8{,}000 - 7{,}500 = 500$ dólares.

(c) Con base en los datos anteriores, parece que $I(q) = 8q$. Esto indica que la empresa vende cada producto a \$8.

Costo marginal, ingreso marginal y ganancia marginal

En economía y administración los términos costo marginal, ingreso marginal y ganancia marginal se usan para referirse a la razón de cambio del costo, ingreso y ganancia, respectivamente. El término *marginal* se utiliza para resaltar la razón de cambio como indicador de la forma en que el costo, el ingreso, o la ganancia cambian en respuesta a un cambio unitario (es decir, marginal) de la variable independiente. Por ejemplo, para las funciones costo, ingreso y beneficio del fabricante de radios, el costo marginal es de 7 dólares/unidad (el costo adicional de producir una unidad más es de \$7), el ingreso marginal es de 15 dólares/unidad (el ingreso adicional por vender una unidad más es de \$15) y la utilidad marginal es de 8 dólares/unidad (la utilidad adicional por vender una unidad más es de \$8).

Función de depreciación

Supongamos que la empresa fabricante de radios tiene una máquina que cuesta \$20,000. Los administradores de la empresa planean conservar la máquina durante 10 años y después venderla a \$3,000. Decimos que el valor de la máquina *se deprecia* de su valor actual de \$20,000 a un valor de reventa de \$3,000 dentro de 10 años. La fórmula de depreciación da el valor, $V(t)$, de la máquina como función del número de años, t, a partir del año en que la máquina fue adquirida. Suponemos que el valor de la máquina se deprecia linealmente.

El valor de la máquina cuando es nueva ($t = 0$) es de \$20,000, por lo cual $V(0) = 20{,}000$. El valor de reventa en el tiempo $t = 10$ es de \$3,000, de ahí que $V(10) = 3{,}000$. Tenemos

$$\text{Pendiente} = m = \frac{3{,}000 - 20{,}000}{10 - 0} = \frac{-17{,}000}{10} = -17{,}000.$$

Esta pendiente nos dice que el valor de la máquina disminuye a razón de \$1,700 por año. Puesto que $V(0) = 20{,}000$, la ordenada en el origen es 20,000, por lo cual

$$V(t) = 20{,}000 - 1{,}700t.$$

Curvas de oferta y demanda

La cantidad, q, de un artículo que se fabrica y vende depende de su precio, p. Suele suponerse que a medida que aumenta el precio, los fabricantes están dispuestos a ofrecer más del producto, y cae la demanda del consumidor. Como fabricantes y consumidores reaccionan de forma distinta a cambios en el precio, hay dos curvas que relacionan p y q.

> La **curva de oferta**, para un artículo dado, representa la forma en que la cantidad, q, del artículo que los fabricantes están dispuestos a hacer por unidad de tiempo y dependiendo del precio, p, al cual se pudiera vender el artículo.
>
> La **curva de demanda** representa la forma en que la cantidad, q, de un artículo que demandan los consumidores por unidad de tiempo y dependiendo del precio, p, del artículo.

Con frecuencia, los economistas consideran las cantidades ofrecidas y demandadas como funciones del precio. Sin embargo, por razones históricas, los economistas ponen el precio (la variable independiente) sobre el eje vertical y la cantidad (la variable dependiente) sobre el eje horizontal. (La razón de este hecho es que los economistas originalmente tomaron al precio como la variable dependiente y lo pusieron en el eje vertical. Posteriormente, cuando esta concepción cambió, los ejes no cambiaron.) Por tanto, las curvas de oferta y demanda se asemejan a las que se muestran en la figura 1.47.

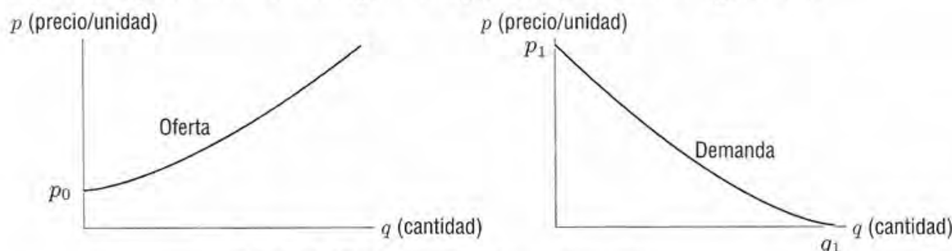


Figura 1.47. Curvas de oferta y demanda.

Ejemplo 7 ¿Cuál es el significado económico de los precios p_0 y p_1 y la cantidad q_1 de la figura 1.47?

Solución El eje vertical corresponde a una cantidad de cero. Como el precio p_0 es la intersección con el eje vertical de la curva de demanda, p_0 es el precio al cual la cantidad ofrecida es cero, es decir, a menos que el precio sea mayor que p_0, los fabricantes no producirán nada. El precio p_1 es la ordenada en el origen de la curva de demanda, por lo cual corresponde al precio en el cual la cantidad demandada es cero. En otras palabras, a menos que el precio sea menor que p_1 los consumidores no comprarán ningún producto.

El eje horizontal corresponde a un precio de cero, de modo que la cantidad q_1 de la curva de demanda es la cantidad que sería demandada si el precio fuera cero, o la cantidad que podría ser regalada si el artículo fuera gratuito.

Precio y cantidad de equilibrio

Si trazamos las curvas de oferta y de demanda sobre el mismo sistema de coordenadas, como en la figura 1.48, las curvas se cruzan en el *punto de equilibrio*. Los valores p^* y q^* en este punto reciben el nombre de *precio de equilibrio* y *cantidad de equilibrio*, respectivamente. Se supone que el mercado se estabiliza de manera natural a este punto de equilibrio (véase el problema 23).

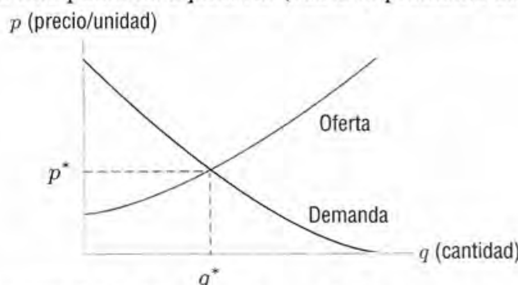


Figura 1.48. El precio y la cantidad de equilibrio.

Ejemplo 8 Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio si

$$\text{oferta} = S(p) = 3p - 50 \text{ y demanda} = D(p) = 100 - 2p.$$

Solución Para hallar el precio y la cantidad de equilibrio, encontramos el punto en el que

$$\begin{aligned} \text{Oferta} &= \text{Demanda} \\ 3p - 50 &= 100 - 2p \\ 5p &= 150 \\ p &= 30. \end{aligned}$$

El precio de equilibrio es \$30. Para hallar la cantidad de equilibrio utilizamos ya sea la curva de demanda o la curva de oferta. Al precio de \$30, la cantidad producida es $100 - 2(30) = 100 - 60 = 40$ artículos. La cantidad de equilibrio es 40 artículos. En la figura 1.49 las curvas de demanda y de oferta se cruzan en $p^* = 30$ y $q^* = 40$.

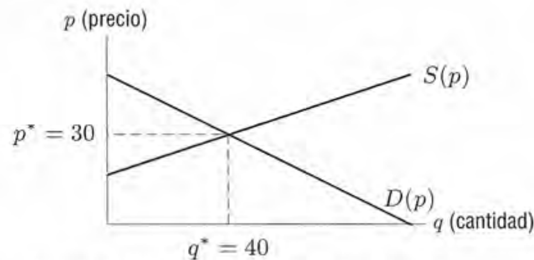


Figura 1.49. Equilibrio: $p^* = 30$, $q^* = 40$.

Efecto de los impuestos en el equilibrio

Al igual que en el ejemplo 8, suponga que las curvas de demanda y oferta de un producto son:

$$S(p) = 3p - 50 \quad \text{y} \quad D(p) = 100 - 2p.$$

¿Qué efecto tienen los impuestos sobre el precio y la cantidad de equilibrio para este producto? ¿Quién (el productor o el consumidor) terminará pagando el impuesto? Consideramos dos tipos de impuestos.[25] Un *impuesto específico* es una cantidad fija por unidad de un producto vendido, sin importar su precio de venta. Éste es el caso de productos tales como gasolina, alcohol y cigarrillos. Un impuesto específico suele aplicarse al productor. El *impuesto al valor* es un porcentaje fijo del precio de venta o factura. Muchas ciudades y estados cobran impuestos al valor en una amplia variedad de productos. Generalmente, el impuesto al valor lo paga el consumidor. Consideremos ahora un impuesto específico; los problemas 27 y 28 consideran un impuesto al valor.

Supongamos que un impuesto específico de \$5 por unidad se aplica al fabricante. Esto significa que un precio de venta de p dólares no produce la misma cantidad ofrecida, ya que los productores sólo reciben $p - 5$ dólares. La cantidad ofrecida depende de $p - 5$, mientras que la cantidad demandada aún depende de p, el precio que pagan los consumidores. Tenemos

$$\begin{aligned} \text{Cantidad demandada} &= D(p) = 100 - 2p \\ \text{Cantidad producida} &= S(p - 5) = 3(p - 5) - 50 \\ &= 3p - 15 - 50 \\ &= 3p - 65. \end{aligned}$$

¿Cuáles son el precio y la cantidad de equilibrio en esta situación? Al precio de equilibrio tenemos

$$\begin{aligned} \text{Demanda} &= \text{Oferta} \\ 100 - 2p &= 3p - 65 \\ 165 &= 5p \\ p &= 33. \end{aligned}$$

El precio de equilibrio ahora es de \$33. En el ejemplo 8 vimos que el precio de equilibrio en un mercado competitivo era de \$30, de modo que el precio de equilibrio aumenta \$3 dólares como resultado del impuesto. Observe que éste es menor que la cantidad del impuesto. El consumidor termina pagando \$3

[25]Adaptado de Barry Bressler, *A Unified Approach to Mathematical Economics*, Harper & Row, Nueva York, 1975, pp. 81-88.

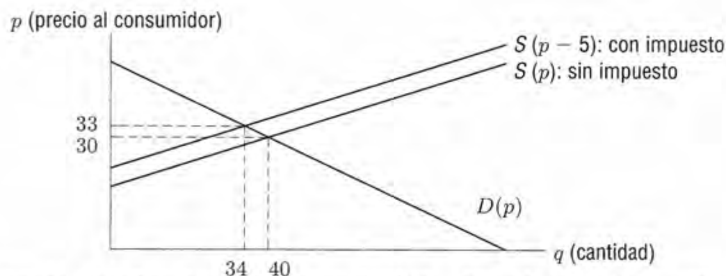


Figura 1.50. El impuesto específico desplaza la curva de oferta, alterando el equilibrio entre precio y cantidad.

más de lo que pagaría si el impuesto no existiera. Sin embargo, el gobierno recibe \$5 por artículo. Por tanto, el productor paga los \$2 restantes del impuesto, y retiene \$28 de la cantidad pagada por el artículo. Por consiguiente, aunque el impuesto se aplica al productor, parte del impuesto es pagado por el consumidor en términos de precios más altos. El costo real del impuesto se divide entre el consumidor y el productor.

Ahora la cantidad de equilibrio es de 34 unidades, ya que la cantidad demandada es $D(33) = 34$. Sin sorpresa alguna, el impuesto ha reducido el número de artículos vendidos. Véase la figura 1.50.

Restricción presupuestal

Un debate actual en el gobierno federal se refiere a la asignación del presupuesto entre gastos de defensa y programas sociales. En general, entre más se gasta en defensa, hay menos dinero para programas sociales y viceversa. Simplifiquemos el ejemplo a armas y mantequilla. Si suponemos que hay un presupuesto constante, demostraremos que la relación entre el número de armas y la cantidad de mantequilla es lineal. Supongamos que hay \$12,000 para gastar y que esta cantidad debe dividirse entre las armas, que cuestan \$400 cada una, y la mantequilla, que cuesta \$2,000 la tonelada. Supongamos también que el número de armas compradas es g y el número de toneladas de mantequilla es b. Entonces, la cantidad de dinero gastada en armas es \$400g y la cantidad gastada en mantequilla es \$2,000b. Suponiendo que todo el dinero se gasta

$$\text{Cantidad gastada en armas} + \text{cantidad gastada en mantequilla} = \$12{,}000$$

o

$$400g + 2{,}000b = 12{,}000$$

Por tanto, al dividir ambos lados de la ecuación entre 400 tenemos,

$$g + 5b = 30.$$

Esta ecuación es la restricción presupuestal. Ésta representa una *función implícitamente definida*, ya que ni g ni b están explícitamente dadas una en términos de la otra. Si despejamos g, obtenemos

$$g = 30 - 5b,$$

la cual es una fórmula explícita para g en términos de b. Del mismo modo, al despejar b obtenemos

$$b = \frac{30 - g}{5} \quad \text{o} \quad b = 6 - 0.2g,$$

que da b como *función explícita* de g. Como las funciones explícitas

$$g = 30 - 5b \quad \text{y} \quad b = 6 - 0.2g$$

son lineales, la gráfica de la restricción presupuestal es una recta. Véase la figura 1.51.

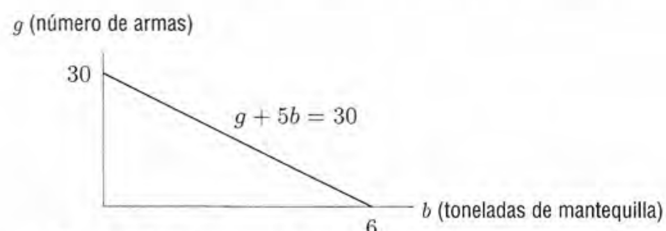


Figura 1.51. Restricción presupuestal.

Problemas para la sección 1.4

1. Un parque de diversiones cobra una cuota de admisión de \$7 por persona, y \$1.50 más por cada juego.

(a) En términos de un visitante, calcule el ingreso total del parque $I(n)$ como función del número de juegos, n, a los que se subió.

(b) Calcule $I(2)$ e $I(8)$ e interprete sus respuestas en términos de cuotas del parque de diversiones.

2. Una empresa tiene una función de costos de $C(q) = 4{,}000 + 2q$ dólares y una función de ingreso de $I(q) = 10q$ dólares.

(a) ¿Cuáles son los costos fijos de la empresa?

(b) ¿Cuál es el costo variable por unidad?

(c) ¿Qué precio cobra la empresa por su producto?

(d) Trace la gráfica de $C(q)$ e $I(q)$ en un mismo sistema de coordenadas y marque el punto en el que no hay pérdidas ni ganancias, q_0. Explique cómo sabe usted cuáles son las ganancias de la empresa si la cantidad producida es mayor de q_0.

(e) Encuentre el punto de beneficio nulo, q_0.

3. En la tabla 1.20 se ilustran valores de una función lineal de costos. ¿Cuáles son los costos fijos y el costo variable por unidad (el costo marginal)? Encuentre una fórmula para la función de costos.

Tabla 1.20

q	0	5	10	15	20
$C(q)$	5,000	5,020	5,040	5,060	5,080

4. **(a)** Calcule los costos fijos y el costo variable por unidad para la función de costos de la figura 1.52

(b) Calcule $C(10)$ e interprételo en términos de costos.

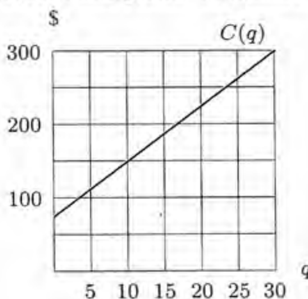


Figura 1.52.

5. La figura 1.53 muestra el costo y el ingreso para una empresa.

(a) Aproximadamente, ¿qué cantidad tiene que producir esta empresa para obtener utilidades?

(b) Calcule la utilidad generada por 600 unidades.

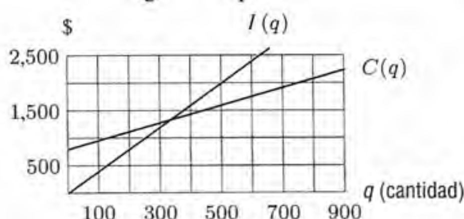


Figura 1.53.

6. **(a)** ¿Cuáles son los costos fijos y el costo variable por unidad para la función de costos de la figura 1.54?

(b) Explique qué le indica sobre los costos el hecho de que $C(100) = 2{,}500$.

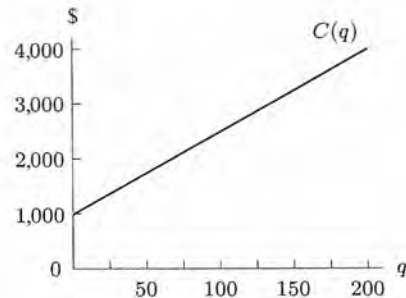


Figura 1.54.

7. En la figura 1.55, que muestra las funciones de costos y de ingreso para un artículo, indique lo siguiente:

(a) Los costos fijos. **(b)** La cantidad de rentabilidad.

(c) Las cantidades a las cuales la empresa.

(i) Obtiene utilidades.

(ii) Pierde dinero.

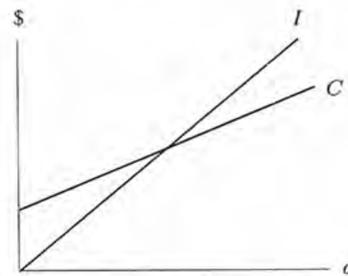


Figura 1.55.

8. Una empresa tiene unas funciones de costos e ingresos, en dólares, dadas por $C(q) = 6{,}000 + 10q$ e $I(q) = 12q$.

(a) Calcule el costo y el ingreso si la empresa produce 500 unidades. ¿La empresa obtiene ganancias? ¿Y si produce 5,000 artículos?

(b) Encuentre el punto de beneficio mutuo e ilústrelo gráficamente.

9. Una empresa que produce rompecabezas tiene costos fijos de \$6,000 y costos variables de \$2 por rompecabezas. La empresa vende cada rompecabezas a \$5.

(a) Encuentre las fórmulas para la función de costo, la función de ingreso y la función de utilidad.

(b) Trace una gráfica de $I(q)$ y $C(q)$ en un mismo sistema de coordenadas. ¿Cuál es el punto en el que no se obtienen utilidades ni pérdidas, q_0, para la empresa?

10. Una empresa que fabrica sillas tipo Adirondack tiene costos fijos de $5,000 y costos variables de $30 por silla. La empresa vende cada silla en $50 cada una.

(a) Encuentre las fórmulas de las funciones de costos y de ingreso.
(b) Calcule el costo marginal y el ingreso marginal.
(c) Trace la gráfica de las funciones de costo y de ingreso en un mismo sistema de coordenadas.
(d) Encuentre el punto de beneficio mutuo.

11. La fabricación de zapatos deportivos tiene un gasto total fijo de $650,000 más costos variables de $20 por par de zapatos. Cada par se vende en $70.

(a) Calcule el costo total, $C(q)$, el ingreso total, $I(q)$, la ganancia total, $\pi(q)$, como función del número de pares de zapatos producidos, q.
(b) Calcule el costo marginal, el ingreso marginal y la utilidad marginal.
(c) ¿Cuántos pares de zapatos deben producirse y venderse para que la empresa obtenga utilidades?

12. **(a)** Dé un ejemplo de una posible empresa que tenga costos fijos nulos (o muy pequeños).
(b) Dé un ejemplo de una posible empresa para la cual el costo variable por unidad sea cero (o muy pequeño).

13. Una empresa de fotocopias tiene dos listas de precios diferentes. La primera lista de precios es de $100 más 3 centavos por copia; la segunda lista de precios es de $200 más 2 centavos por copia.

(a) Para cada lista de precios, calcule el costo total como función del número de copias necesarias.
(b) Determine qué lista de precios es más barata si se necesitan 5,000 copias.
(c) ¿Para qué número de copias cobran ambas listas de precios la misma cantidad?

14. Un robot de $15,000 se deprecia linealmente hasta un valor de cero en 10 años.

(a) Encuentre una fórmula para su valor como función del tiempo.
(b) ¿Cuánto valdrá el robot tres años después de comprarlo?

15. Un tractor de $50,000 tiene un precio de reventa de $10,000 20 años después de adquirido. Suponga que el valor del tractor se deprecia linealmente desde el momento de su compra.

(a) Encuentre una fórmula para el valor del tractor como función del tiempo desde que se adquirió.
(b) Trace la gráfica del valor del tractor respecto al tiempo.
(c) Encuentre las ordenadas y abscisas en el origen, dé unidades e interprételas.

16. Suponga que hay un presupuesto de $1,000 al año para cubrir sus gastos en libros y salidas sociales. Los libros cuestan (en promedio) $40 cada uno y las salidas sociales cuestan (en promedio) $10 cada una. Sea b el número de libros comprados por año y s el número de salidas sociales en el año.

(a) ¿Cuál es la ecuación de su restricción presupuestal?
(b) Trace una gráfica de la restricción presupuestal. (No importa qué variable ponga en cada eje.)
(c) Encuentre las ordenadas y abscisas en el origen y dé una interpretación financiera de cada una.

17. Una empresa tiene un presupuesto total de $500,0000 y lo gasta en materias primas y personal. La empresa utiliza m unidades de materias primas a un costo de $100 por unidad, y contrata r empleados a un costo de $25,000 cada uno.

(a) ¿Cuál es la ecuación de la restricción presupuestal de la empresa?
(b) Despeje m como función de r.
(c) Despeje r como una función de m.

18. Una de las gráficas de la figura 1.56 es una curva de oferta, y la otra es una curva de demanda. ¿Cuál es cuál? Explique cómo tomó su decisión usando lo que sabe acerca del efecto del precio sobre oferta y demanda.

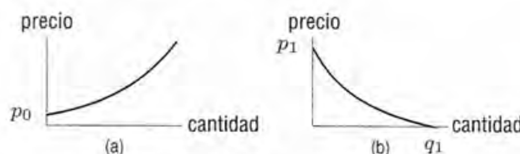


Figura 1.56.

19. La tabla 1.21 tiene los datos de una curva de demanda lineal de un producto, donde p es el precio del producto y q es la cantidad vendida cada mes a dicho precio. Encuentre las fórmulas de las siguientes funciones. Interprete las pendientes en términos de la demanda.

(a) q como una función de p. **(b)** p como una función de q.

Tabla 1.21

p (dólares)	15	18	20	22	24
q (toneladas)	500	460	420	380	340

20. Una curva de demanda está dada por $75p + 50q = 300$, donde p es el precio del producto en dólares, y q es la cantidad demandada a ese precio. Encuentre las ordenadas y abscisas en el origen p y q e interprételas en términos de la demanda del consumidor.

21. Una de las tablas 1.22 y 1.23 representa una curva de oferta; la otra, una curva de demanda.

(a) ¿Qué curva representa cada tabla? ¿Por qué?
(b) Al precio de $155, aproximadamente, ¿cuántas unidades comprarán los consumidores?
(c) A un precio de $155, aproximadamente, ¿cuántas unidades podrían ofrecer los productores?
(d) ¿El mercado hará que los precios sean mayores o menores que $155?
(e) ¿Cuál tendría que ser el precio si usted quiere que los consumidores compren por lo menos 20 unidades?
(f) ¿Cuál tendría que ser el precio si usted desea que los productores fabriquen por lo menos 20 unidades?

Tabla 1.22

p ($/unidad)	182	167	153	143	133	125	118
q (cantidad)	5	10	15	20	25	30	35

Tabla 1.23

p ($/unidad)	6	35	66	110	166	235	316
q (cantidad)	5	10	15	20	25	30	35

22. La producción de cobre en Estados Unidos, Q, en toneladas métricas y el valor, P, en miles de dólares por tonelada métrica, aparecen[26] en la tabla 1.24. Trace la gráfica del valor como función de la producción. Trace la gráfica de una posible curva de oferta.

Tabla 1.24 *Producción de cobre de Estados Unidos*

Año	1984	1985	1986	1987	1988	1989
Q	1,103	1,105	1,144	1,244	1,417	1,497
P	1,473	1,476	1,456	1,818	2,656	2,888

23. La figura 1.57 muestra la oferta y la demanda de un producto.

(a) ¿Cuál es el precio de equilibrio de este producto? A este precio, ¿cuál es la cantidad que se produce?

(b) Elija un precio mayor al de equilibrio, por ejemplo, $p = 12$. A este precio, ¿cuántas unidades están dispuestos a producir los fabricantes? ¿Cuántas unidades comprarán los consumidores? Utilice sus respuestas a estas preguntas para explicar por qué, si los precios son mayores al precio de equilibrio, el mercado tiende a hacer que los precios bajen (hacia el equilibrio).

(c) Ahora escoja un precio menor al de equilibrio, por ejemplo, $p = 8$. A este precio, ¿cuántas unidades están dispuestos a producir los fabricantes? ¿Cuántas unidades comprarán los consumidores? Utilice sus respuestas a estas preguntas para explicar por qué, si los precios son menores al precio de equilibrio, el mercado tiende a hacer que los precios suban (hacia el equilibrio).

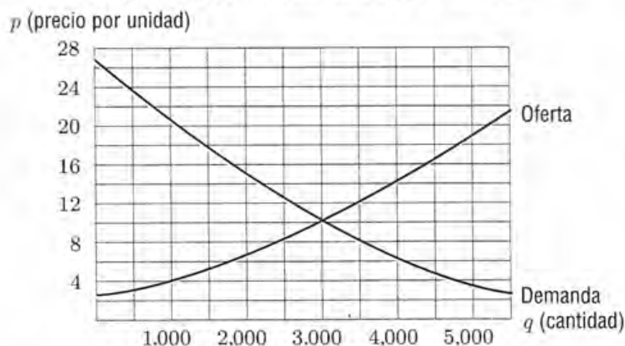


Figura 1.57.

24. Cuando el precio, p, que se cobraba por un paseo en barco era de $25, el número promedio de pasajeros por semana, N, era 500. Cuando se redujo el precio a $20, el número promedio de pasajeros por semana aumentó a 650. Encuentre una fórmula para la curva de demanda, suponiendo que ésta sea lineal.

25. Usted tiene un presupuesto de $\$k$ para gastar en refrescos y aceite bronceador, que tienen un costo de $\$p_1$ por litro y $\$p_2$ por litro, respectivamente.

(a) Escriba una ecuación que exprese la relación entre el número de litros de refresco y el número de litros de aceite bronceador que usted puede comprar si gasta todo su presupuesto. Ésta es su restricción presupuestal.

(b) Trace la gráfica de la restricción presupuestal, suponiendo que puede comprar fracciones de litro. Señale las intersecciones.

(c) Suponga que se duplica su presupuesto. Trace la gráfica de la nueva restricción presupuestal en un mismo sistema de coordenadas.

(d) Con un presupuesto de $\$k$ se duplica el precio del aceite bronceador. Trace la gráfica de la nueva restricción presupuestal en un mismo sistema de coordenadas.

26. Las curvas de demanda y oferta de cierto producto están dadas en términos del precio, p, por

$$D(p) = 2{,}500 - 20p \quad \text{y} \quad S(p) = 10p - 500.$$

(a) Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio. Represente gráficamente sus respuestas.

(b) Si se aplica a los productores un impuesto específico de $6 por unidad, encuentre el nuevo precio y la nueva cantidad de equilibrio.

(c) ¿Qué parte del impuesto de $6 pagan los consumidores y qué parte pagan los fabricantes?

(d) ¿Cuál es el ingreso total del impuesto que cobra el gobierno?

27. En el ejemplo 8 las curvas de demanda y oferta están dadas por $D(p) = 100 - 2p$ y $S(p) = 3p - 50$, el precio de equilibrio es de $30 y la cantidad de equilibrio es de 40 unidades. Suponga que un impuesto de 5% sobre ventas se aplica al consumidor, de forma que éste paga $p + 0.05p$, mientras que el precio del productor es p.

(a) Encuentre el nuevo precio y la nueva cantidad de equilibrio.

(b) ¿Cuánto se paga por impuestos en cada unidad? ¿Cuánto de esto es pagado por el consumidor y cuánto por el productor?

28. Conteste las preguntas del problema 27, suponiendo que el impuesto al valor se aplica al productor y no al consumidor, de tal forma que el precio al productor es $p - 0.05p$, mientras que el precio al consumidor es p.

29. Una oficina corporativa proporciona la curva de demanda de la figura 1.58 a sus operadores de franquicias de neverías. Al precio de $1.00 por bola de nieve, se pueden vender 240 bolas de nieve al día.

(a) Calcule cuántas bolas de helado podrían venderse por día al precio de 50 centavos por bola de nieve. Explique.

(b) Calcule cuántas bolas de nieve se pueden vender por día a un precio de $1.50 por bola de nieve. Explique.

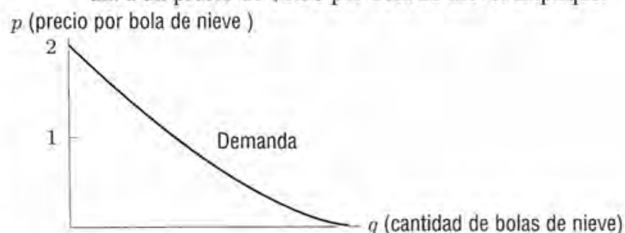


Figura 1.58.

[26] "US Copper, Lead, and Zinc Production", *The World Almanac 1992*, p. 688.

30. La figura 1.59 muestra las líneas rectas de oferta y demanda, con el precio en el eje vertical.
   (a) Indique cuál es el precio de equilibrio p_0 y la cantidad de equilibrio q_0 en los ejes.
   (b) Explique el efecto que tendría sobre el precio y la cantidad de equilibrio si aumentara la pendiente de la curva de oferta. Ilustre su respuesta gráficamente.
   (c) Explique el efecto que tendría sobre el precio y la cantidad de equilibrio si la pendiente de la curva de demanda fuera más negativa. Ejemplifique su respuesta gráficamente.

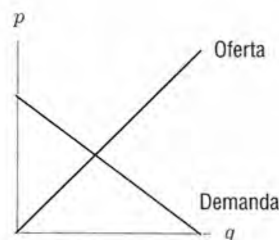


Figura 1.59.

1.5 FUNCIONES EXPONENCIALES

La función $f(x) = 2^x$, cuya potencia es variable, es una *función exponencial*. El número 2 se llama la base. Las funciones exponenciales de la forma $f(x) = a^x$, donde a es una constante positiva, se utilizan para representar muchos fenómenos en ciencias naturales y sociales.

Crecimiento poblacional

La tabla 1.25 contiene los datos de la población de México a principios de la década de 1980. Para analizar cómo crece la población, vemos incrementos anuales en la tercera columna. Si la población hubiera estado creciendo linealmente los números de la tercera columna serían todos iguales. Pero las poblaciones por lo general crecen más rápido a medida que son más grandes, porque hay gente que tiene hijos; por tanto, no debería sorprendernos que aumenten los números de la tercera columna.

Tabla 1.25 *Población de México (aproximada)*

Año	Población (millones)	Aumento en la población (millones)
1980	67.38	
		1.75
1981	69.13	
		1.80
1982	70.93	
		1.84
1983	72.77	
		1.89
1984	74.66	
		1.94
1985	76.60	
		1.99
1986	78.59	

Suponga que dividimos la población de cada año entre la población del año anterior. Aproximadamente obtenemos:

$$\frac{\text{Población en 1981}}{\text{Población en 1980}} = \frac{69.13 \text{ millones}}{67.38 \text{ millones}} = 1.026$$

$$\frac{\text{Población en 1982}}{\text{Población en 1981}} = \frac{70.93 \text{ millones}}{69.13 \text{ millones}} = 1.026$$

El hecho de que ambos cálculos dan 1.026 demuestra que la población creció aproximadamente 2.6% entre 1980 y 1981, y entre 1981 y 1982. Si hacemos cálculos similares para otros años vemos que la población creció en un factor de aproximadamente 1.026, o sea 2.6% cada año. Siempre que tengamos un factor de crecimiento constante (en este caso, 1.026), tenemos un *crecimiento exponencial*. Si t es el número de años desde 1980,

Cuando $t = 0$, población $= 67.38 = 67.38(1.026)^0$.
Cuando $t = 1$, población $= 69.13 = 67.38(1.026)^1$.
Cuando $t = 2$, población $= 70.93 = 69.13(1.026) = 67.38(1.026)^2$.
Cuando $t = 3$, población $= 72.77 = 70.93(1.026) = 67.38(1.026)^3$.

Por tanto, P, la población t años después de 1980, está dada por

$$P = 67.38(1.026)^t.$$

Como la variable t se encuentra en el exponente, recibe el nombre de *función exponencial.* La base, 1.026, representa el factor por el cual crece la población cada año. Suponiendo que la fórmula se cumpla para los siguientes 50 años, la gráfica de la población tiene la forma de la figura 1.60. Como la población está creciendo, la función es creciente. Puesto que la población crece cada vez más rápido a medida que pasa el tiempo, la gráfica es cóncava hacia arriba. Este comportamiento es típico de una función exponencial. Aunque las funciones exponenciales aumentan lentamente al principio, como en esta función, al final aumentan con rapidez. Ésta es la razón por la cual al crecimiento poblacional exponencial se le considera una amenaza para el mundo.

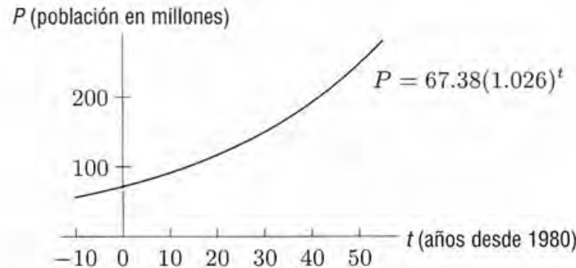


Figura 1.60. Población de México (aproximada): crecimiento exponencial.

Eliminación de una medicina del cuerpo

Ahora examinaremos una cantidad que, en lugar de aumentar, disminuye. Cuando a un paciente se le suministra un medicamento, la medicina entra al torrente sanguíneo. La tasa a la que metaboliza y elimina la medicina depende de ésta en particular. En el caso del antibiótico ampicilina, aproximadamente 40% de la medicina se elimina cada hora. Una dosis común de ampicilina es de 250 mg. Supongamos que $Q = f(t)$, donde Q es la cantidad de ampicilina en mg, del torrente sanguíneo al tiempo de t horas después de que se suministró la medicina. A $t = 0$ tenemos $Q = 250$. Como cada hora la cantidad restante es 60% de la cantidad anterior, tenemos

$$\begin{aligned} f(0) &= 250 \\ f(1) &= 250(0.6) \\ f(2) &= 250(0.6)(0.6) = 250(0.6)^2 \\ f(3) &= 250(0.6)^2(0.6) = 250(0.6)^3 \end{aligned}$$

y, por tanto, después de t horas,

$$Q = f(t) = 250(0.6)^t.$$

A esta función se le denomina función *exponencial decreciente.* Conforme t aumenta, los valores de la función se aproximan arbitrariamente a cero. El eje t es una *asíntota horizontal* para esta función.

Observe la forma en que los valores de la tabla 1.26 disminuyen. Cada hora adicional se elimina una cantidad menor de la medicina que en la hora anterior (100 mg la primera hora, 60 mg la segunda, y así sucesivamente). Esto se debe a que a medida que pasa el tiempo el cuerpo tiene menos medicina que eliminar. Por tanto, la gráfica de la figura 1.61 se curva hacia arriba. Compare esto con el crecimiento exponencial de la figura 1.60, en donde cada incremento era mayor que el anterior. Observe que ambas gráficas son cóncavas hacia arriba.

Tabla 1.26 *Valor de la función decreciente*

t (horas)	Q (mg)
0	250
1	150
2	90
3	54
4	32.4
5	19.4

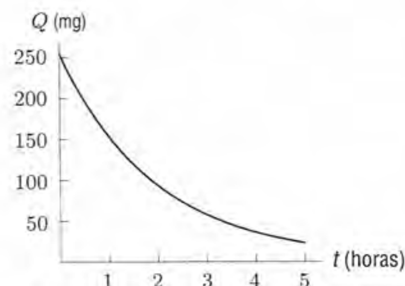


Figura 1.61. Eliminación de medicinas: decrecimiento exponen-

Función exponencial general

Al crecimiento exponencial con frecuencia se le describe en función de las tasas de crecimiento porcentuales. La población de México está creciendo 2.6% al año, por lo que aumenta en un factor de $a = 1 + 0.026 = 1.026$ cada año. De forma similar, 40% de la ampicilina era eliminada cada hora; por tanto, la cantidad restante disminuía en un factor de $a = 1 - 0.40 = 0.6$ cada hora. Tenemos las siguientes fórmulas generales.

> Se dice que P es una **función exponencial** de t con base en a si
> $$P = P_0 a^t$$
> donde P_0 es la cantidad inicial (cuando $t = 0$) y a es el factor por el cual P cambia cuando t aumenta en 1. Si $a > 1$, tenemos **crecimiento exponencial**; si $0 < a < 1$, tenemos **decrecimiento exponencial**. El factor a está dado por
> $$a = 1 + r$$
> donde r es la representación decimal de la razón de cambio porcentual; r puede ser positiva (para el crecimiento) o negativa (para el decrecimiento).

El dominio posible más grande para la función exponencial es el de todos los números reales,[27] con $a > 0$.

Comparación entre funciones lineales y exponenciales

Cada función exponencial cambia a una tasa porcentual, o *relativa*, constante. Por ejemplo, la población de México creció 2.6% por año. Cada función lineal cambia a una tasa constante (absoluta). Por ejemplo, el récord olímpico de salto con garrocha aumentó dos pulgadas por año.

> Una función **lineal** tiene una razón de cambio absoluta constante.
> Una función **exponencial** tiene una razón de cambio relativa (o porcentual) constante.

Ejemplo 1 La cantidad de adrenalina en el cuerpo puede cambiar rápidamente. Suponga que la cantidad inicial es de 15 mg. Encuentre una fórmula para A, la cantidad en mg, al tiempo t minutos después si A está:

(a) Aumentando en 0.4 mg por minuto.
(b) Disminuyendo en 0.4 mg por minuto.
(c) Aumentando 3% por minuto.
(d) Disminuyendo 3% por minuto.

Solución **(a)** Ésta es una función lineal con una cantidad inicial de 15 y una pendiente de 0.4; por tanto,
$$A = 15 + 0.4t.$$

(b) Ésta es una función lineal con una cantidad inicial de 15 y una pendiente de -0.4; por tanto,
$$A = 15 - 0.4t.$$

(c) Ésta es una función exponencial con una cantidad inicial de 15 y una base de $1 + 0.03 = 1.03$; por tanto,
$$A = 15(1.03)^t.$$

(d) Ésta es una función exponencial con una cantidad inicial de 15 y una base de $1 - 0.03 = 0.97$; por tanto,
$$A = 15(0.97)^t.$$

[27] La razón por la que no queremos $a \le 0$ es que, por ejemplo, no podemos definir $a^{1/2}$ si $a < 0$. Asimismo, por lo general no tenemos $a = 1$, puesto que $P = P_0 a^t = P_0 1^t = P_0$ es, entonces, una función constante.

Ejemplo 2 Las ventas[28] en las librerías y tiendas de discos Borders aumentó de $78 millones en 1991 a $412 millones en 1994. Suponiendo que las ventas han estando aumentando exponencialmente, encuentre una ecuación de la forma $P = P_0 a^t$, donde P son las ventas de Borders en millones de dólares y t es el número de años desde 1991. ¿Cuál es la tasa de crecimiento porcentual?

Solución Sabemos que $P = 78$ cuando $t = 0$, de forma que $P_0 = 78$. Para determinar a, usamos el hecho de que $P = 412$ cuando $t = 3$. Sustituyendo obtenemos

$$P = P_0 a^t$$
$$412 = 78a^3.$$

Al dividir ambos lados de la ecuación entre 78, tenemos

$$\frac{412}{78} = a^3$$
$$5.282 = a^3.$$

Si sacamos la raíz cúbica de ambos lados de la ecuación nos da

$$a = (5.282)^{1/3} = 1.74.$$

Como $a = 1.74$, la ecuación de las ventas de Borders como función del número de años desde 1991 es

$$P = 78(1.74)^t.$$

Durante este periodo, las ventas aumentaron 74% al año.

Reconocimiento de datos de una función exponencial. Los valores de t y P en una tabla pueden provenir de una función exponencial $P = P_0 a^t$ si las razones de los valores de P son constantes para los mismos valores distribuidos de t.

Ejemplo 3 ¿Cuál de las siguientes tablas de valores puede corresponder a una función exponencial, a una función lineal, o a ninguna? Para aquellas que pueden corresponder a una función exponencial o lineal, encuentre una fórmula para tal función.

(a)

x	$f(x)$
0	16
1	24
2	36
3	54
4	81

(b)

x	$g(x)$
0	14
1	20
2	24
3	29
4	35

(c)

x	$h(x)$
0	5.3
1	6.5
2	7.7
3	8.9
4	10.1

Solución **(a)** Vemos que f no puede ser una función lineal, ya que $f(x)$ aumenta en diferentes cantidades ($24 - 16 = 8$ y $36 - 24 = 12$) a medida que x se incrementa en una unidad. ¿Podría ser f una función exponencial? Examinemos las razones de los valores sucesivos de $f(x)$:

$$\frac{24}{16} = 1.5 \qquad \frac{36}{24} = 1.5 \qquad \frac{54}{36} = 1.5 \qquad \frac{81}{54} = 1.5.$$

[28]"How Borders Reads the Book Market", *US News & World Report*, 30 de octubre de 1995, pp. 59-60.

Como todos los cocientes son iguales a 1.5, esta tabla de valores podría corresponder a una función exponencial con una base de 1.5. Debido a que $f(0) = 16$, una fórmula para $f(x)$ es

$$f(x) = 16(1.5)^x$$

Verifique que al sustituir $x = 0, 1, 2, 3, 4$ en esta fórmula usted obtiene los valores dados para $f(x)$.

(b) Conforme x aumenta en una unidad, $g(x)$ aumenta en 6 (de 14 a 20), después en 4 (de 20 a 24), por lo que g no es lineal. Comprobemos para ver si g puede ser exponencial:

$$\frac{20}{14} = 1.43 \quad \text{y} \quad \frac{24}{20} = 1.2.$$

Como estos cocientes (1.43 y 1.2) son diferentes, g no es exponencial.

(c) Para h, observe que a medida que x aumenta en una unidad el valor de $h(x)$ aumenta cada vez en 1.2. Por lo tanto, h podría ser una función lineal con una pendiente de 1.2. Como $h(0) = 5.3$, una fórmula para $h(x)$ es

$$h(x) = 5.3 + 1.2x.$$

Familia de funciones exponenciales y el número e

La fórmula $P = P_0a^t$ da una familia de funciones exponenciales con parámetros P_0 (la cantidad inicial) y a (la base). La base nos dice si la función es creciente ($a > 1$) o decreciente ($0 < a < 1$). Como a es el factor al que cambia P cuando t aumenta una unidad, grandes valores de a significan un crecimiento rápido, y los valores de a cercanos a cero significan un decrecimiento rápido (véanse las figuras 1.62 y 1.63). Todos los miembros de la familia $P = P_0a^t$ son cóncavos hacia arriba si $P_0 > 0$.

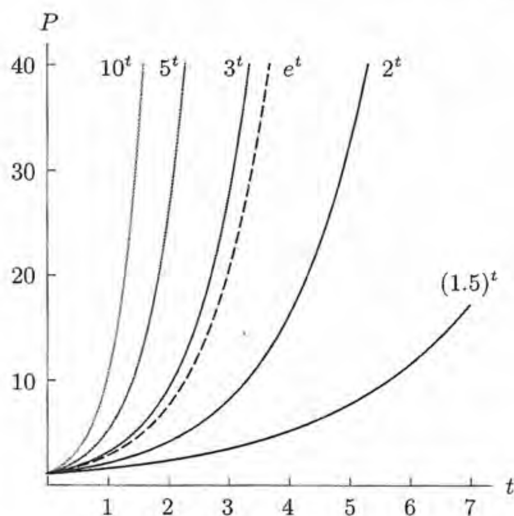


Figura 1.62. Crecimiento exponencial: $P = a^t$, para $a > 1$.

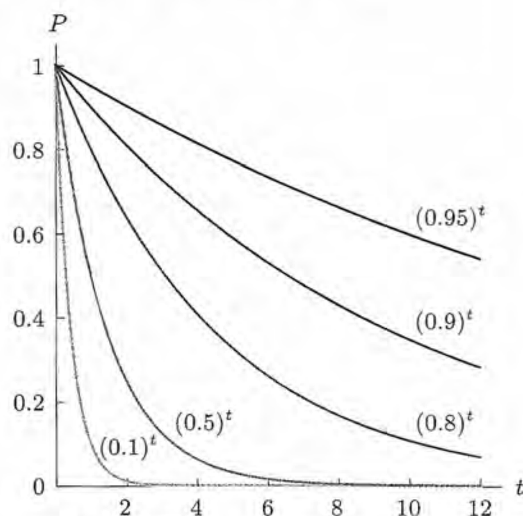


Figura 1.63. Decrecimiento exponencial: $P = a^t$, para $0 < a < 1$.

En la práctica, la base que más comúnmente se usa es el número $e = 2.71828...$ El hecho de que las calculadoras tengan un botón e^x es una muestra de qué tan importante es e. Como e se ubica entre 2 y 3, la gráfica de $y = e^x$ en la figura 1.62 está entre las gráficas de $y = 2^t$ y $y = 3^t$.

Se utilizan tanto la base e que conocemos como la base natural. A primera vista esto es algo misterioso: ¿qué puede haber de natural en utilizar a 2.71828... como base? La respuesta completa a esta pregunta deberá esperar hasta el capítulo 3, donde usted verá que pueden surgir muchas fórmulas de cálculo más hábilmente cuando usamos e como base.

Problemas de la sección 1.5

1. Cada una de las siguientes funciones indica la cantidad de una sustancia presente en un tiempo t. En cada caso, señale la cantidad presente inicialmente (en $t = 0$), diga si la función representa un crecimiento o decrecimiento exponencial y dé la tasa de crecimiento o decrecimiento presente.

(a) $A = 100(1.07)^t$ **(b)** $A = 5.3(1.054)^t$
(c) $A = 3{,}500(0.93)^t$ **(d)** $A = 12(0.88)^t$

2. Las siguientes funciones indican el número de habitantes de cuatro ciudades en el tiempo, t, dado en años.

(i) $P = 600(1.12)^t$ **(ii)** $P = 1{,}000(1.03)^t$
(iii) $P = 200(1.08)^t$ **(iv)** $P = 900(0.90)^t$

(a) ¿Qué ciudad tiene la mayor tasa de crecimiento porcentual? ¿Cuál es la tasa de crecimiento porcentual?
(b) ¿Qué ciudad tiene la mayor población inicial? ¿Cuál es dicha población inicial?
(c) ¿Existe alguna ciudad cuyo tamaño disminuya? Si es así, ¿cuál(es)?

3. Una ciudad tiene una población de 1,000 personas al tiempo $t = 0$. En cada uno de los siguientes casos escriba una fórmula para la población, P, del pueblo como una función del año t.

(a) La población aumenta 50 personas al año.
(b) La población aumenta 5% al año.

4. Un aromatizante de ambiente comienza con 30 gramos y se evapora. En cada uno de los siguientes casos escriba una fórmula para la cantidad, Q gramos, del aromatizante restante t días después de su inicio y dibuje una gráfica de la función. La disminución es de

(a) 2 gramos al día **(b)** 12% al día

5. A un paciente se le suministra una dosis de 50 mg de quinina para prevenirlo de la malaria. La quinina se elimina del cuerpo a una tasa de 6% por hora.

(a) Encuentre una fórmula para la cantidad, A (en miligramos), de quinina en el cuerpo t horas después de que se suministra la dosis..
(b) ¿Cuánta quinina hay en el cuerpo después de 24 horas?
(c) Trace la gráfica de A como función de t.
(d) Use la gráfica para calcular cuándo quedan 5 mg de quinina.

6. La economía mundial ha estado en expansión. En el año 2000, el producto mundial bruto (producción total de bienes y servicios) fue de 45 trillones de dólares y crecía 4.7% al año.[29] Suponga que esta tasa de crecimiento continúa.

(a) Encuentre una fórmula para el producto mundial bruto, W (en trillones de dólares), como una función de t, el número de años desde el 2000.
(b) ¿Qué producto mundial bruto se espera para el año 2010?
(c) Realice la gráfica de W como función de t.
(d) Utilice la gráfica para calcular cuándo el producto será mayor a 50 trillones de dólares.

7. La figura 1.64 muestra las gráficas de la población de diversas ciudades respecto al tiempo. Relacione cada una de las siguientes descripciones con una gráfica y escriba una descripción que se relacione con las gráficas restantes.

(a) La población aumentó 5% al año.
(b) La población aumentó 8% por año.
(c) La población aumentó 5,000 personas por año.
(d) La población fue estable.

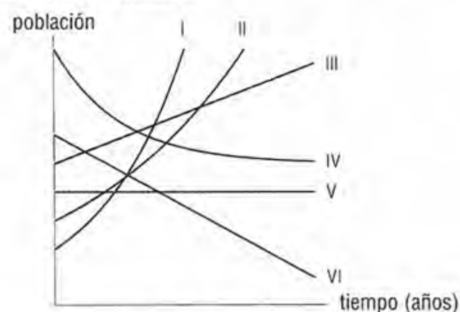


Figura 1.64.

8. La población mundial es aproximadamente $P = 6.1(1.0126)^t$ con P en miles de millones y t en años desde el 2000.

(a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento anual porcentual de la población mundial?
(b) ¿Cuál era la población en el 2000? ¿Qué pronostica este modelo para la población mundial en el 2005?
(c) Use el inciso (b) para encontrar la razón promedio de cambio de la población mundial entre el 2000 y el 2005.

9. La empresa que produce *Notas Cliffs* (versiones abreviadas de la literatura clásica) comenzó en 1958 con $4,000 y fue vendida en 1998 en $14,000,000. Encuentre el incremento anual porcentual en el valor de esta empresa durante 40 años.

Para los problemas 10 y 11 encuentre una posible fórmula para la función que representan los datos.

10.

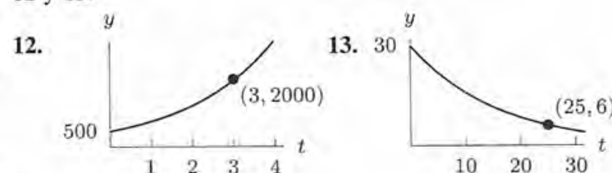
x	0	1	2	3
$f(x)$	4.30	6.02	8.43	11.80

11.

t	0	1	2	3
$g(t)$	5.50	4.40	3.52	2.82

Dé una posible fórmula para las funciones de los problemas 12 y 13.

12. **13.**



[29] The Worldwatch Institute, *Vital Signs 2001*, W.W. Norton, Nueva York, 2001, p. 57.

14. **(a)** ¿Cuál (si hay alguna) de las funciones de la siguiente tabla podría ser lineal? Encuentre las fórmulas para dichas funciones.

(b) ¿Cuál (si hay alguna) de las funciones de la siguiente tabla podría ser exponencial? Encuentre las fórmulas para esas funciones.

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
−2	12	16	37
−1	17	24	34
0	20	36	31
1	21	54	28
2	18	81	25

15. Determine si cada una de las siguientes tablas de valores pueden corresponder a una función lineal, una función exponencial, o ninguna. Para cada tabla de valores que pudiera corresponder a una función lineal o exponencial encuentre una fórmula para la función.

(a)

x	$f(x)$
0	10.5
1	12.7
2	18.9
3	36.7

(b)

t	$s(t)$
−1	50.2
0	30.12
1	18.072
2	10.8432

(c)

u	$g(u)$
0	27
2	24
4	21
6	18

16. Encuentre una fórmula para el número de mejillones cebra que hay en una bahía como función del número de años desde 1998, puesto que hubo 2,700 al inicio de 1998 y 3,186 al inicio de 1999.

(a) Suponga que el número de mejillones cebra está creciendo linealmente. Indique las unidades de la pendiente de la línea recta e interprételа en términos de los mejillones cebra.

(b) Suponga que el número de mejillones cebra está creciendo exponencialmente. ¿Cuál es la tasa de crecimiento porcentual de la población de mejillones cebra?

17. Durante la década de 1980 Costa Rica tuvo la mayor tasa de deforestación del mundo: 2.9% por año. (Ésta es la tasa a la cual está disminuyendo la tierra cubierta por bosques.) De la tierra cubierta por bosques en Costa Rica en 1980, ¿qué porcentaje aún estaba cubierto por bosques en 1990?

18. El número de pasajeros que utilizan un tranvía disminuyó de 190,205 a 174,989 durante un periodo de cinco años. Encuentre el decremento anual porcentual durante dicho periodo.

19. La figura 1.65 muestra la producción mundial de energía solar[30] durante la década de 1990.

(a) Explique por qué esta gráfica podría representar a una función exponencial.

(b) Dé una fórmula posible para la producción mundial de energía solar, S (en megavatios), como una función del número de años, t, desde 1990.

(c) ¿Cuál es el cambio anual porcentual?

(d) Utilice la fórmula para predecir la producción mundial de energía solar en el 2005.

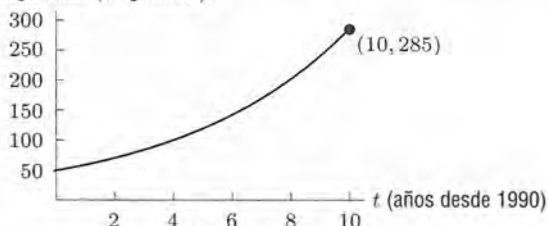


Figura 1.65.

20. **(a)** Construya una tabla de valores para $y = e^x$ tomando $x = 0, 1, 2, 3$.

(b) Trace la gráfica de los puntos calculados en el inciso (a). ¿La gráfica se parece a una función de crecimiento, o de decrecimiento exponencial?

(c) Construya una tabla de valores para $y = e^{-x}$ tomando $x = 0, 1, 2, 3$.

(d) Trace la gráfica de los puntos encontrados en el inciso (c). ¿La gráfica se parece a una función de crecimiento, o de decrecimiento exponencial?

21. Trace la gráfica $y = 100e^{-0.4x}$. Describa qué observa.

22. Cuando los Juegos Olímpicos se realizaron en la ciudad de México en 1968 hubo un gran debate sobre el efecto que la gran altitud (7,340 pies) tendría en los atletas. Suponiendo que la presión del aire disminuye exponencialmente 0.4% por cada 100 pies, ¿a qué porcentaje disminuye la presión del aire al trasladarse del nivel del mar a la ciudad de México?

23. Los aviones requieren grandes distancias para despegar, llamadas carreras de despegue, en aeropuertos a grandes altitudes, debido a la densidad disminuida del aire. La tabla muestra cómo la carrera de despegue de cierto avión ligero depende de la altitud del aeropuerto. (Las carreras de despegue también están fuertemente influidas por la temperatura del aire; los datos que se muestran suponen una temperatura de 0 °C.) Determine una fórmula para este avión en particular, que señale la carrera de despegue como función exponencial de la altitud del aeropuerto.

Altitud (pies)	Nivel del mar	1,000	2,000	3,000	4,000
Carrera de despegue (pies)	670	734	805	882	967

24. El precio medio, P, de una casa aumentó de $50,000 en 1970 a $100,000 en 1990. Sea t el número de años desde 1970.

(a) Suponga que el aumento en los precios de las viviendas ha sido lineal. Dé una ecuación para la recta, que represente el precio, P, en términos de t. Emplee esta ecuación para completar la columna (a) de la tabla 1.27. Utilice unidades de $1,000.

(b) Si en vez de aumentar linealmente los precios de las viviendas se han incrementado exponencialmente, encuentre una ecuación de la forma $P = P_0a^t$ para representar los precios de las viviendas. Complete la columna (b) de la tabla 1.27.

[30]The Worldwatch Institute, *Vital Signs 2001*, W.W. Norton, Nueva York, 2001, p. 47.

(c) En el mismo sistema de ejes, dibuje la gráfica de las funciones representadas en las columnas (a) y (b) de la tabla 1.27.

(d) ¿Qué modelo de crecimiento del precio considera usted que es el más realista?

Tabla 1.27

t	(a) Crecimiento lineal del precio en unidades de $1,000.	(b) Crecimiento exponencial del precio en unidades de $1,000
0	50	50
10		
20	100	100
30		
40		

25. En 1994 la población mundial era de 5.6 mil millones y estaba creciendo a una tasa aproximada de 1.2% al año.

(a) Escriba una fórmula para la población mundial como función del tiempo, t, en años desde 1994.

(b) Encuentre la razón promedio de cambio esperada para la población mundial entre 1994 y 2000. Indique las unidades en su respuesta.

(c) Encuentre la razón promedio de cambio esperada para la población mundial entre 2010 y 2020. Indique las unidades en su respuesta.

26. Relacione las funciones $h(s)$, $f(s)$ y $g(s)$ cuyos valores se encuentran en la tabla 1.28, con las fórmulas

$$y = a(1.1)^s, \quad y = b(1.05)^s, \quad y = c(1.03)^s,$$

suponiendo que a, b y c son constantes. Observe que los valores de la función han sido redondeados a dos cifras decimales.

Tabla 1.28

s	$h(s)$	s	$f(s)$	s	$g(s)$
2	1.06	1	2.20	3	3.47
3	1.09	2	2.42	4	3.65
4	1.13	3	2.66	5	3.83
5	1.16	4	2.93	6	4.02
6	1.19	5	3.22	7	4.22

27. Una máquina fotocopiadora puede reducir copias al 80% de su tamaño original. Al fotocopiar una copia ya reducida podemos hacer reducciones adicionales.

(a) Si se reduce una página al 80%, ¿qué porcentaje de ampliación se necesita para que regrese a su tamaño original?

(b) Calcule el número sucesivo de veces que se debe copiar una página para que la copia final sea 15% menos del tamaño original.

28. (a) Niki invirtió $10,000 en la Bolsa de Valores. La inversión no era muy buena, porque su valor disminuyó 10% al año durante una década. ¿A cuánto ascendió la inversión después de 10 años?

(b) Después de una década la inversión comenzó a ganar 10% de su valor por año. ¿Después de cuánto tiempo la inversión recobrará su valor inicial ($10,000)?

1.6 LOGARITMO NATURAL

En la sección 1.5 establecimos una función que aproximaba la población de México (en millones) como

$$P = f(t) = 67.38(1.026)^t,$$

donde t es el número de años desde 1980. Ahora suponga que en lugar de calcular la población en el tiempo, t, nos preguntamos cuándo alcanzará la población los 200 millones de habitantes. Queremos encontrar el valor de t para el cual

$$200 = f(t) = 67.38(1.026)^t.$$

Utilizaremos logaritmos para despejar una variable en un exponente.

Definición y propiedades del logaritmo natural

Definimos el logaritmo natural x, denotado por $\ln x$, como sigue:

El **logaritmo natural** de x, denotado por $\ln x$, es la potencia de e necesaria para obtener x, es decir,

$$\ln x = c \quad \text{significa} \quad e^c = x.$$

El logaritmo natural a veces se escribe como $\log_e x$.

Por ejemplo, $\ln e^3 = 3$ porque 3 es la potencia de e necesaria para dar e^3. De forma similar, $\ln(1/e) = \ln e^{-1} = -1$. Una calculadora da $\ln 5 = 1.6094$, debido a que $e^{1.6094} = 5$. No obstante, si tratamos de encontrar $\ln(-7)$ en una calculadora, obtenemos un mensaje de error porque e elevado a cualquier potencia nunca es negativo o 0. En general,

ln x no está definida si x es negativa o 0.

Para trabajar con logaritmos necesitamos usar las siguientes propiedades:

Propiedades del logaritmo natural

1. $\ln(AB) = \ln A + \ln B$
2. $\ln\left(\dfrac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$
3. $\ln(A^p) = p \ln A$
4. $\ln e^x = x$
5. $e^{\ln x} = x$

Además, ln 1 = 0 ya que $e^0 = 1$ y ln e = 1 porque $e^1 = e$.

Al utilizar el botón LN en una calculadora para trazar una gráfica de $f(x) = \ln x$ obtenemos la figura 1.66. Observe que, para x grandes, la gráfica de $y = \ln x$ sube lentamente a medida que x aumenta. La intersección sobre el eje x es $x = 1$, porque ln 1 = 0. Para $x > 1$, el valor de ln x es positivo; para $0 < x < 1$, el valor de ln x es negativo.

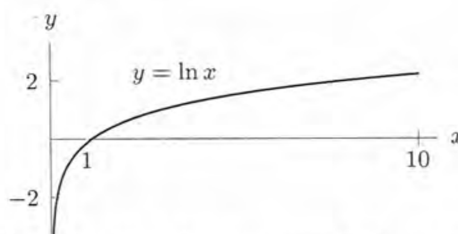


Figura 1.66. La función de logaritmo natural sube muy lentamente.

Solución de ecuaciones mediante logaritmos

Los logaritmos naturales se pueden usar para despejar exponentes desconocidos.

Ejemplo 1 Encuentre t tal que $3^t = 10$.

Solución Primero, observe que esperamos que t esté entre 2 y 3, porque $3^2 = 9$ y $3^3 = 27$. Para hallar exactamente t, tomamos el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación y despejamos t.

$$\ln(3^t) = \ln 10.$$

La tercera propiedad de los logaritmos nos dice que $\ln(3^t) = t \ln 3$; por tanto, tenemos

$$t \ln 3 = \ln 10$$
$$t = \frac{\ln 10}{\ln 3}.$$

Si utilizamos una calculadora para encontrar el logaritmo natural tenemos

$$t = 2.096.$$

Ejemplo 2 Regresemos a la pregunta de cuándo la población de México será de 200 millones. Para obtener una respuesta despejamos $200 = 67.38(1.026)^t$ para t, usando logaritmos.

Solución Al dividir ambos lados de la ecuación entre 67.38, obtenemos

$$\frac{200}{67.38} = (1.026)^t.$$

Ahora tomemos el logaritmo natural de ambos lados:

$$\ln\left(\frac{200}{67.38}\right) = \ln(1.026^t).$$

Usando el hecho de que ln $(1.026^t) = t$ ln 1.026, obtenemos

$$\ln\left(\frac{200}{67.38}\right) = t\ln(1.026).$$

Al resolver esta ecuación por medio de una calculadora para encontrar los logaritmos tenemos

$$t = \frac{\ln(200/63.78)}{\ln(1.026)} = 42.4 \text{ años.}$$

Puesto que $t = 0$ en 1980, este valor de t corresponde al año 2022.

Ejemplo 3 Encuentre t tal que $12 = 5e^{3t}$.

Solución Es más fácil comenzar por aislar la exponencial, por lo que dividimos ambos lados de la ecuación entre 5:

$$2.4 = e^{3t}.$$

Ahora, tomando el logaritmo natural de ambos lados:

$$\ln 2.4 = \ln(e^{3t}).$$

Ya que $\ln(e^x) = x$, se tiene que

$$\ln 2.4 = 3t,$$

por tanto, al utilizar una calculadora, obtenemos

$$t = \frac{\ln 2.4}{3} = 0.2918.$$

Funciones exponenciales de base e

Una función exponencial de base a tiene la fórmula

$$P = P_0 a^t.$$

Para cualquier número positivo a, podemos escribir $a = e^k$ donde $k = \ln a$. Por consiguiente, podemos escribir la función exponencial como

$$P = P_0 a^t = P_0(e^k)^t = P_0 e^{kt}.$$

Si $a > 1$, entonces k es positivo y si $0 < a < 1$, entonces k es negativo. Concluimos:

Al escribir $a = e^k$, por tanto $k = \ln a$, cualquier función exponencial puede escribirse en dos formas

$$P = P_0 a^t \quad \text{o} \quad P = P_0 e^{kt}.$$

- Si $a > 1$, se tiene un crecimiento exponencial; si $0 < a < 1$, se tiene un decrecimiento exponencial.
- Si $k > 0$, se tiene un crecimiento exponencial; si $k < 0$, se tiene un decrecimiento exponencial.
- A k se le llama la tasa de crecimiento o de decrecimiento *continua*.

La palabra continua en una tasa de crecimiento se utiliza en la misma forma para describir la composición continua del interés generado por el dinero (véase la sección Enfoque sobre modelado, en la página 75).

Ejemplo 4 **(a)** Convierta la función $P = 1{,}000e^{0.05t}$ a la forma $P = P_0a^t$.
(b) Convierta la función $P = 500(1.06)^t$ a la forma $P = P_0e^{kt}$.

Solución (a) Como $P = 1{,}000e^{0.05t}$, tenemos $P_0 = 1{,}000$. Queremos encontrar a, tal que

$$1{,}000a^t = 1{,}000e^{0.05t} = 1{,}000(e^{0.05})^t.$$

Tomamos $a = e^{0.05} = 1.0513$ por tanto, las dos siguientes funciones tendrán los mismos valores:

$$P = 1{,}000e^{0.05t} \quad \text{y} \quad P = 1{,}000(1.0513)^t.$$

Entonces, una tasa de crecimiento continua de 5% es equivalente a una tasa de crecimiento de 5.13% por unidad de tiempo.

(b) Tenemos $P_0 = 500$ y deseamos encontrar k con

$$500(1.06)^t = 500(e^k)^t,$$

así que tomamos

$$1.06 = e^k$$
$$k = \ln(1.06) = 0.0583.$$

Las siguientes dos funciones tienen los mismos valores

$$P = 500(1.06)^t \quad \text{y} \quad P = 500e^{0.0583t}.$$

Por tanto, una tasa de crecimiento de 6% por unidad de tiempo es equivalente a una tasa de crecimiento continua de 5.83 por ciento.

Ejemplo 5 Trace las gráficas de $P = e^{0.5t}$, una tasa de crecimiento continua de 50% y de $Q = 5e^{-0.2t}$, una tasa de decrecimiento continua de 20 por ciento.

Solución La gráfica de $P = e^{0.5t}$ se encuentra en la figura 1.67. Observe que la gráfica tiene la misma forma que las curvas anteriores de crecimiento exponencial: creciente y cóncava hacia arriba. La gráfica de $Q = 5e^{-0.2t}$ que está en la figura 1.68 tiene la misma forma que otras funciones de decrecimiento exponencial.

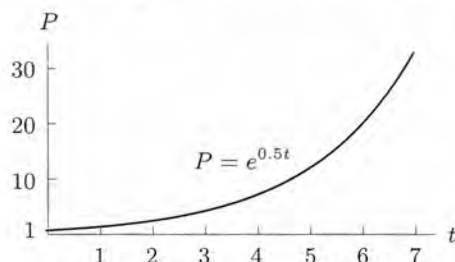


Figura 1.67. Función de crecimiento exponencial continuo.

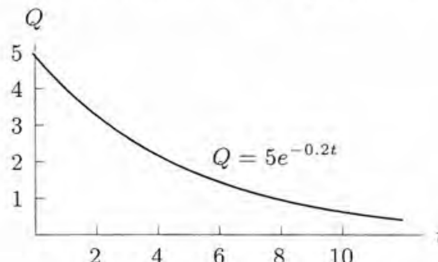


Figura 1.68. Función de decrecimiento exponencial continuo.

Problemas para la sección 1.6

Para los problemas del 1 al 16 despeje t usando logaritmos naturales.

1. $5^t = 7$
2. $130 = 10^t$
3. $2 = (1.02)^t$
4. $10 = 2^t$
5. $100 = 25(1.5)^t$
6. $50 = 10 \cdot 3^t$
7. $a = b^t$
8. $10 = e^t$
9. $5 = 2e^t$
10. $e^{3t} = 100$
11. $10 = 6e^{0.5t}$
12. $40 = 100e^{-0.03t}$
13. $B = Pe^{rt}$
14. $2P = Pe^{0.3t}$
15. $7 \cdot 3^t = 5 \cdot 2^t$
16. $5e^{3t} = 8e^{2t}$

Las funciones de los problemas 17 al 20 representan crecimiento o decrecimiento exponencial. ¿Cuál es la cantidad inicial? ¿Cuál es la tasa de crecimiento? Diga si la tasa de crecimiento es continua.

17. $P = 5(1.07)^t$
18. $P = 7.7(0.92)^t$
19. $P = 3.2e^{0.03t}$
20. $P = 15e^{-0.06t}$

21. Escriba las funciones exponenciales $P = e^{0.08t}$ y $Q = e^{-0.3t}$ en la forma $P = a^t$ y $Q = b^t$.

22. La población de una ciudad es de 1,000 habitantes y está creciendo 5% cada año.

(a) Encuentre una fórmula para la población en el tiempo de t años a partir de este momento, suponiendo que el aumento de 5% por año es una:
(i) Tasa anual. **(ii)** Tasa anual continua.

(b) En cada caso del inciso (a) calcule la población de la ciudad en 10 años.

23. Las siguientes fórmulas dan las poblaciones de cuatro pueblos diferentes, A, B, C y D, con t años a partir de este momento.

$$P_A = 600e^{0.08t} \quad P_B = 1{,}000e^{-0.02t}$$
$$P_C = 1{,}200e^{0.03t} \quad P_D = 900e^{0.12t}$$

(a) ¿Qué pueblo está creciendo más rápido (es decir, cuál tiene la mayor tasa de crecimiento porcentual)?

(b) ¿Cuál es el pueblo más grande en este momento?

(c) ¿Existe algún pueblo que esté disminuyendo en tamaño? Si es así, ¿cuál es, o cuáles son?

24. (a) Una población, P, crece a una tasa continua de 2% al año y comienza con un millón de habitantes. Escriba P en la forma $P = P_0e^{kt}$, con P_0, k constantes.

(b) Trace la gráfica de la población del inciso (a) respecto al tiempo.

25. (a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento continua porcentual para la función $P = 10e^{0.15t}$?

(b) Escriba esta función en la forma $P = P_0a^t$.

(c) ¿Cuál es la tasa de crecimiento anual porcentual (no continua) de esta función?

(d) Trace la gráfica de $P = 10e^{0.15t}$ y su respuesta del inciso (b) en el mismo sistema de coordenadas. Explique qué ve.

Escriba las funciones de los problemas 26 al 29 en la forma $P = P_0a^t$. ¿Cuáles representan un crecimiento exponencial y cuáles un decrecimiento exponencial?

26. $P = 15e^{0.25t}$ **27.** $P = 2e^{-0.5t}$

28. $P = P_0e^{0.2t}$ **29.** $P = 7e^{-\pi t}$

En los problemas 30 al 33, ponga las funciones en la forma $P = P_0e^{kt}$.

30. $P = 15(1.5)^t$ **31.** $P = 10(1.7)^t$

32. $P = 174(0.9)^t$ **33.** $P = 4(0.55)^t$

34. (a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento continua porcentual de $P = 100e^{0.06t}$?

(b) Escriba esta función en la forma $P = P_0a^t$. ¿Cuál es la tasa de crecimiento anual porcentual?

35. (a) ¿Cuál es la tasa de decrecimiento continua anual porcentual de $P = 25(0.88)^t$?

(b) Escriba esta función en la forma $P = P_0e^{kt}$. ¿Cuál es la tasa de decrecimiento anual porcentual?

36. Una pescadería tiene un estanque con 1,000 truchas jóvenes. El número de truchas t años después está dado por $P(t) = 1{,}000e^{-0.5t}$.

(a) ¿Cuántas truchas quedan después de seis meses? ¿Después de un año?

(b) Encuentre $P(3)$ e interprétela en términos de las truchas.

(c) ¿Cuándo quedan 100 truchas?

(d) Trace la gráfica del número de truchas respecto al tiempo y describa cómo está cambiando la población. ¿Qué puede estar causando esto?

37. La población, P, de Nicaragua era de 3.6 millones en 1990 y crecía a una tasa anual de 3.4%. Sea t el tiempo en años desde 1990.

(a) Exprese P como función en la forma $P = P_0a^t$.

(b) Exprese P como función exponencial usando la base e.

(c) Compare las tasas de crecimiento continuo y anual.

38. El producto mundial bruto es $W = 45(1.047)^t$, donde W está en trillones de dólares y t está en años desde el 2000. Encuentre una fórmula para el producto mundial bruto que utilice una tasa de crecimiento continua.

39. La población del mundo se puede representar con $P = 6.1(1.0126)^t$, donde P está en miles de millones de personas y en años desde el 2000. Encuentre una fórmula para la población del mundo que emplee una tasa de crecimiento continua.

40. ¿Qué tasa de crecimiento anual porcentual es equivalente a una tasa de crecimiento continua porcentual de 8 por ciento?

41. ¿Qué tasa de crecimiento continua porcentual es equivalente a una tasa de crecimiento anual de 10 por ciento?

42. En 1980 había unos 170 millones de vehículos (automóviles y camiones) y cerca de 227 millones de habitantes en Estados Unidos. El número de vehículos ha estado creciendo a razón de 4% al año, mientras que la población ha estado creciendo 1% al año. ¿En qué año habrá, en promedio, un vehículo por persona?

1.7 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EXPONENCIALES

Muchas cantidades en la naturaleza cambian de acuerdo con la función de crecimiento o decrecimiento exponencial de la forma $P = P_0e^{kt}$, donde P_0 es la cantidad inicial y k es la tasa de crecimiento o decrecimiento continua.

Ejemplo 1 La Agencia de Protección Ambiental (APA) investigó recientemente un derrame de yodo radiactivo. El nivel de radiación en el sitio era de aproximadamente 2.4 milirrems/hora (cuatro veces más el límite máximo aceptable de 0.6 milirrems/hora), por lo que la APA ordenó una evacuación del área circundante. El nivel de radiación de una fuente de yodo decrece a una tasa continua por hora de $k = -0.004$.

(a) ¿Cuál era el nivel de radiación 24 horas después?

(b) Calcule el número de horas hasta que el nivel de radiación haya alcanzado el límite máximo aceptable y los habitantes puedan regresar.

Solución (a) El nivel de radiación, R, en milirrems/hora, en el tiempo t, en horas a partir de la medición inicial, está dado por

$$R = 2.4e^{-0.004t},$$

por lo que el nivel de radiación 24 horas después era de

$$R = 2.4e^{(-0.004)(24)} = 2.18 \text{ millirems/hora}$$

(b) La gráfica de $R = 2.4e^{-0.004t}$ está en la figura 1.69. El máximo valor aceptable de R es de 0.6 milirrems/hora, lo que ocurre aproximadamente en $t = 350$. Usando logaritmos, obtenemos

$$\begin{aligned} 0.6 &= 2.4e^{-0.004t} \\ 0.25 &= e^{-0.004t} \\ \ln 0.25 &= -0.004t \\ t &= \frac{\ln 0.25}{-0.004} = 346.57. \end{aligned}$$

Los habitantes no podrán regresar en 346.57 horas, o en aproximadamente 15 días.

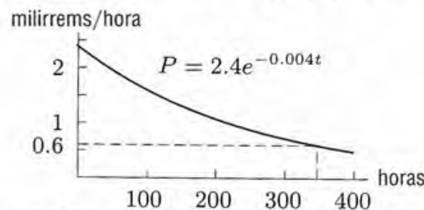


Figura 1.69. Nivel de radiación del yodo radiactivo.

Ejemplo 2 La población de Kenia era de 19.5 millones en 1984 y de 21.2 millones en 1986. Suponiendo que la población aumenta exponencialmente, encuentre una fórmula para la población de Kenia como función del tiempo.

Solución Si medimos la población, P, en millones y el tiempo, t, en años desde 1984, podemos decir que

$$P = P_0e^{kt} = 19.5e^{kt},$$

donde $P_0 = 19.5$ es el valor inicial de P. Encontramos k a partir del hecho de que $P = 21.2$ cuando $t = 2$; por tanto

$$21.2 = 19.5e^{k\cdot 2}.$$

Para calcular k dividimos ambos lados de la ecuación entre 19.5, lo cual nos da

$$\frac{21.2}{19.5} = e^{2k}.$$

Ahora tomemos el logaritmo natural por ambos lados de la ecuación:

$$\ln\left(\frac{21.1}{19.5}\right) = \ln(e^{2k}).$$

Puesto que $\ln(e^{2k}) = 2k$, ésta se convierte en

$$\ln\left(\frac{21.2}{19.5}\right) = 2k.$$

Así, usando una calculadora, obtenemos

$$k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{21.2}{19.5}\right) = 0.042,$$

y, por tanto,

$$P = 19.5e^{0.042t}.$$

Como $k = 0.042 = 4.2\%$, la población de Kenia estaba creciendo a una tasa continua de 4.2% al año.

Tiempo de duplicación y vida media

Cada función de crecimiento exponencial tiene un tiempo de duplicación fijo y cada función de decrecimiento exponencial tiene una vida media fija.

> El **tiempo de duplicación** de una cantidad que aumenta exponencialmente es el tiempo que se requiere para que la cantidad se duplique.
> La **vida media** de una cantidad que decrece exponencialmente es el tiempo que se requiere para que ésta se reduzca a la mitad.

Ejemplo 3 Demuestre en forma algebraica que cada función que crece exponencialmente tiene un tiempo de duplicación fijo.

Solución Considere la función exponencial $P = P_0a^t$. Para cualquier base a con $a > 1$ hay un número positivo d, tal que $a^d = 2$. Demostramos que d es el tiempo de duplicación. Si la población es P al tiempo t, entonces en el tiempo $t + d$, la población es

$$P_0a^{t+d} = P_0a^ta^d = (P_0a^t)(2) = 2P.$$

Entonces, no importa cuál sea la cantidad inicial y tampoco cuál sea el tiempo inicial, el tamaño de la población se duplica en d unidades de tiempo después.

Ejemplo 4 La liberación de clorofluorocarbonos que se emplean en acondicionadores de aire y en aerosoles domésticos (atomizadores para el cabello, crema de afeitar, etc.) destruye la capa de ozono de la alta atmósfera. La cantidad de ozono, Q, se está desintegrando exponencialmente a una tasa continua de 0.25% por año. ¿Cuál es la vida media del ozono? En otras palabras, a esta tasa, ¿cuánto tardará para que la mitad del ozono desaparezca?

Solución Si Q_0 es la cantidad inicial de ozono y t es en años, entonces

$$Q = Q_0e^{-0.0025t}.$$

Deseamos hallar el valor de t haciendo $Q = Q_0/2$, así que

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0e^{-0.0025t}.$$

Al dividir ambos lados de la ecuación entre Q_0 y luego tomar el logaritmo natural obtenemos

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.0025t,$$

de modo que

$$t = \frac{\ln(1/2)}{-0.0025} = 277 \text{ años}.$$

La mitad del ozono atmosférico presente desaparecerá en 277 años.

Aplicaciones financieras: interés compuesto

Suponga que depositamos \$100 en un banco que paga intereses a una tasa de 8% al año. ¿Cuánto hay en la cuenta al final del año? Esto depende de qué tan seguido el interés sea compuesto. Si el interés ingresa en la cuenta *anualmente*, es decir, sólo al final del año, entonces el saldo en la cuenta después de un año será \$108. No obstante, si el interés se paga dos veces al año, entonces se paga el 4% al final de los primeros seis meses y 4% al final del año. Se gana un poco más de dinero de este modo, ya que el interés que se paga a principios del año genera intereses durante el resto del año. Este efecto se denomina *composición*.

En general, cuanto mayor sea la frecuencia con la que se compone el interés, más dinero se ganará (aunque puede ser que el incremento no sea alto). ¿Qué ocurrirá si el interés es compuesto con mayor frecuencia, por ejemplo, cada minuto o cada segundo? El beneficio de incrementar la frecuencia de la composición se vuelve insignificante después de cierto punto. Cuando se llega a ese punto, hacemos el saldo usando el número e y se dice que el interés por año es *compuesto continuamente*. Si hemos depositado \$100

en una cuenta que paga un interés de 8% al año compuesto continuamente, el saldo después de un año será de $100e^{0.08} = \$108.33$. La composición se analiza posteriormente en la sección Enfoque sobre modelado, en la página 75. En general:

> Supongamos que P_0 es la cantidad inicial depositada en una cuenta que paga una tasa de interés de r por año. Sea P el saldo en la cuenta después de t años. Entonces,
> - Si el interés es compuesto anualmente: $P = P_0(1 + r)^t$.
> - Si el interés es compuesto continuamente: $P = P_0e^{rt}$, donde $e = 2.71828...$

Escribimos P_0 para el depósito inicial debido a que es el valor de P cuando $t = 0$. Observe que para una tasa de interés de 7%, $r = 0.07$. Si la tasa es continua, lo diremos explícitamente.

Ejemplo 5 Suponga que un banco anuncia una tasa de interés de 8% al año. Si usted deposita \$5,000, ¿cuánto habrá en la cuenta tres años después si el interés es compuesto **(a)** anualmente, **(b)** continuamente?

Solución
(a) Para la composición anual, $P = P_0(1 + r)^t = 5{,}000(1.08)^3 = \$6{,}298.56$.
(b) Para la composición continua, $P = P_0e^{rt} = 5{,}000e^{0.08\cdot 3} = \$6{,}356.25$. Como era de esperarse, la cantidad en la cuenta tres años después es mayor si el interés es compuesto continuamente (\$6,356.25) que si se integra anualmente (\$6,298.56).

Ejemplo 6 Si se depositan \$10,000 en una cuenta que genera un interés a una tasa de 5% por año, compuesto continuamente, ¿cuánto tiempo se necesitará para que el saldo de la cuenta sea de \$15,000?

Solución Debido a que el interés se compone continuamente, utilizamos $P = P_0e^{rt}$ con $r = 0.05$ y $P_0 = 10{,}000$. Deseamos encontrar el valor de t para el cual $P = 15{,}000$. La ecuación es

$$15{,}000 = 10{,}000e^{0.05t}.$$

Ahora dividimos ambos lados de la ecuación entre 10,000 y después de tomar logaritmos despejamos t:

$$\begin{aligned} 1.5 &= e^{0.05t} \\ \ln(1.5) &= \ln(e^{0.05t}) \\ \ln(1.5) &= 0.05t \\ t &= \frac{\ln(1.5)}{0.05} = 8.1093. \end{aligned}$$

Se necesitan aproximadamente 8.1 años para que el saldo en la cuenta sea de \$15,000.

Ejemplo 7 **(a)** Calcule el tiempo de duplicación, D, para las tasas de interés de 2%, 3%, 4% y 5% por año, compuestas anualmente.
(b). Utilice sus respuestas del inciso (a) para comprobar que una tasa de interés de i% produce un tiempo de duplicación aproximado para valores pequeños de i con

$$D \approx \frac{70}{i} \text{ años.}$$

Ésta es la "regla del 70" que usan los banqueros: para calcular el tiempo de duplicación aproximado de una inversión, divida 70 entre la tasa de interés anual porcentual.

Solución **(a)** Tenemos el tiempo de duplicación para una tasa de interés al 2% anual usando la fórmula $P = P_0(1.02)^t$ con t en años. Para calcular el valor de t para el cual $P = 2P_0$, obtenemos

$$\begin{aligned} 2P_0 &= P_0(1.02)^t \\ 2 &= (1.02)^t \\ \ln 2 &= \ln(1.02)^t \\ \ln 2 &= t\ln(1.02) && \text{(usando la tercera propiedad de logaritmos)} \\ t &= \frac{\ln 2}{\ln 1.02} = 35.003 \text{ años.} \end{aligned}$$

Con una tasa de interés anual de 2% lleva cerca de 35 años que una inversión duplique su valor. De igual manera, vemos los tiempos de duplicación para el 3%, 4% y 5% en la tabla 1.29.

Tabla 1.29 *Tiempo de duplicación como función de la tasa de interés*

i (tasa de crecimiento anual porcentual)	2	3	4	5
D (tiempo de duplicación en años)	35.003	23.450	17.673	14.207

(b) Calculamos $(70/i)$ para $i = 2, 3, 4, 5$. Los resultados se muestran en la tabla 1.30.

Tabla 1.30 *Tiempo aproximado de duplicación como función de la tasa de interés: regla de 70*

i (tasa de crecimiento anual porcentual)	2	3	4	5
$(70/i)$ (tiempo de duplicación aproximado en años)	35.000	23.333	17.500	14.000

Al comparar las tablas 1.29 y 1.30 vemos que la cantidad $(70/i)$ es una buena aproximación del tiempo de duplicación, D, para las tasas de interés pequeñas que consideramos.

Valor presente y futuro

Muchos convenios de negocios involucran pagos a futuro. Por ejemplo, cuando se compra un automóvil a crédito, los pagos se hacen durante cierto periodo de tiempo. Obviamente es peor que nos paguen \$100 en el futuro a que nos paguen \$100 hoy por muchas razones. Si nos dan dinero en el presente podemos hacer algo más con él, por ejemplo, ponerlo en el banco, invertirlo en algún lugar, o gastarlo. Por tanto, incluso sin considerar la inflación, si aceptamos un pago en el futuro, esperaríamos que se nos pagara más para compensar esta pérdida de ganancias potenciales.[31] La cuestión que ahora consideraremos es, ¿cuánto más?

Para simplificar el asunto, consideremos sólo lo que perderíamos si no ganamos intereses; no consideremos el efecto de la inflación. Veamos ciertos números específicos. Suponga que depositamos \$100 en una cuenta que gana 7% de interés anual compuesto, de modo que al cabo de un año tenemos \$107. Por consiguiente, \$100 de hoy valdrán \$107 de aquí a un año. Decimos que los \$107 son el *valor futuro* de los \$100 y que los \$100 son el *valor presente* de los \$107. En general, decimos lo siguiente:

- El **valor futuro**, B, de un pago, P, es la cantidad a la cual P habría aumentado si se depositaran ahora en una cuenta bancaria que rinda interés.
- El **valor presente**, P, de un pago futuro, B, es la cantidad que se tendría que haber depositado en una cuenta bancaria hoy para producir exactamente B en la cuenta en el tiempo fijado en el futuro.

Debido al interés ganado, el valor futuro es mayor que el valor presente. La relación entre los valores presente y futuro depende de la tasa de interés, como se muestra a continuación.

Suponga que B es el *valor futuro* de P y P es el *valor presente* de B.
Si el interés es compuesto anualmente a una tasa r durante t años, entonces

$$B = P(1+r)^t, \quad \text{o equivalentemente,} \quad P = \frac{B}{(1+r)^t}.$$

Si el interés es compuesto continuamente a una tasa r durante t años, entonces

$$B = Pe^{rt}, \quad \text{o lo que es igual,} \quad P = \frac{B}{e^{rt}} = Be^{-rt}$$

La tasa, r, algunas veces se llama *tasa de descuento*. El valor presente con frecuencia se denota por *VP* y el valor futuro por *VF*.

[31]Éste es conocido como el valor del dinero a través del tiempo.

Ejemplo 8 Usted gana la lotería y le ofrecen elegir entre un millón en cuatro pagos anuales de $250,000 cada uno a partir de ahora, y un pago total de $920,000 en este momento. Suponga una tasa de interés del 6%, compuesta continuamente, sin considerar impuestos, ¿cuál escogería?

Solución Supongamos que elige la opción con el mayor valor presente, y recibe el primero de los cuatro pagos de $250,000 en este momento, por lo que

$$\text{Valor presente del primer pago} = \$250{,}000$$

En un año recibirá el segundo pago, y por tanto

$$\text{Valor presente del segundo pago} = \$250{,}000e^{-0.06(1)}.$$

Si calculamos de igual manera el valor presente de los pagos tercero y cuarto, tenemos:

$$\begin{aligned}\text{Valor presente total} &= \$250{,}000 + \$250{,}000e^{-0.06(1)} + \$250{,}000e^{-0.06(2)} + \$250{,}000e^{-0.06(3)}\\ &= \$250{,}000 + \$235{,}441 + \$221{,}730 + \$208{,}818\\ &= \$915{,}989.\end{aligned}$$

Como el valor presente de los cuatro pagos es menor de $920,000, a usted le conviene optar por los $920,000 ahora mismo.

Por otra parte, podemos comparar los valores futuros de los dos esquemas de pago. Calculamos el valor futuro de ambos esquemas después de tres años, fecha del último pago de $250,000. En ese momento,

$$\text{Valor futuro del pago total} = \$920{,}000e^{0.06(3)} = \$1{,}101{,}440.$$

El valor futuro del primer pago de $250,000 es $\$250{,}000e^{0.06(3)}$. Calculando el valor futuro de los otros pagos de forma parecida, tenemos:

$$\begin{aligned}\text{Valor futuro total} &= \$250{,}000e^{0.06(3)} + \$250{,}000e^{0.06(2)} + \$250{,}000e^{0.06(1)} + \$250{,}000\\ &= \$299{,}304 + \$281{,}874 + \$265{,}459 + \$250{,}000\\ &= \$1{,}096{,}637.\end{aligned}$$

Como esperamos, el valor futuro del pago de $920,000 es mayor, por lo que es mejor tomar los $920,000 en este momento.

(**Nota:** Si lee las letras pequeñas, encontrará que muchas loterías no hacen sus pagos inmediatamente, sino que, por lo general, los distribuyen, a veces en largos periodos a futuro. Esto es para reducir el valor presente de los pagos que se realizarán, de modo que el valor de los premios ¡es menor de lo que al principio pudiera parecer!)

Problemas para la sección 1.7

1. Encuentre el tiempo en el que se duplica una cantidad que aumenta 7% al año.
2. Si la cantidad de una sustancia disminuye 4% en 10 horas, determine su vida media.
3. La vida media de una sustancia radiactiva es de 12 días. Inicialmente hay 10.32 gramos.
   (a) Escriba una ecuación para la cantidad, A, de la sustancia como función del tiempo.
   (b) ¿Cuándo se reduce la sustancia a un gramo?
4. La vida media de nicotina en la sangre es de dos horas. Una persona absorbe 0.4 miligramos de nicotina al fumar un cigarro. Complete la siguiente tabla con la cantidad de nicotina que queda en la sangre después de t horas. Calcule la duración de tiempo hasta que la cantidad de nicotina se reduzca a 0.04 miligramos.

t (horas)	0	2	4	6	8	10
Nicotina (mg)	0.4					

5. Si usted deposita $10,000 en una cuenta que genera intereses a una tasa anual de 8% compuesta continuamente, ¿cuánto dinero tendrá en su cuenta después de cinco años?

6. Usted invierte \$5,000 en una cuenta que paga un interés compuesto continuamente.

(a) ¿Cuánto dinero tendrá en la cuenta después de ocho años si la tasa de interés anual es de 4 por ciento?

(b) Si quiere que la cuenta tenga \$8,000 después de ocho años, ¿qué tasa de interés se necesita anualmente?

7. Suponga que se invierten \$1,000 en una cuenta que genera intereses a una tasa de 5.5% al año. ¿Cuánto dinero hay en la cuenta después de ocho años si el interés es compuesto

(a) anualmente? (b) continuamente?

8. Cada curva de la figura 1.70 representa el saldo de una cuenta bancaria en la que se realizó un depósito en el tiempo cero. Suponiendo que el interés es compuesto continuamente, encuentre:

(a) La curva que representa el mayor depósito inicial.

(b) La curva que representa la mayor tasa de interés.

(c) Dos curvas que representan el mismo depósito inicial.

(d) Dos curvas que representan la misma tasa de interés.

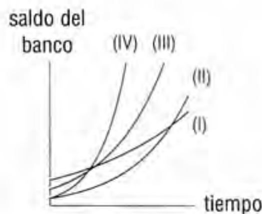


Figura 1.70.

9. Usted necesita \$10,000 en su cuenta en tres años a partir de ahora y la tasa de interés es de 8% anual compuesta continuamente. ¿Cuánto debe depositar en este momento?

10. La presión del aire, P, disminuye exponencialmente con la altura, h, en metros sobre el nivel del mar:

$$P = P_0 e^{-0.00012h}.$$

donde P_0 es la presión del aire a nivel del mar.

(a) En la cumbre del monte McKinley, con una altura de 6,198 metros (aproximadamente 20,330 pies), ¿cuál es la presión del aire como porcentaje de la presión al nivel del mar?

(b) La altitud máxima de crucero de un jet comercial es de 12,000 metros, aproximadamente (cerca de 39,000 pies). A dicha altitud, ¿cuál es la presión del aire como porcentaje del valor que se tiene al nivel del mar?

11. Una población animal que crece exponencialmente asciende a 500 en el tiempo $t = 0$; dos años después es de 1,500. Encuentre una fórmula para el tamaño de la población en t años y determine el tamaño de la población en $t = 5$.

12. (a) La figura 1.71 demuestra el crecimiento exponencial. Comenzando en $t = 0$, calcule el tiempo para que la población se duplique.

(b) Repita el inciso (a), pero esta vez comience en $t = 3$.

(c) Escoja cualquier otro valor de t como punto de partida y demuestre que el tiempo de duplicación es el mismo sin importar en dónde empiece.

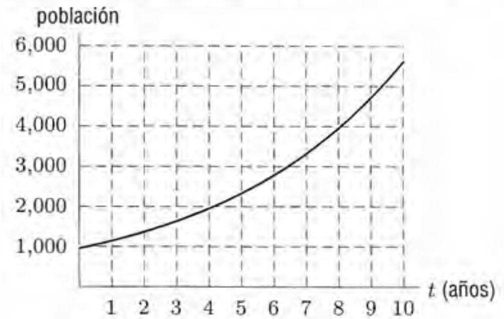


Figura 1.71.

13. Una población que actualmente tiene 200 habitantes está creciendo 5% al año.

(a) Escriba una fórmula para la población, P, como función del tiempo, t, para años en el futuro.

(b) Trace la gráfica de P respecto a t.

(c) Calcule la población a 10 años.

(d) Utilice la gráfica para calcular el tiempo de duplicación de la población.

14. La fluoxetina antidepresiva (o Prozac) tiene una vida media de aproximadamente tres días. ¿Qué porcentaje de la dosis permanecerá en el cuerpo después de un día? ¿Después de una semana?

15. La figura 1.72 muestra los balances de dos cuentas bancarias. Ambas generan la misma tasa de interés, pero una está compuesta continuamente y otra en forma anual. ¿Qué curva corresponde a cada método de composición? ¿Cuál es el depósito inicial en cada caso?

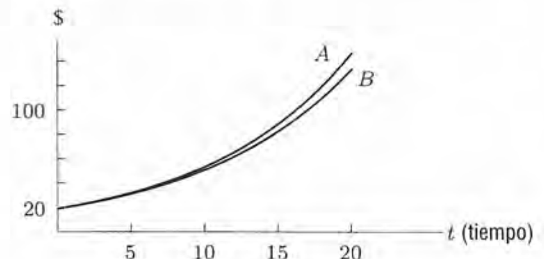


Figura 1. 72.

16. Una taza de café contiene 100 miligramos de cafeína, que se elimina del cuerpo a una tasa continua de 17% cada hora.

(a) Escriba una fórmula para la cantidad, A mg, de cafeína en el cuerpo t horas después de tomar una taza de café.

(b) Trace la gráfica de la función del inciso (a). Utilice la gráfica para calcular la vida media de la cafeína.

(c) Utilice logaritmos para calcular la vida media de la cafeína.

17. Uno de los principales contaminantes de un accidente nuclear, como el de Chernobil, es el estroncio 90, el cual se desintegra exponencialmente a razón de 2.5% por año.

(a) Escriba el porcentaje del estroncio 90 que está presente, P, como función de los años, t, desde que ocurrió el accidente nuclear. [*Sugerencia*: considere que el 100% del contaminante está presente en el tiempo $t = 0$].

(b) Trace una gráfica de P respecto a t.

(c) Calcule la vida media del estroncio 90.

(d) Después del desastre de Chernobil se pronosticó que transcurrirían 100 años antes que la región fuera segura para que la habitaran seres humanos. Calcule el porcentaje de estroncio 90 original restante en este tiempo.

18. La tabla muestra el gasto anual en cuidados a la salud *per capita* en los Estados Unidos.[32]

(a) Demuestre que el incremento en el gasto por cuidados a la salud es casi exponencial.

(b) Calcule el tiempo de duplicación del gasto en cuidados a la salud.

Año	1970	1972	1974	1976	1978	1980	1982
Gasto	349	428	521	665	822	1,055	1,348

19. Si se depositan $12,000 en una cuenta que paga un interés de 8% anual compuesto continuamente, ¿cuánto tiempo se necesitará para que el saldo sea de $20,000?

20. En 1994 la población mundial era de 5.6 mil millones y se calculó que alcanzaría 8.5 mil millones de habitantes para el año 2030. ¿Qué tasa de crecimiento anual se estimó?

21. Si el tamaño de una colonia de bacterias se duplica en cinco horas, ¿cuánto tiempo se necesitará para que el número de bacterias se triplique?

22. Usted desea invertir dinero en la educación de su hijo en un certificado de depósito (CD). Usted quiere que éste valga $12,000 en diez años. ¿Cuánto debe invertir si el CD genera intereses a una tasa anual de 9% compuesta

(a) anualmente? **(b)** continuamente?

23. Por lo general, cuando una persona renta un departamento el propietario le pide un depósito de fianza que le devolverá si no ocasiona daños al departamento. En Massachussets, el propietario del departamento debe pagar al inquilino el interés sobre el depósito una vez al año, a razón de 5% al año, compuesto anualmente. Sin embargo, el casero puede invertir el dinero a una tasa de interés más alta (o más baja). Supongamos que el propietario invierte un depósito de $1,000 a una tasa anual de

(a) 6% compuesta continuamente.

(b) 4% compuesta continuamente.

En cada caso, determine la ganancia o la pérdida neta del propietario al final del primer año. (Redondee su respuesta al centavo más cercano.)

24. La infección acumulativa por VIH alrededor del mundo aumentó exponencialmente de 2.5 millones en 1985 a 58.0 millones en el 2000.[33] (VIH es el virus que provoca el SIDA.)

(a) Dé una fórmula para las infecciones por VIH, H (en millones), como función del número de años, t, desde 1985. Utilice la forma $H = H_0e^{kt}$. Trace la gráfica de esta función.

(b) ¿Cuál fue el cambio anual continuo porcentual en las infecciones por VIH entre 1985 y 2000?

(c) En el año 2000 el número de nuevas infecciones por VIH fue menor que en el año anterior. ¿Parece razonable que la función exponencial sea una forma posible de modelar estos datos después del año 2000?

25. En 1626 la isla de Manhattan fue vendida en $24. Suponga que ese dinero se invirtió en una cuenta con interés compuesto continuamente.

(a) ¿Cuánto dinero habría en la cuenta en el año 2000 si la tasa de interés anual fuera de

(i) 5%? **(ii)** 7%?

(b) Si la tasa de interés anual fuera de 6%, ¿en qué año la cuenta habría valido un millón de dólares?

26. En 1923, 18 osos koala fueron llevados a la Isla Canguro frente a la costa de Australia. En 1993 la población era de aproximadamente 5,000 koalas. Suponiendo un crecimiento exponencial, encuentre la tasa de crecimiento (continua) de la población durante este periodo. Encuentre una fórmula para la población animal como función del número de años desde 1923 y calcule dicha población para el año 2010.

27. La captura total de pesca marina mundial en 1950 fue de 17 millones de toneladas y en 1995 fue de 91 millones de toneladas.[34] Si la pesca marina crece exponencialmente, encuentre la tasa (continua) de crecimiento y utilícela para pronosticar la captura total de pesca marina en el año 2020.

28. **(a)** Utilice la regla del 70 para pronosticar el tiempo de duplicación de una inversión que está generando un interés de 8% anual.

(b) Determine exactamente el tiempo de duplicación y compare su respuesta con el inciso (a).

29. Una sustancia radiactiva tiene una vida media de ocho años. Si inicialmente hay 200 gramos, ¿cuánto quedará al final de 12 años? ¿Cuánto tiempo se necesita para que permanezca sólo el 10% del original?

30. La cantidad, Q, de carbono 14 radiactivo que permanece t años después de que un organismo muere está dada por la fórmula

$$Q = Q_0e^{-0.000121t}$$

donde Q_0 es la cantidad inicial.

(a) Un cráneo descubierto en una excavación arqueológica tiene 15% de la cantidad original de carbono 14 presente. Calcule la edad de ese cráneo.

(b) Calcule la vida media del carbono14.

[32]*Statistical Abstracts of the US 1988*, p. 86, Tabla 129.

[33]The Worldwatch Institute, *Vital Signs 2001*, W. W. Norton, Nueva York, 2001, p. 79.

[34]J. Madeleine Nash, "The Fish Crisis", *Time*, 11 de agosto de 1997, p. 67.

31. Gracias a un innovador programa de salud pública rural, la mortalidad infantil en Senegal, África Occidental, se ha reducido a una tasa de 10% anual. ¿En cuánto tiempo la mortalidad infantil se reducirá 50 por ciento?

32. Un cuadro supuestamente pintado por Vermeer (1632-1675) contiene 99.5% de carbono 14 (con una vida media de 5,730 años). A partir de esta información decida si la pintura es falsa o no. Explique su razonamiento.

33. El interés se compone anualmente. Considere las siguientes opciones de pagos que más le convengan a usted:

Opción 1: $1,500 ahora y $3,000 en un año.

Opción 2: $1,900 ahora y $2,500 en un año.

(a) Si la tasa de interés en los ahorros fuera de 5% anual, ¿cuál preferiría?

(b) ¿Existe alguna tasa de interés que lo haga optar por otra alternativa? Explique.

34. Una persona recibirá un pago de $2,000 por realizar un trabajo durante un año. Se consideran tres opciones de pago. La primera opción es pagarle los $2,000 completos en este momento. La segunda opción es pagarle $1,000 ahora y $1,000 en un año. La tercera opción es pagarle los $2,000 completos en un año. Suponga que hay una tasa de interés anual de 5% al año compuesta continuamente.

(a) Sin realizar ningún cálculo, ¿qué opción le conviene más al trabajador, financieramente? Explique.

(b) Determine el valor futuro, en un año, de las tres opciones.

(c) Encuentre el valor presente de las tres opciones.

35. Un socio de negocios que le debe a usted $3,000 ofrece pagarle $2,800 ahora, o en tres anualidades de $1,000 cada una, pagando la primera en este momento. Si usted emplea sólo razones financieras para tomar su decisión, ¿qué opción debe elegir? Justifique su respuesta, suponiendo una tasa de interés del mercado de 6% compuesta continuamente.

36. Big Tree McGee está negociando su contrato de reclutamiento con un equipo de básquetbol profesional. Han acordado un convenio de tres años que pagará a Big Tree una cantidad fija al final de cada uno de los tres años, más un bono por firmar al principio de su primer año. Aún están regateando las cantidades y Big Tree debe decidir entre un gran bono por firmar y pagos fijos cada año, o un bono más pequeño con pagos que aumentan cada año. Las dos opciones se resumen en la siguiente tabla. Todos los valores son pagos en millones de dólares.

	Bono por firmar	Año 1	Año 2	Año 3
Opción 1	6.0	2.0	2.0	2.0
Opción 2	1.0	2.0	4.0	6.0

(a) Big Tree decide invertir todo el ingreso en fondos de acciones en la bolsa, los cuales espera que crezcan a una tasa de 10% anual compuesta continuamente. A él le gustaría elegir la opción del contrato que le dé el mayor valor futuro al término de los tres años, cuando se haga el último pago. ¿Qué opción debe elegir?

(b) Calcule el valor presente de cada oferta del contrato.

37. Una empresa está considerando si comprar una máquina nueva que tendrá un costo de $97,000. Los flujos de dinero anuales esperados (ajustados por impuestos y depreciación) que serían generados por la nueva máquina se dan en la siguiente tabla:

Año	1	2	3	4
Movimiento en efectivo	$50,000	$40,000	$25,000	$20,000

(a) Encuentre el valor presente total de los flujos de dinero. Trate el flujo de dinero de cada año como la suma total al final del año y utilice una tasa de interés de 7.5% por año, compuesta anualmente.

(b) Basándose en una comparación del costo de la máquina y del valor presente de los flujos de dinero, ¿recomendaría la compra de la máquina?

38. Usted compra un automóvil que tiene una garantía de un año y está considerando si comprar una garantía ampliada de $375. La garantía ampliada cubre los dos años siguientes a la fecha en que expira la garantía por un año. Usted estima que los gastos anuales que serían cubiertos por la garantía ampliada son de $150 al final del primer año, y de $250 al final del segundo año. La tasa de interés es de 5% al año, compuesta anualmente. ¿Le conviene comprar la garantía ampliada? Explique.

39. Usted tiene la opción de renovar el contrato de servicio de su vieja lavavajillas de tres años. El nuevo contrato de servicio por tres años cuesta $200. La tasa de interés es de 7.25% al año, compuesta anualmente, y usted estima que los costos de reparación, si no compra el contrato de servicio, serán de $50 al final del primer año, de $100 al finalizar el segundo, y de $150 cuando termine el tercer año. ¿Debe comprar el contrato de servicio? Explique.

1.8 NUEVAS FUNCIONES A PARTIR DE OTRAS ANTERIORES

Hemos estudiado las funciones lineales y exponenciales, así como la función logarítmica. En esta sección aprenderemos cómo crear nuevas funciones al desplazar, estirar y agregar las funciones que ya conocemos.

Funciones compuestas

Una gota de agua cae en una toalla de papel. El área, A, de la mancha húmeda circular es una función de r, su radio, que es una función del tiempo, t. Se sabe que $A = f(r) = pr^2$; suponga que $r = g(t) = t + 1$. Al sustituir, expresamos A como función de t:

$$A = f(g(t)) = \pi(t+1)^2.$$

La función $f(g(t))$ es una "función de una función", o una *función compuesta*, en la cual hay una *función adentro* y una *función afuera*. Para calcular $f(g(2))$ primero sumamos uno ($g(2) = 2 + 1 = 3$) y después lo elevamos al cuadrado y multiplicamos por p. Tenemos

$$f(g(2)) = \pi(2+1)^2 \quad = \quad \pi 3^2 \quad = \quad 9\pi.$$

↖ Primer cálculo ↖ Segundo cálculo

La función interior es $t + 1$ y la función exterior es elevar al cuadrado y multiplicar por p. Por lo general, la función interior representa al cálculo que se realiza primero, y la función exterior representa al cálculo que se hace en segundo lugar.

Ejemplo 1 Si $f(t) = t^2$ y $g(t) = t + 2$, determine

(a) $f(t+1)$ **(b)** $f(t)+3$ **(c)** $f(t+h)$ **(d)** $f(g(t))$ **(e)** $g(f(t))$

Solución **(a)** Como $t + 1$ es la función interior, $f(t + 1) = (t + 1)^2$.
(b) Aquí sumamos 3 a $f(t)$, por lo que $f(t) + 3 = t^2 + 3$.
(c) Ya que $t + h$ es la función interior, $f(t + h) = (t + h)^2$.
(d) Como $g(t) = t + 2$, si sustituimos $t + 2$ en f obtenemos $f(g(t)) = f(t + 2) = (t + 2)^2$.
(e) Como $f(t) = t^2$, si sustituimos t^2 en g obtenemos $g(f(t)) = g(t^2) = t^2 + 2$.

Ejemplo 2 Si $f(x) = e^x$ y $g(x) = 5x + 1$, encuentre **(a)** $f(g(x))$ **(b)** $g(f(x))$

Solución **(a)** Cuando sustituimos $g(x) = 5x + 1$ en f tenemos $f(g(x)) = f(5x + 1) = e^{5x+1}$.
(b) Si sustituimos $f(x) = e^x$ en g tenemos $g(f(x)) = g(e^x) = 5e^x + 1$.

Ejemplo 3 Con la siguiente tabla, determine $g(f(0))$, $f(g(0))$, $f(g(1))$ y $g(f(1))$.

x	0	1	2	3
$f(x)$	3	1	−1	−3
$g(x)$	0	2	4	6

Solución Para calcular $g(f(0))$ primero hallamos $f(0) = 3$ con base en la tabla. Entonces, tenemos que $g(f(0)) = g(3) = 6$.
Para $f(g(0))$ necesitamos calcular primero $g(0)$. Como $g(0) = 0$, tenemos $f(g(0)) = f(0) = 3$.
Siguiendo un razonamiento similar, tenemos $f(g(1)) = f(2) = -1$ y $g(f(1)) = g(1) = 2$.

Podemos escribir una función compuesta usando una nueva variable u que represente el valor de la función interior. Por ejemplo,

$$y = (t+1)^4 \quad \text{es lo mismo que} \quad y = u^4 \quad \text{con} \quad u = t+1.$$

Otras expresiones de u, como por ejemplo $u = (t + 1)^2$, con $y = u^2$, también son posibles.

Ejemplo 4 Emplee una nueva variable u para la función interior con el fin de expresar cada una de las siguientes funciones como una función compuesta:

(a) $y = \ln(3t)$ **(b)** $w = 5(2r+3)^2$ **(c)** $P = e^{-0.03t}$

Solución **(a)** Consideramos que la función interior es $3t$, por tanto, $y = \ln u$ con $u = 3t$.
(b) Tomamos a la función interior como $2r + 3$, por lo que $w = 5u^2$ con $u = 2r + 3$.
(c) Tomamos en cuenta que la función interior es $-0.03t$, así, $P = e^u$ con $u = -0.03t$.

Estiramiento* de gráficas

La gráfica de $y = f(x)$ está en la figura 1.73. ¿Qué semeja la gráfica de $y = 3f(x)$? El factor 3 en la función $y = 3f(x)$ aumenta cada valor de $f(x)$ al multiplicarlo por 3. ¿A qué se parece la gráfica de $y = -2f(x)$? El factor -2 en la función $y = -2f(x)$ alarga a $f(x)$ al multiplicarla por 2 y la refleja respecto al eje x. Véase la figura 1.74.

> Al multiplicar una función por una constante, c, la gráfica se alarga verticalmente (si $c > 1$), o se contrae verticalmente (si $0 < c < 1$). Un signo negativo (si $c < 0$) refleja la gráfica respecto al eje x, independientemente del alargamiento o de la contracción.

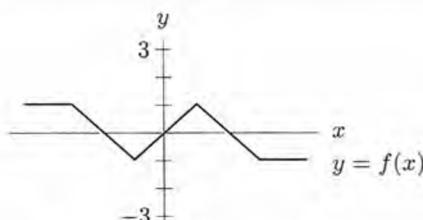


Figura 1.73. Gráfica de $f(x)$.

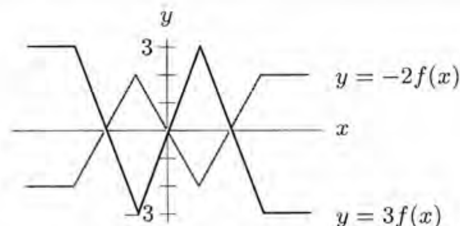


Figura 1.74. Múltiplos de la función $f(x)$.

Gráficas desplazadas

Considere la función $y = x^2 + 4$. Las coordenadas de y para esta función son exactamente cuatro unidades mayores que las coordenadas de y correspondientes a la función $y = x^2$. Por tanto, la gráfica de $y = x^2 + 4$ se obtiene a partir de la gráfica de $y = x^2$ al sumar 4 a la coordenada de y de cada punto, es decir, al desplazar la gráfica de $y = x^2$ hacia arriba cuatro unidades (véase la figura 1.75).

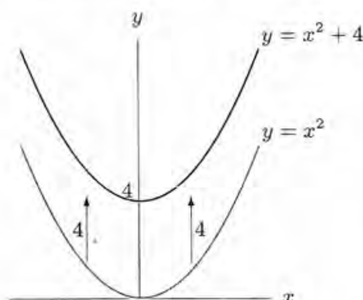


Figura 1.75. Desplazamiento vertical: gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 + 4$.

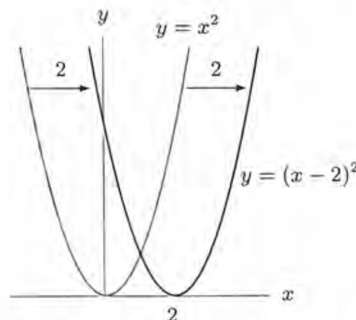


Figura 1.76. Desplazamiento horizontal: gráficas de $y = x^2$ y $y = (x - 2)^2$.

También podemos desplazar una gráfica hacia la izquierda o hacia la derecha. En la figura 1.76 podemos observar que la gráfica de $y = (x - 2)^2$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia la derecha dos unidades. En general,

> - La gráfica de $y = f(x) + k$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada hacia arriba k unidades (hacia abajo si k es negativa).
> - La gráfica de $y = f(x - k)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada hacia la derecha k unidades (hacia la izquierda si k es negativa).

*N. del E. También se denomina *cambio de escala*.

Ejemplo 5 (a) En la figura 1.77 se muestra una función de costos, $C(q)$, para una empresa. El costo fijo aumenta \$1,000. Dibuje una gráfica de la nueva función de costos.

(b) En la figura 1.78 se muestra una curva de oferta, S, para un producto. Una nueva fábrica abre y produce 100 unidades del producto, sin importar cuál sea el precio. Trace una gráfica de la nueva curva de oferta.

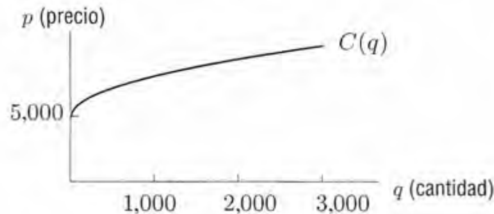


Figura 1.77. Función de costo.

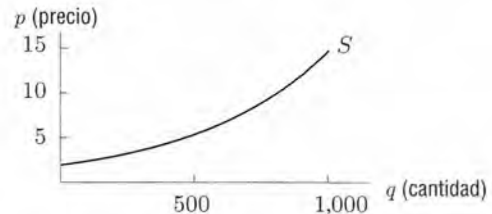


Figura 1.78. Función de oferta.

Solución (a) Para cualquier cantidad dada, el nuevo costo es \$1,000 mayor que el costo anterior. La nueva función de costos es $C(q) + 1{,}000$, cuya gráfica es la gráfica de $C(q)$ desplazada verticalmente hacia arriba 1,000 unidades (véase la figura 1.79).

(b) Para ver el efecto de la nueva fábrica, veamos un ejemplo. Al precio de 10 dólares, se producen aproximadamente 800 unidades. Con la nueva fábrica, esta cantidad aumenta en 100 unidades, de modo que la nueva cantidad producida es de 900 unidades. A cualquier precio, la cantidad producida aumenta 100, por lo que la nueva curva de oferta es S desplazada horizontalmente 100 unidades a la derecha (véase la figura 1.80).



Figura 1.79. Nueva función de costos (curva original punteada).



Figura 1.80. Nueva curva de oferta (curva original punteada).

Problemas para la sección 1.8

1. Para $g(x) = x^2 + 2x + 3$, encuentre y simplifique:

(a) $g(2+h)$ (b) $g(2)$
(c) $g(2+h) - g(2)$

2. Si $f(x) = x^2 + 1$, encuentre y simplifique:

(a) $f(t+1)$ (b) $f(t^2+1)$
(c) $f(2)$ (d) $2f(t)$
(e) $[f(t)]^2 + 1$

3. Sean $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = x + 3$. Determine lo siguiente:

(a) $f(g(x))$ (b) $g(f(x))$ (c) $f(f(x))$

4. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x - 1$. Determine lo siguiente:

(a) $f(2) + g(2)$ (b) $f(2) \cdot g(2)$
(c) $f(g(2))$ (d) $g(f(2))$

5. Si $h(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, encuentre

(a) $g(h(x))$ (b) $h(g(x))$
(c) $h(h(x))$ (d) $g(x) + 1$
(e) $g(x+1)$

6. Sean $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \ln x$. Encuentre las fórmulas de cada una de las siguientes funciones.

(a) $g(f(x))$ (b) $f(g(x))$ (c) $f(f(x))$

7. Utilice la variable u para la función interior, con el fin de expresar cada una de las siguientes funciones como función compuesta:

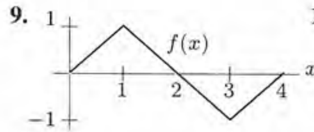
(a) $y = (5t^2 - 2)^6$ (b) $P = 12e^{-0.6t}$
(c) $C = 12\ln(q^3 + 1)$

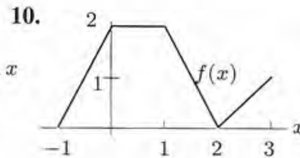
8. Utilice la variable u para la función interior con el fin de expresar cada una de las siguientes funciones como función compuesta:

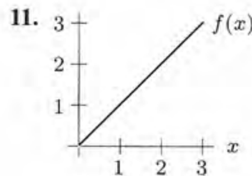
(a) $y = 2^{3x-1}$ (b) $P = \sqrt{5t^2 + 10}$
(c) $w = 2\ln(3r + 4)$

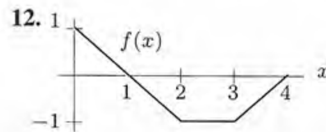
Para las funciones $f(x)$ de los problemas 9 al 12, trace la gráfica:

(a) $y = f(x) + 2$ **(b)** $y = f(x - 1)$
(c) $y = 3f(x)$ **(d)** $y = -f(x)$

9.


10.


11.


12.


Trace la gráfica de las funciones de los problemas 13 al 18 utilizando la figura 1.81.

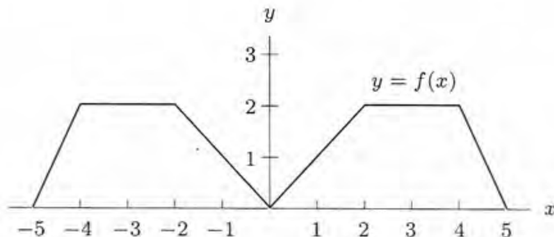


Figura 1.81.

13. $y = 2f(x)$ **14.** $y = f(x) + 2$

15. $y = -3f(x)$ **16.** $y = f(x - 1)$

17. $y = 2 - f(x)$ **18.** $y = 2f(x) - 1$

19. Utilice la tabla 1.31 para encontrar:

(a) $f(g(0))$ **(b)** $f(g(1))$ **(c)** $f(g(2))$
(d) $g(f(2))$ **(e)** $g(f(3))$

Tabla 1.31

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	10	6	3	4	7	11
$g(x)$	2	3	5	8	12	15

20. Construya una tabla de valores para cada una de las funciones usando la tabla 1.31.

(a) $f(x) + 3$ **(b)** $f(x - 2)$ **(c)** $5g(x)$
(d) $-f(x) + 2$ **(e)** $g(x - 3)$ **(f)** $f(x) + g(x)$

Para los problemas del 21 al 23, emplee las gráficas de la figura 1.82.

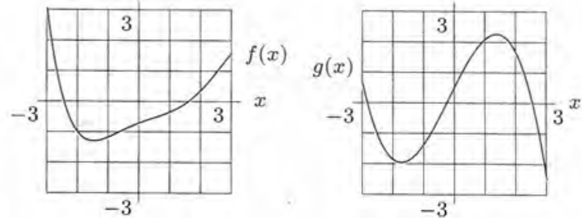


Figura 1.82.

21. Calcule $f(g(1))$. **22.** Calcule $g(f(2))$.

23. Calcule $f(f(1))$.

24. **(a)** Escriba la ecuación de una gráfica que se obtiene mediante un estiramiento vertical de la gráfica de $y = x^2$ por un factor de 2, seguida de un desplazamiento vertical hacia arriba de una unidad. Grafíquela.

(b) ¿Cuál es la ecuación si se intercambia el orden de las transformaciones (estiramiento y desplazamiento) del inciso (a)?

(c) ¿Las dos gráficas son iguales? Explique el efecto de invertir el orden de las transformaciones.

25. Para $f(n) = 3n^2 - 2$ y $g(n) = n + 1$, encuentre y simplifique:

(a) $f(n) + g(n)$
(b) $f(n)g(n)$
(c) El dominio de $f(n)/g(n)$
(d) $f(g(n))$
(e) $g(f(n))$

Simplifique las cantidades de los problemas 26 al 29 usando $m(z) = z^2$.

26. $m(z + 1) - m(z)$ **27.** $m(z + h) - m(z)$

28. $m(z) - m(z - h)$ **29.** $m(z + h) - m(z - h)$

Para los problemas del 30 al 31, determine las funciones f y g de tal forma que $h(x) = f(g(x))$.
Nota: hay más de una respuesta correcta. No elija $f(x) = x$ o $g(x) = x$.

30. $h(x) = (x + 1)^3$ **31.** $h(x) = x^3 + 1$

32. Con base en la tabla 1.32 construya una tabla de valores para $f(g(x))$ y para $g(f(x))$.

Tabla 1.32

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	3	2	1	0
$g(x)$	3	2	2	0	−2	−2	−3

33. Con la figura 1.83, encuentre $f(g(x))$ y $g(f(x))$ para $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Después, trace las gráficas de $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

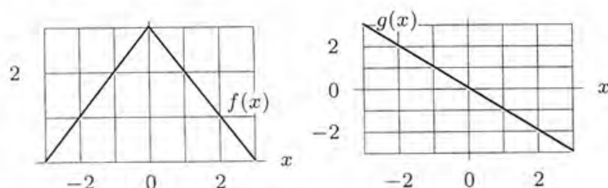


Figura 1.83.

34. La función escalón de Heaviside, H, está graficada en la figura 1.84. Trace la gráfica de las siguientes funciones:

(a) $2H(x)$ **(b)** $H(x)+1$ **(c)** $H(x+1)$
(d) $-H(x)$ **(e)** $H(-x)$

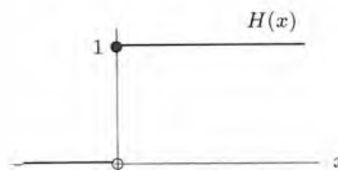


Figura 1.84.

1.9 PROPORCIONALIDAD, FUNCIONES DE POTENCIAS Y DE POLINOMIOS

Proporcionalidad

Una relación funcional común se presenta cuando una cantidad es *proporcional* a otra. Por ejemplo, si las manzanas cuestan $1.40 por libra, decimos que el precio que se paga, p dólares, es proporcional al peso que se compra, w libras, porque

$$p = f(w) = 1.40w.$$

Otro ejemplo sería: el área, A, de un círculo es proporcional al cuadrado del radio, r:

$$A = f(r) = \pi r^2.$$

> Decimos que y es (directamente) **proporcional** a x si hay una constante k diferente a cero, tal que
>
> $$y = kx$$
>
> Esta k recibe el nombre de constante de proporcionalidad.

También decimos que una cantidad es *inversamente proporcional* a otra si una es proporcional al recíproco de la otra. Por ejemplo, la velocidad, v, a la que hace un recorrido de 50 millas es inversamente proporcional al tiempo, t, que tarda el viaje, porque v es proporcional a $1/t$.

$$v = 50\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{50}{t}.$$

Observe que si y es directamente proporcional a x, entonces la magnitud de una variable aumenta (disminuye) cuando la magnitud de la otra aumenta (disminuye). Sin embargo, si y es inversamente proporcional a x, entonces la magnitud de una variable aumenta cuando disminuye la magnitud de la otra.

Ejemplo 1 La masa del corazón de un mamífero es proporcional a su masa corporal.[35]

(a) Escriba una fórmula para la masa del corazón, H, como función de la masa corporal, B.

(b) Una persona con una masa corporal de 70 kilogramos tiene una masa de su corazón de 0.42 kg. Use esta información para hallar la constante de proporcionalidad.

(c) Calcule la masa del corazón de un caballo con una masa corporal de 650 kg.

[35] K. Schmidt-Nielson, *Scaling-Why is Animal Size So Important?* CUP, Cambridge, 1984.

Solución (**a**) Como *H* es proporcional a *B*, para cierta constante *k*, tenemos

$$H = kb$$

(**b**) Empleamos el hecho de que $H = 0.42$ cuando $B = 70$ para despejar *k*:

$$H = kB$$
$$0.42 = k(70)$$
$$k = \frac{0.42}{70} = 0.006.$$

(**c**) Como $k = 0.006$, tenemos $H = 0.006B$, por tanto, la masa del corazón del caballo está dada por

$$H = 0.006(650) = 3.9 \text{ kilogramos}$$

Ejemplo 2 El periodo de un péndulo, *T*, es la cantidad de tiempo necesaria para que el péndulo haga una oscilación completa. Para oscilaciones pequeñas, el periodo, *T*, es aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de *l*, la longitud del péndulo. Por tanto

$$T = k\sqrt{e} \text{ donde } k \text{ es una constante.}$$

Observe que *T* no es directamente proporcional a *l*, pero *T* es proporcional a $\sqrt{e}$.

Ejemplo 3 El peso, w, de un objeto es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia, *r*, desde el centro de la Tierra. Por tanto, para alguna constante *k*,

$$w = \frac{k}{r^2}.$$

Aquí *w* no es inversamente proporcional a *r*, sino a r^2.

Funciones de potencia

En cada uno de los ejemplos anteriores, una cantidad es proporcional a la potencia de otra cantidad. Damos la siguiente definición:

> Decimos que $Q(x)$ es una **función de potencia** de x si $Q(x)$ es proporcional a una potencia constante de x. Si *k* es la constante de proporcionalidad, y si *p* es la potencia, entonces
>
> $$Q(x) = k \cdot xp.$$

Por ejemplo, la función $H = 0.006B$ es una función de potencia con $p = 1$. La función $T = k\sqrt{e} = kl^{1/2}$ es una función de potencia con $p = 1/2$ y la función $w = k/r^2 = kr^{-2}$ es una función de potencia con $p = -2$.

Ejemplo 4 ¿Cuáles de las siguientes son funciones de potencia? Para aquellas que sí lo son, escriba la función en la forma $y = kx^p$ e indique el coeficiente *k* y el exponente *p*.

(**a**) $y = \frac{5}{x^3}$ (**b**) $y = \frac{2}{3x}$ (**c**) $y = \frac{5x^2}{2}$

(**d**) $y = 5 \cdot 2^x$ (**e**) $y = 3\sqrt{x}$ (**f**) $y = (3x^2)^3$

Solución (**a**) Como $y = 5x^{-3}$, ésta es una función de potencia con $k = 5$ y $p = -3$.
(**b**) Como $y = (2/3)x^{-1}$, ésta es una función de potencia con $k = 2/3$ y $p = -1$.
(**c**) Como $y = (5/2)x^2$, ésta es una función de potencia con $k = 5/2 = 2.5$ y $p = 2$.
(**d**) Ésta no es una función de potencia, es una función exponencial.
(**e**) Como $y = 3x^{1/2}$, ésta es una función de potencia con $k = 3$ y $p = 1/2$.
(**f**) Como $y = 3^3 \cdot (x^2)^3 = 27x^6$, ésta es una función de potencia con $k = 27$ y $p = 6$.

Gráficas de funciones de potencia

La gráfica de $y = x^2$ se muestra en la figura 1.85. Es decreciente para las x negativas y creciente para las x positivas. Observe que está curvada hacia arriba, o es cóncava hacia arriba, para todas las x. La gráfica de $y = x^3$ se muestra en la figura 1.86. Observe que se curva hacia abajo, o es cóncava hacia abajo para las x negativas y se curva hacia arriba, o es cóncava hacia arriba para las x positivas. La gráfica de $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$ se muestra en la figura 1.87. Observe que la gráfica es creciente y cóncava hacia abajo.

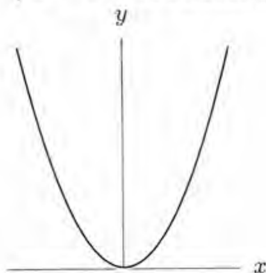


Figura 1.85. Gráfica de $y = x^2$.

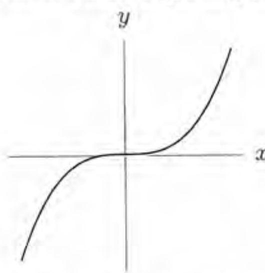


Figura 1.86. Gráfica de $y = x^3$.

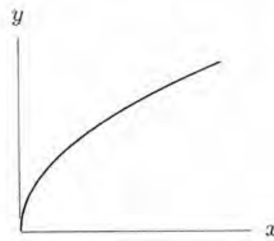


Figura 1.87. Gráfica de $y = x^{1/2}$.

Ejemplo 5 Si N es el número promedio de especies que se encuentran en una isla, y A es el área de la isla, las observaciones han demostrado[36] que N es casi proporcional a la raíz cúbica de A. Escriba una fórmula para N como función de A, y describa la forma de la gráfica de esta función.

Solución Para alguna constante positiva, k, tenemos

$$N = k\sqrt[3]{A} = kA^{1/3}.$$

Resulta que el valor de k depende de la región del mundo en la que se encuentre la isla. La gráfica de N respecto a A (para $A > 0$) tiene una forma similar a la gráfica de la figura 1.87. Es creciente y cóncava hacia abajo. Por tanto, las islas más grandes tienen más especies (como era de esperarse), pero el incremento es cada vez menor conforme la isla es más grande.

La función $y = x^0 = 1$ tiene una gráfica que es una línea horizontal. Para las potencias negativas, al escribir

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

es claro que a medida que $x > 0$ aumenta, los denominadores se incrementan y las funciones decrecen. Las gráficas de $y = x^{-1}$ y $y = x^{-2}$ tienen a los ejes x y y como asíntotas (véase la figura 1.88).

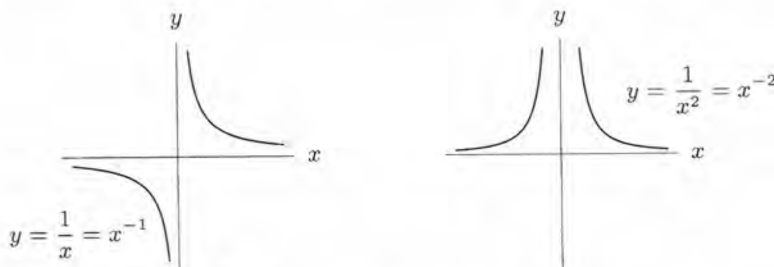


Figura 1.88. Gráficas de potencias negativas de x.

[36] *Scientific American*, septiembre, 1989, p. 112.

Polinomios

Las sumas de las funciones de potencias con exponentes enteros positivos se llaman *polinomios*, que son funciones de la forma

$$y = p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Aquí, n es un entero positivo, denominado *grado* del polinomio, y a_n es un número diferente de cero que recibe el nombre de *coeficiente principal.* Se denomina a $a_n x^n$ el *término principal.* Si $n = 2$, el polinomio se llama cuadrático; si $n = 3$, el polinomio se conoce como cúbico.

La forma de la gráfica de un polinomio depende de su grado. Véase la figura 1.89. La gráfica de un polinomio cuadrático es una parábola. Se abre hacia arriba si el coeficiente principal es positivo (como se muestra en la figura 1.89), y se abre hacia abajo si el coeficiente principal es negativo. Un polinomio cúbico puede tener la forma de la gráfica de $y = x^3$, o la gráfica que se muestra en la figura 1.89, o puede ser el reflejo de una de éstas respecto al eje x.

Observe en la figura 1.89 que la gráfica del polinomio cuadrático "se invierte" una vez, el cúbico "se invierte" dos veces y la del cuártico (cuarto grado) "se invierte" tres veces. Un polinomio de $n^{\text{ésimo}}$ grado "se invierte" a lo sumo $n - 1$ veces (donde n es un entero positivo), pero puede invertir menos veces.

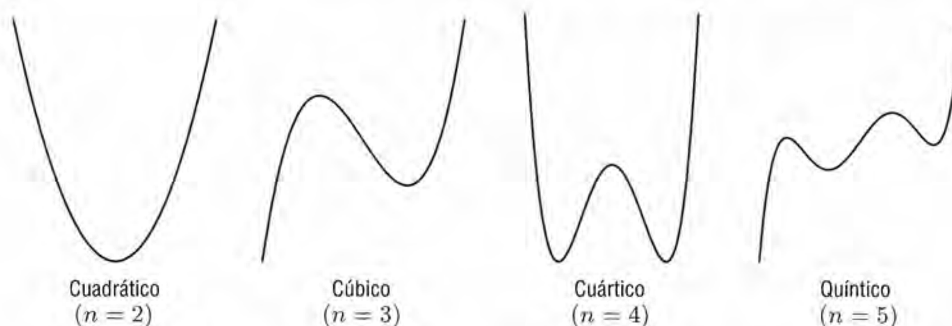


Figura 1.89. Gráficas de los polinomios típicos de grado n.

Ejemplo 6 Una empresa descubre que el número promedio de personas que asisten a un concierto es 75 si el precio unitario es de \$50. A un precio de \$35 por persona, el número promedio de personas que asisten es 120.

(a) Suponga que la curva de demanda es una recta. Escriba la demanda, q, como función del precio, p.

(b) Utilice su respuesta en el inciso (a) para escribir el ingreso, I, como función del precio, p.

(c) Use una gráfica de la función de ingreso para determinar qué precio se debe cobrar para obtener el ingreso máximo.

Solución **(a)** Dos puntos sobre la recta son $(p, q) = (50, 75)$ y $(p, q) = (35, 120)$. La pendiente de la recta es

$$m = \frac{120 - 75}{35 - 50} = \frac{45}{-15} = -3 \text{ personas/dólar.}$$

Para encontrar la ordenada en el origen de la recta se usa la pendiente y uno de los puntos:

$$\begin{aligned} 75 &= b + (-3)(50) \\ 225 &= b \end{aligned}$$

La función de demanda es $q = 225 - 3p$.

(b) Puesto que $I = pq$ y $q = 225 - 3p$, se observa que $I = p(225 - 3p) = 225p - 3p^2$.

(c) La función de ingreso es el polinomio cuadrático graficado en la figura 1.90. El ingreso máximo se presenta en $p = 37.5$. Por tanto, la empresa maximiza el ingreso al cobrar \$37.50 por persona.

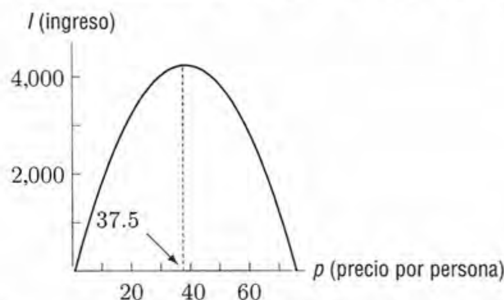


Figura 1.90. Función ingreso de las ventas de boletos para el concierto.

Ejemplo 7 Con una calculadora o computadora, trace la gráfica $y = x^4$ y $y = x^4 - 15x^2 - 15x$ para $-20 \le x \le 20$ y $0 \le y \le 200{,}000$. ¿Qué observa?

Solución En la figura 1.91 las dos gráficas parecen indistinguibles. La razón es que el término principal de cada polinomio (aquel con la mayor potencia de x) es el mismo, a saber x^4, y para los valores más grandes de x en esta ventana el término principal domina a los otros.

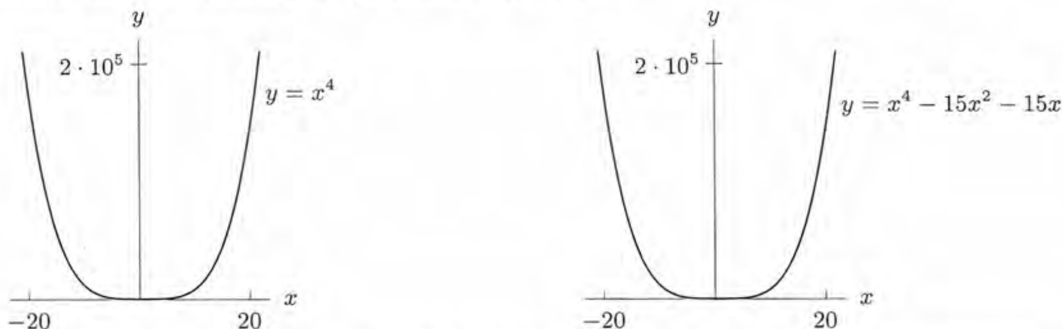


Figura 1.91. Las gráficas de $y = x^4$ y $y = x^4 - 15x^2 - 15x$ parecen indistinguibles en una ventana grande.

En el problema 39 se comparan las gráficas de estas dos funciones, en una ventana más pequeña, con la figura 1.91.

Se observa en el ejemplo 7 que, a distancia, el polinomio $y = x^4 - 15x^2 - 15x$ se asemeja a la función $y = x^4$. En general, si la gráfica de un polinomio de grado n

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

se observa en una ventana lo suficientemente grande, tiene más o menos la misma forma que la gráfica de la función de potencia dada por el término principal:

$$y = a_n x^n.$$

Problemas para la sección 1.9

En los problemas 1 al 12, determine si la función es o no una función de potencia. Si es una función de potencia, escríbala en la forma $y = kx^p$ y dé los valores de k y p.

1. $y = \dfrac{3}{x^2}$ **2.** $y = 5\sqrt{x}$ **3.** $y = \dfrac{3}{8x}$

4. $y = 2^x$ **5.** $y = \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$ **6.** $y = (3x^5)^2$

7. $y = \dfrac{2x^2}{10}$ **8.** $y = 3 \cdot 5^x$ **9.** $y = (5x)^3$

10. $y = \dfrac{8}{x}$ **11.** $y = \dfrac{x}{5}$ **12.** $y = 3x^2 + 4$

En los problemas 13 al 16 escriba una fórmula que represente la función.

13. La energía, E, gastada por un delfín nadador es proporcional al cubo de la velocidad, v, del delfín.

14. La resistencia, S, de una viga es proporcional al cuadrado de su grosor, h.

15. La fuerza gravitacional, F, entre dos cuerpos es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, d, entre ellos.

16. La velocidad promedio, v, para un recorrido de una distancia fija, d, es inversamente proporcional al tiempo del recorrido, t.

17. La siguiente tabla indica los valores de una función $p = f(t)$. ¿Puede ser p proporcional a t?

t	0	10	20	30	40	50
p	0	25	60	100	140	200

18. El área de la superficie de un mamífero, S, satisface la ecuación $S = kM^{2/3}$, donde M es la masa corporal y la constante de proporcionalidad k depende de la forma del cuerpo del mamífero. Una persona con masa corporal de 70 kilogramos tiene un área superficial de 18,600 cm^2. Determine la constante de proporcionalidad para los seres humanos. Encuentre el área de la superficie de una persona con una masa corporal de 60 kilogramos.

19. Los biólogos estiman que el número de especies animales de cierta longitud corporal es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud corporal.[37] Escriba una fórmula para el número de especies animales, N, de cierta longitud corporal como función de la longitud, L. ¿Existen más especies con longitudes grandes, o con longitudes pequeñas? Explique.

20. El tiempo de circulación en un mamífero (es decir, el tiempo promedio que se necesita para que toda su sangre circule una vez y regrese al corazón) es proporcional a la raíz cuártica de la masa corporal del mamífero.

(a) Escriba una fórmula para el tiempo de circulación, T, en términos de la masa corporal, B.

(b) Si un elefante de masa corporal de 5,230 kilogramos tiene un tiempo de circulación de 148 segundos, determine la constante de proporcionalidad.

(c) ¿Cuál es el tiempo de circulación de una persona con una masa corporal de 70 kilogramos?

Para las funciones de los problemas del 21 al 28:

(a) ¿Cuál es el grado del polinomio? ¿El coeficiente principal es positivo o negativo?

(b) ¿Qué función de potencia se aproxima a $f(x)$ para valores grandes de x? Sin utilizar una calculadora o computadora, trace la gráfica de la función en una ventana grande.

(c) Con una calculadora o una computadora, trace una gráfica de función. ¿Cuántos puntos de giro tiene la función? ¿Cómo se compara el número de puntos de giro con el grado del polinomio?

21. $f(x) = x^2 + 10x - 5$

22. $f(x) = 5x^3 - 17x^2 + 9x + 50$

23. $f(x) = 8x - 3x^2$

24. $f(x) = 17 + 8x - 2x^3$

25. $f(x) = -9x^5 + 82x^3 + 12x^2$

26. $f(x) = 0.01x^4 + 2.3x^2 - 7$

27. $f(x) = 100 + 5x - 12x^2 + 3x^3 - x^4$

28. $f(x) = 0.2x^7 + 1.5x^4 - 3x^3 + 9x - 15$

29. La alometría es el estudio del tamaño relativo de diferentes partes del cuerpo como resultado del crecimiento. En este problema, usted comprobará la exactitud de una ecuación alométrica: el peso de un pez es proporcional al cubo de su longitud.[38] La tabla 1.33 relaciona el peso, y, en gramos, de una platija (un pez) con su longitud, x, en centímetros. ¿Estos datos apoyan la hipótesis de que (aproximadamente) $y = kx^3$? Si es así, calcule la constante de proporcionalidad, k.

Tabla 1.33

x	y	x	y	x	y
33.5	332	37.5	455	41.5	623
34.5	363	38.5	500	42.5	674
35.5	391	39.5	538	43.5	724
36.5	419	40.5	574		

30. La fórmula de Dubois relaciona el área de la superficie de una persona, s, en m^2, con el peso w, en kg y la altura h, en cm, mediante

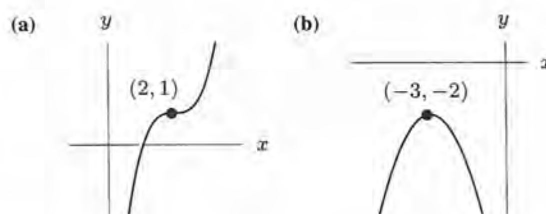
$$s = 0.01w^{0.25}h^{0.75}$$

(a) ¿Cuál es el área de superficie de una persona que pesa 65 kg y tiene una altura de 160 cm?

(b) ¿Cuál es el peso de una persona cuya altura es de 180 cm, con un área de superficie de 1.5 m^2?

(c) Para gente con peso fijo de 70 kg, despeje h como función de s. Simplifique su respuesta.

31. Utilice desplazamientos de funciones de potencia para encontrar una posible fórmula para cada una de las gráficas:



[37] *US News & World Report*, 18 de agosto de 1997, p. 79.

[38] Adaptado de R. J. H. Beverton y S. J. Holt, "On the Dynamics of Exploited Fish Populations" en *Fishery Investigations*, Serie II, núm. 19, 1957.

32. Encuentre la razón promedio de cambio entre $x = 0$ y $x = 10$ de cada una de las siguientes funciones: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, y $y = x^4$. ¿Cuál es la razón promedio de cambio mayor? Trace la gráfica de las cuatro funciones y trace rectas cuyas pendientes representen a estas razones promedio de cambio.

33. La tasa, R, a la cual una población en un espacio confinado aumenta es proporcional al producto de la población actual, P, y la diferencia entre la capacidad de carga, L, y la población actual. (La capacidad de carga es la población máxima que un ambiente puede sostener.)

(a) Escriba R como función de P.

(b) Trace la gráfica de R como función de P.

34. Una persona fue expuesta a un tono estándar de 20,000 dinas/cm^2 (cerca del nivel de ruido de una banda de rock) y se le aconsejó valuarlo en 10. La persona escuchó entonces otros sonidos, por ejemplo, un susurro ligero, una conversación normal, un trueno, un avión jet al despegar, entre otros. En cada caso, se le pidió que juzgara el volumen del sonido y le asignara un número relativo al 10, que fue el tono estándar. Éste es un ejemplo del experimento de "juicio de magnitud". Se encontró que la ley de la potencia $J = aI^{0.3}$ servía bien de modelo a la situación, donde I es la intensidad real (medida en dinas/cm^2) y J es la intensidad juzgada.

(a) ¿Cuál es el valor de a?

(b) ¿Cuál es el volumen de sonido asignado si el volumen del sonido real es de 0.2 dinas/cm^2 (de una conversación normal)?

(c) ¿Cuál es el volumen del sonido real si el volumen del sonido asignado es 20?

35. Cada una de las gráficas en la figura 1.92 es de un polinomio. Las ventanas son lo suficientemente grandes para mostrar el comportamiento global.

(a) ¿Cuál es el mínimo grado posible del polinomio?

(b) ¿El coeficiente principal del polinomio es positivo o negativo?

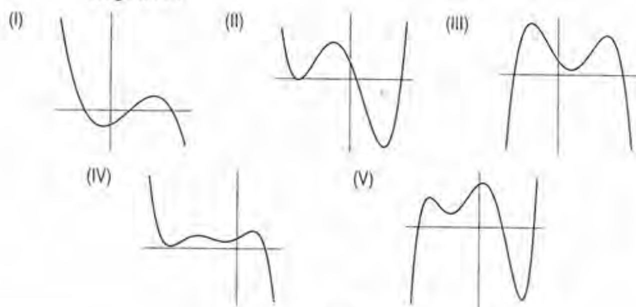


Figura 1.92.

36. Un mayorista de bienes deportivos descubre que cuando el precio de un producto es \$25, la empresa vende 500 unidades a la semana. Cuando el precio es de \$30, el número de unidades que vende por semana disminuye a 460 unidades.

(a) Encuentre la demanda, q, como función del precio, p, suponiendo que la curva de demanda es lineal.

(b) Utilice su respuesta del inciso (a) para escribir el ingreso como función del precio.

(c) Trace la gráfica de la función de ingreso del inciso (b). Determine el precio que maximiza el ingreso. ¿Cuál es el ingreso a este precio?

37. Un club privado tiene funciones de costo e ingreso dadas por $C = 10{,}000 + 35q$ e $I = pq$, donde q es el número de socios anuales del club y p es el precio de una membresía de un año. La función de demanda para el club es $q = 3{,}000 - 20p$.

(a) Utilice la función de demanda para escribir el costo y el ingreso como funciones de p.

(b) Trace las gráficas de costo e ingreso como función de p, en un mismo sistema de coordenadas. (Observe que el precio no es superior a \$170 y que los costos anuales por manejar el club alcanzan los \$120,000.)

(c) Explique por qué la gráfica de la función de ingreso tiene la forma que tiene.

(d) ¿Para qué precios obtiene utilidades el club?

(e) Calcule la cuota de membresía anual que maximice las utilidades. Marque ese punto en su gráfica.

38. De acuerdo con la Asociación Nacional de Corredores de Bienes Raíces,[39] el ingreso bruto anual mínimo, m, en miles de dólares, necesario para obtener un préstamo hipotecario por 30 años de A miles de dólares al 9% está dado en la tabla 1.34. Observe que entre más grande sea el préstamo, más se requiere de un ingreso mayor.

Tabla 1.34

A	50	75	100	150	200
m	17.242	25.863	34.484	51.726	68.968

Tabla 1.35

r	8	9	10	11	12
m	31.447	34.484	37.611	40.814	44.084

Obviamente, no toda hipoteca se financia al 9%. De hecho, con excepción de ligeras variaciones, las tasas de interés hipotecarias, en general, no las determinan los bancos particulares, sino la economía en su conjunto. El ingreso bruto anual mínimo, m, en miles de dólares, necesario para un préstamo hipotecario de \$100,000 a diversas tasas de interés, r, se muestra en la tabla 1.35. Observe que para obtener un préstamo en un momento en el que las tasas de interés son altas se requiere de un ingreso mayor.

(a) ¿El tamaño del préstamo, A, es proporcional al ingreso bruto anual mínimo, m?

(b) ¿La tasa porcentual, r, es proporcional al ingreso bruto anual mínimo, m?

39. ¿Las funciones $y = x^4$ y $y = x^4 - 15x^2 - 15x$ parecen similares en la ventana $-4 \leq x \leq 4$; $-100 \leq y \leq 100$? Comente la diferencia entre su respuesta a esta pregunta y lo que observa en la figura 1.91.

40. Encuentre una ventana de calculadora en la que las gráficas de $f(x) = x^3 + 1{,}000x^2 + 1{,}000$ y $g(x) = x^3 - 1{,}000x^2 - 1{,}000$ parezcan indistinguibles.

[39] "Income needed to get a Mortgage", *The World Almanac 1992*, p. 720.

1.10 FUNCIONES PERIÓDICAS

¿Qué son las funciones periódicas?

Muchas funciones tienen gráficas que oscilan hacia arriba y hacia abajo, semejantes a una onda. La figura 1.93 muestra el número de inicios de construcciones de casas nuevas en Estados Unidos, de 1977 a 1979, donde t es el tiempo en trimestres. Observe que durante el primer trimestre del año (enero, febrero y marzo) se comienza a construir muy pocas casas nuevas, mientras que en el segundo trimestre (abril, mayo y junio) se inicia la construcción de muchas casas nuevas. Se espera que este patrón de oscilaciones continúe en el futuro.

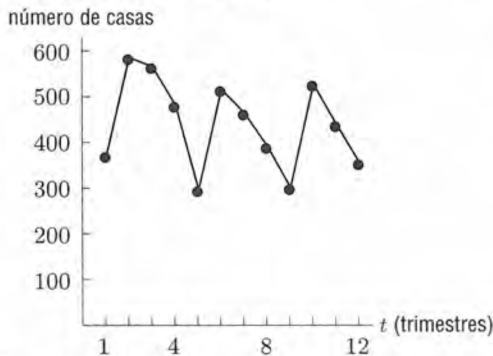


Figura 1.93. Inicios de construcción de casas nuevas, 1977-1979.

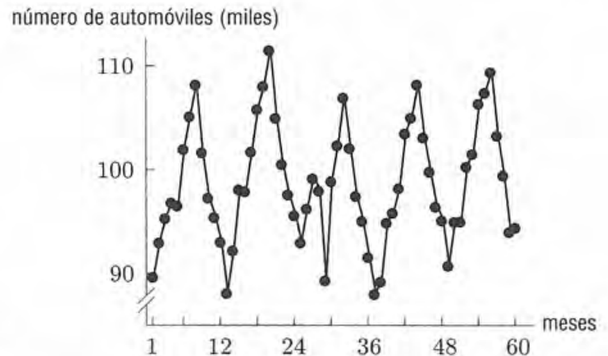


Figura 1.94. Tránsito en el puente Golden Gate, 1976-1980.

Veamos otro ejemplo. La figura 1.94 es una gráfica del número de automóviles (en miles) que cruzan el puente Golden Gate por mes, de 1976 a 1980. Observe que el tránsito está en su mínimo en enero de cada año (excepto en 1978) y alcanza su máximo en agosto de cada año. Nuevamente, la gráfica parece una onda.

Las funciones que repiten sus valores a intervalos regulares se llaman *periódicas*. Muchos procesos, por ejemplo, el número de inicio de construcción de casas o el número de automóviles que cruzan el puente, son aproximadamente periódicos. El nivel del agua en una dársena de mareas, la presión sanguínea del corazón, las ventas al detalle en Estados Unidos y la posición de moléculas de aire que transmiten una nota musical también son funciones periódicas en el tiempo.

Amplitud y periodo

Las funciones periódicas siempre repiten el mismo ciclo. Si conocemos un ciclo de la gráfica, conocemos toda la gráfica.

Para cualquier función periódica de tiempo:

- La **amplitud** es la mitad de la diferencia entre sus valores máximo y mínimo.
- El **periodo** es el tiempo en el que la función ejecuta un ciclo completo.

Ejemplo 1 Calcule la amplitud y el periodo de la función de los inicios de construcción de casas nuevas que se muestra en la figura 1.93.

Solución La figura 1.93 no es exactamente periódica, ya que el máximo y el mínimo no son iguales para cada ciclo; no obstante, el mínimo es aproximadamente 300 y el máximo, 550. La diferencia entre ellos es 250, de modo que la amplitud es alrededor de $\frac{1}{2}(250) = 125$ casas.

La onda completa un ciclo entre $t = 1$ y $t = 5$; por tanto, el periodo es $t = 4$ trimestres, esto es, un año. El ciclo de negocios para la nueva construcción de casas es de un año.

Ejemplo 2 La figura 1.95 muestra la temperatura en un congelador cerrado. Calcule la temperatura del congelador a las 12:30 y a las 2:45.

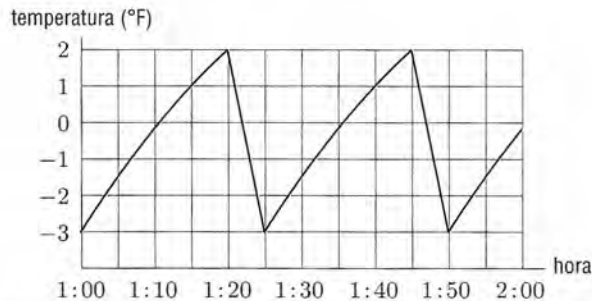


Figura 1.95. Temperatura oscilante en un congelador. Calcule la temperatura a las 12:30 y a las 2:45.

Solución Los valores máximo y mínimo se presentan cada 25 minutos, de modo que el periodo es de 25 minutos. La temperatura a las 12:30 debe ser la misma que a las 12:55 y a la 1:20, es decir, 2 °F. Del mismo modo, la temperatura a las 2:45 debe ser la misma que a las 2:20 y a la 1:55, es decir, de aproximadamente -1.5 ° F.

Seno y coseno

Muchas funciones periódicas se representan usando las funciones llamadas *seno* y *coseno*. Las teclas para el seno y el coseno en una calculadora usualmente se indican como sin y cos.
Atención: Su calculadora puede estar en el modo de "grados" o en el modo de "radianes". En este libro siempre usamos "radianes".

Gráficas de seno y coseno

Las gráficas de las funciones seno y coseno son periódicas; véanse las figuras 1.96 y 1.97. Observe que la gráfica de la función coseno es la gráfica de la función seno desplazada $\pi/2$ a la izquierda.

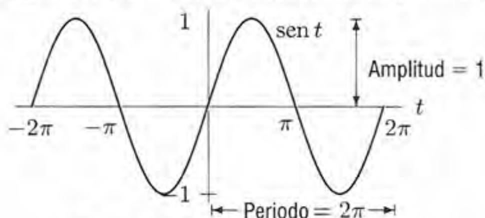


Figura 1.96. Gráfica de sen t.

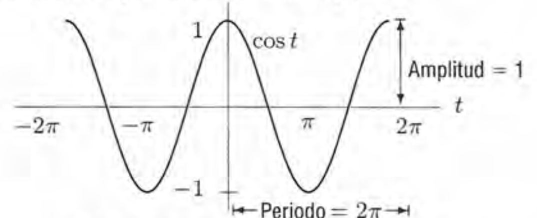


Figura 1.97. Gráfica de cos t.

Los valores máximo y mínimo de sen t son $+1$ y -1; por tanto, la amplitud de la función seno es 1. La gráfica de $y = \text{sen } t$ completa un ciclo entre $t = 0$ y $t = 2\pi$; el resto de la gráfica es sólo una repetición de esta parte. El periodo de la función seno es 2π.

Ejemplo 3 Use una gráfica de $y = 3 \text{ sen } 2t$ para calcular la amplitud y el periodo de esta función.

Solución En la figura 1.98 las ondas tienen un máximo de $+3$ y un mínimo de -3; y por tanto, la amplitud es 3. La gráfica termina un ciclo completo entre $t = 0$ y $t = p$; por tanto, el periodo es π.

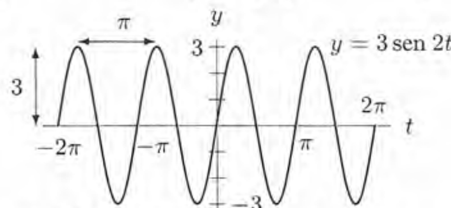


Figura 1.98. La amplitud es 3 y el periodo es π.

Ejemplo 4 Explique cómo las gráficas de cada una de las siguientes funciones difieren de la gráfica de $y = \text{sen}\ t$.

(a) $y = 6\,\text{sen}\,t$ (b) $y = 5 + \text{sen}\,t$ (c) $y = \text{sen}(t + \frac{\pi}{2})$

Solución

(a) La gráfica de $y = 6$ sen t se muestra en la figura 1.99. Los valores máximo y mínimo son $+6$ y -6, por lo que la amplitud es 6. Ésta es la gráfica de $y =$ sen t que se estira verticalmente por un factor de 6.

(b) La gráfica de $y = 5 +$ sen t se muestra en la figura 1.100. Los valores máximo y mínimo de esta función son 6 y 4, por lo que la amplitud es $(6 - 4)/2 = 1$. La amplitud (o el tamaño de la onda) es la misma que para $y =$ sen t, ya que ésta es la gráfica de $y =$ sen t desplazada hacia arriba cinco unidades.

(c) La gráfica de $y = \text{sen}(t + \frac{\pi}{2})$ se muestra en la figura 1.101. Ésta tiene la misma amplitud, a saber 1 y el periodo, es decir, 2*p*, como la gráfica de $y =$ sen t. Ésta es la gráfica de $y =$ sen t desplazada $\pi/2$ unidades a la izquierda. (De hecho, ésta es la gráfica de $y =$ cos t.)

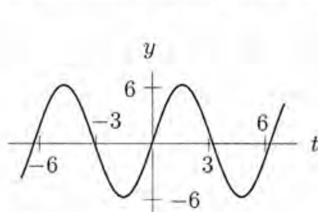


Figura 1.99. Gráfica de $y = 6$ sen t.

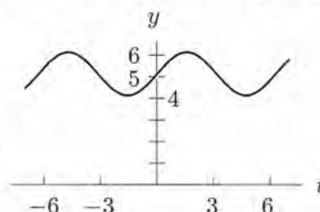


Figura 1.100. Gráfica de $y = 5 +$ sen t.

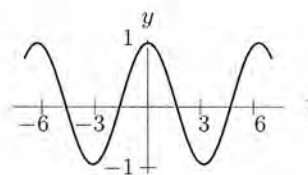


Figura 1.101. Gráfica de $y = \text{sen}(t + \frac{\pi}{2})$.

Familias de curvas: la gráfica de $y = A$ sen (Bt)

Las constantes A y B en la expresión $y = A$ sen(Bt) se denominan *parámetros*. Podemos estudiar familias de curvas al variar un parámetro a la vez y estudiar el resultado.

Ejemplo 5

(a) Trace la gráfica de $y = A$ sen t para diversos valores positivos de A. Describa el efecto de A en la gráfica.

(b) Trace la gráfica de $y =$ sen(Bt) para diversos valores positivos de B. Describa el efecto de B en la gráfica.

Solución

(a) Las gráficas de $y = A$ sen t para $A = 1, 2, 3$ se muestran en la figura 1.102. Para A positiva, vemos que A es la amplitud.

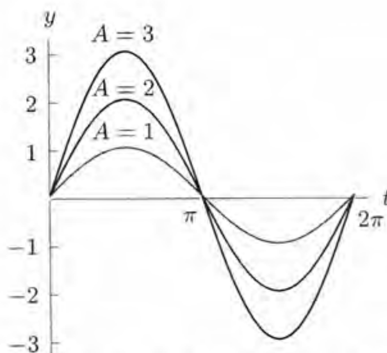


Figura 1.102. Gráficas de $y = A$ sen t con $A = 1, 2, 3$.

(b) Las gráficas de $y =$ sen(Bt) para $B = \frac{1}{2}$, $B = 1$ y $B = 2$ se muestran en la figura 1.103. Cuando $B = 1$, el periodo es 2π; cuando $B = 2$, el periodo es π; y cuando $B = \frac{1}{2}$, el periodo es 4π. El parámetro B afecta el periodo de la función. Las gráficas sugieren que cuanto mayor sea B, más corto es el periodo. De hecho el periodo es $2\pi/B$.

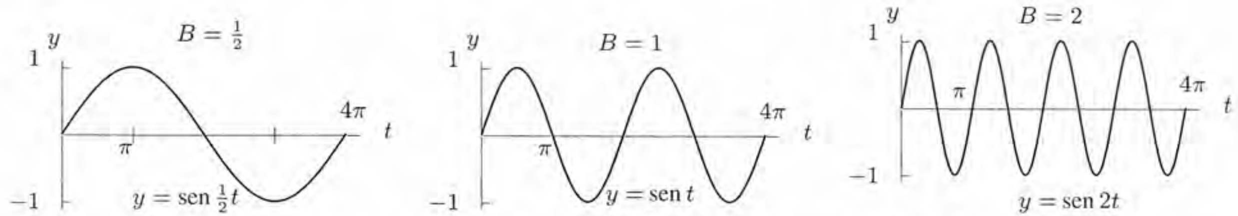
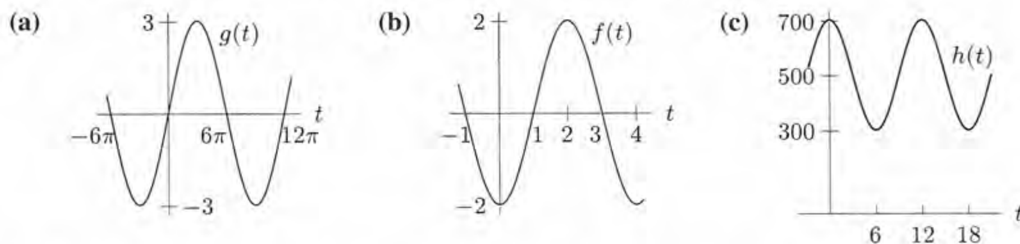


Figura 1.103. Gráficas de $y = \text{sen}(Bt)$ con $B = \frac{1}{2}, 1, 2$.

En el ejemplo 5, la amplitud de $y = A$ sen (Bt) estuvo determinada por el parámetro A, y el periodo fue determinado por el parámetro B. En general, tenemos

> Las funciones $y = A$ sen $(Bt) + C$ y $y = A \cos(Bt) + C$ son periódicas con
>
> Amplitud $= |A|$, Periodo $= \dfrac{2\pi}{|B|}$, Desplazamiento vertical $= C$

Ejemplo 6 Encuentre las posibles fórmulas para las siguientes funciones periódicas:



Solución **(a)** Esta función se parece a la función seno de amplitud 3; por tanto, $g(t) = 3$ sen $B(t)$. Como la función realiza una oscilación completa entre $t = 0$ y $t = 12\pi$, cuando t cambia en 12π, la cantidad Bt cambia en 2π. Esto significa que $B \cdot 12\pi = 2\pi$, por lo que $B = 1/6$. En consecuencia, $g(t) = 3\text{sen}(t/6)$ tiene la gráfica que se muestra.

(b) Esta función parece una función coseno invertida con una amplitud de 2, por lo que $f(t) = -2\cos(Bt)$. La función completa una oscilación entre $t = 0$ y $t = 4$. Por tanto, cuando t cambia en 4, la cantidad Bt cambia en 2π, de ahí que $B \cdot 4 = 2\pi$ o $B = \pi/2$. En consecuencia, $f(t) = -2\cos(\pi t/2)$ tiene la gráfica que se muestra.

(c) Esta función se parece a una función coseno. El máximo es 700 y el mínimo es 300, por lo que la amplitud es $\frac{1}{2}(700 - 300) = 200$. La altura media entre el máximo y el mínimo es 500, por lo que la curva de coseno ha sido desplazada hacia arriba 500 unidades, de ahí que $h(t) = 500 + 200\cos(Bt)$. El periodo es 12, por lo que $B \cdot 12 = 2\pi$. Por tanto, $B = \pi/6$. La función $h(t) = 500 + 200\cos(\pi t/6)$ tiene la gráfica que se muestra.

Ejemplo 7 El 10 de febrero de 1990 la marea alta en Boston fue a medianoche. La altura del agua en el puerto es una función periódica, ya que oscila entre las mareas alta y baja. Si t se mide en horas desde la medianoche, la altura (en pies) se aproxima por medio de la fórmula

$$y = 5 + 4.9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

(a) Trace la gráfica de esta función de $t = 0$ a $t = 24$.
(b) ¿Cuál fue el nivel del agua en la marea alta?
(c) ¿Cuándo estaba baja la marea y cuál fue el nivel del agua en ese momento?
(d) ¿Cuál es el periodo de esta función y qué representa en términos de mareas?
(e) ¿Cuál es la amplitud de esta función y qué representa en términos de mareas?

Solución (a) Observe la figura 1.104.

(b) El nivel del agua en marea alta fue de 9.9 pies (dados por la ordenada y en el origen de la gráfica).

(c) Hubo marea baja en $t = 6$ (6:00 a. m.) y en $t = 18$ (6:00 p. m.). El nivel del agua en ese momento fue de 0.1 pies.

(d) El periodo es de 12 horas y representa el intervalo entre mareas altas sucesivas o mareas bajas sucesivas. Obviamente, hay algo erróneo con la suposición en el modelo respecto a que el periodo es de 12 horas. Si fuese así, la marea alta siempre sería al medio día o a la media noche, en vez de avanzar lentamente durante el día, como en realidad sucede. El intervalo entre las mareas altas sucesivas tiene un promedio real de 12 horas y 24 minutos, lo que podría tomarse en cuenta para un modelo matemático más preciso.

(e) El máximo es 9.9 y el mínimo, 0.1, por lo que la amplitud es $(9.9 - 0.1)/2$, que es de 4.9 pies. Esto representa la mitad de la diferencia entre las profundidades de una marea alta y una marea baja.

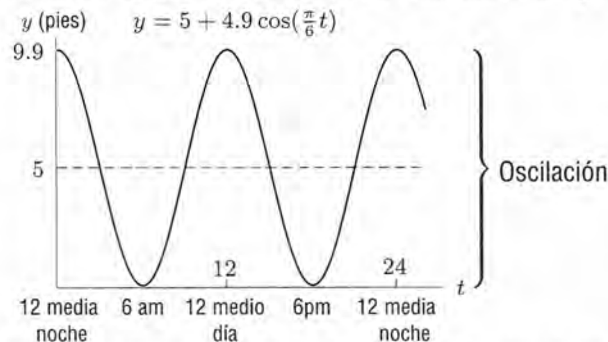


Figura 1.104. Gráfica de la función aproximando la profundidad del agua en Boston, el 10 de febrero de 1990.

Problemas para la sección 1.10

1. Trace una posible gráfica de ventas de protector solar en el noreste de Estados Unidos durante un periodo de tres años, como función de los meses desde el primero de enero del primer año. Explique por qué la gráfica debe ser periódica. ¿Cuál es el periodo?

2. Durante el verano de 1998, uno de los más calurosos de que se tenga registro en el medio oeste de Estados Unidos, un estudiante graduado en ciencias del medio ambiente estudió las fluctuaciones de temperatura de un río. La figura 1.105 muestra la temperatura del río (en °C) cada hora, con 0 siendo la medianoche del primer día.
   (a) Explique por qué debe utilizarse una función periódica para hacer un modelo de estos datos.
   (b) Aproximadamente, ¿cuándo se presenta la máxima? ¿La mínima? ¿Por qué tiene sentido esto?
   (c) ¿Cuál es el periodo para estos datos? ¿Cuál es la amplitud?

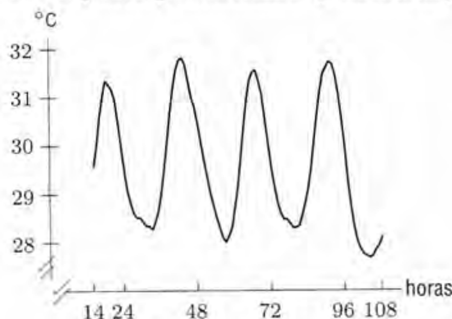


Figura 1.105.

3. Una población de animales varía periódicamente entre un mínimo de 700 el primero de enero y un máximo de 900 el primero de julio. Trace una gráfica de la población respecto al tiempo.

4. Utilice la ecuación del ejemplo 7 en la página 66 para calcular el nivel del agua en el puerto de Boston a las 3:00 a. m., 4:00 a. m. y 5:00 p. m. el 10 de febrero de 1990.

5. Los valores de una función se indican en la siguiente tabla. Explique por qué esta función parece ser periódica. ¿Aproximadamente a qué son iguales el periodo y la amplitud de la función? Suponiendo que la función sea periódica, calcule su valor en $t = 15$, en $t = 75$, y en $t = 135$.

t	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$f(t)$	1.8	1.4	1.7	2.3	2.0	1.8	1.4	1.7	2.3

Para los problemas 6 al 11, dibuje las gráficas de las funciones. ¿Cuáles son las amplitudes y los periodos?

6. $y = 3 \operatorname{sen} x$

7. $y = 3 \operatorname{sen} 2x$

8. $y = -3 \operatorname{sen} 2\theta$

9. $y = 4 \cos 2x$

10. $y = 4 \cos(\frac{1}{2}t)$

11. $y = 5 - \operatorname{sen} 2t$

12. Una persona inhala y exhala cada tres segundos. El volumen del aire en sus pulmones varía entre un mínimo de dos litros y un máximo de cuatro litros. ¿Cuál de las siguientes fórmulas es la mejor para el volumen del aire en los pulmones de la persona, como función del tiempo?

(a) $y = 2 + 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ **(b)** $y = 3 + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$

(c) $y = 2 + 2\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$ **(d)** $y = 3 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

13. La figura 1.106 muestra los niveles de las hormonas, estrógeno y progesterona durante los ciclos de ovulación mensuales en las mujeres.[40] ¿Es periódico el nivel de ambas hormonas? ¿Cuál es el periodo en cada caso? Aproximadamente, ¿cuándo alcanza el estrógeno su máximo en el ciclo mensual? De igual modo, ¿cuándo alcanza la progesterona su valor máximo en el ciclo mensual?

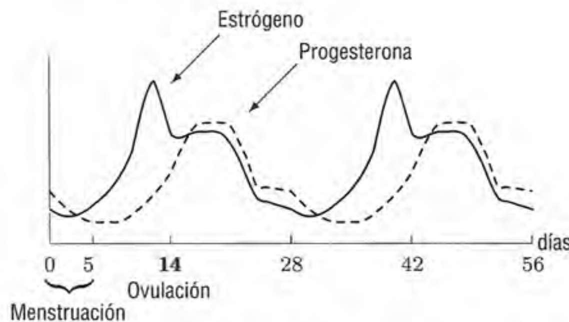


Figura 1.106.

14. La siguiente tabla muestra los valores de una función periódica $f(x)$. El valor máximo de la función es 5.

(a) ¿Cuál es la amplitud de esta función?

(b) ¿Cuál es el periodo de esta función?

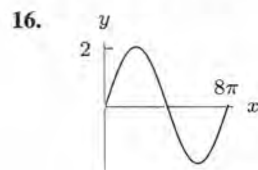
(c) Encuentre una fórmula para esta función periódica.

x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	5	0	−5	0	5	0	−5

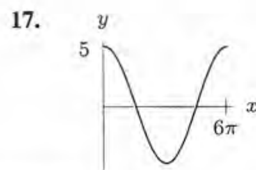
15. Cuando el motor de un automóvil trabaja a menos de 200 revoluciones por minuto, se detiene. ¿Cuál es el periodo de rotación del motor cuando está a punto de pararse?

Para los problemas del 16 al 27, encuentre una fórmula posible para cada gráfica.

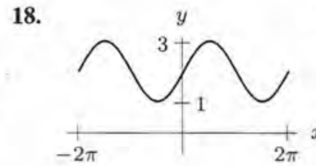
16.



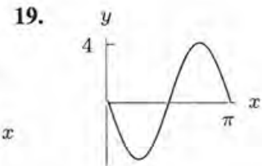
17.



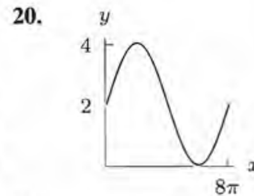
18.



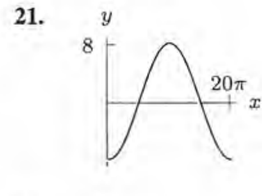
19.



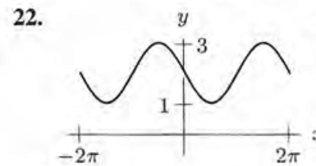
20.



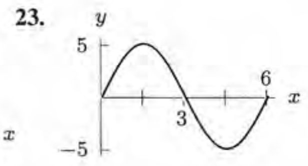
21.



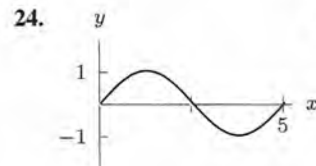
22.



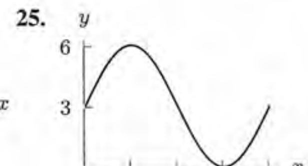
23.



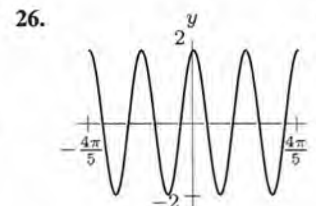
24.



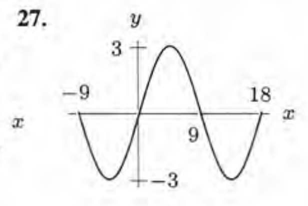
25.



26.



27.



28. La mayoría de los pájaros en edad reproductiva en el noreste de Estados Unidos emigran a cualquier otro lugar durante el invierno. El número de especies de pájaros en una reserva forestal de Ohio oscila entre un máximo de 28 en junio y un mínimo de 10 en diciembre.[41]

(a) Trace la gráfica del número de especies de pájaros en esta reserva como función de t, el número de meses desde junio. Incluya por lo menos tres años en su gráfica.

(b) ¿Cuál es la amplitud y el periodo de esta función?

(c) Encuentre una fórmula para el número de especies de pájaros, B, como función del número de meses, t, desde junio.

29. La temperatura del desierto, H, oscila diariamente entre 40 °F a las 5:00 a. m. y 80 °F a las 5:00 p. m. Escriba una fórmula posible para H en términos de t, medida en horas desde las 5:00 a. m.

[40] Robert M. Julien, *A Primer of Drug Action*, séptima edición, W. H. Freeman y Co., Nueva York, 1995, p. 360.
[41] Rosenzweig, M. L., *Species Diversity in Space and Time*, Cambridge University Press, 1995, p. 71.

30. La figura 1.107 muestra la producción trimestral de cerveza de 1990 a 1993. El primer trimestre refleja la producción durante los primeros tres meses del año, etcétera.

(a) Explique por qué se debería usar una función periódica para modelar estos datos.

(b) ¿Aproximadamente cuándo se presenta el máximo? ¿El mínimo? ¿Por qué esto tiene sentido?

(c) ¿Cuáles son el periodo y la amplitud para estos datos?

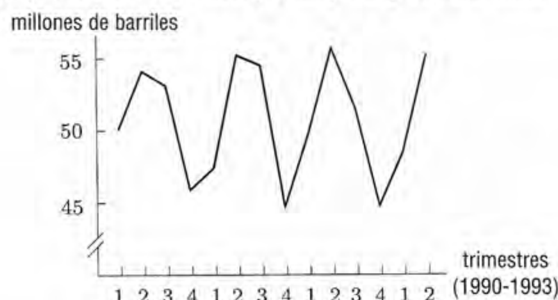


Figura 1.107.

31. La Bahía de Fundy, en Canadá, tiene las mareas más altas del mundo. La diferencia entre los niveles de agua bajo y alto es de 15 metros (aproximadamente 50 pies). En un punto particular, la profundidad del agua, y metros, está dada como una función del tiempo, t, en horas desde la medianoche por

$$y = D + A\cos(B(t - C)).$$

(a) ¿Cuál es el significado físico de D?

(b) ¿Cuál es el valor de A?

(c) ¿Cuál es el valor de B? Suponga que el tiempo entre las mareas altas sucesivas es de 12.4 horas.

(d) ¿Cuál es el significado físico de C?

32. En un hogar de Estados Unidos el voltaje en voltios en una toma eléctrica está dado por

$$V = 156\,\text{sen}(120\pi t),$$

donde t está en segundos. Sin embargo, en una casa europea, el voltaje está dado (en las mismas unidades) por

$$V = 339\,\text{sen}(100\pi t).$$

Compare los voltajes en las dos regiones, considerando el voltaje máximo y el número de ciclos (oscilaciones) por segundo.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

- **Terminología de funciones**
  Dominio/rango, creciente/decreciente, concavidad, ordenadas y abscisas en el origen.
- **Funciones lineales**
  Pendiente, *ordenada en el origen*. Crecer cantidades iguales en tiempos iguales.
- **Aplicaciones económicas**
  Funciones de costos, ingreso y ganancia. Curvas de oferta y demanda, punto de beneficio nulo. Función de depreciación. Restricción presupuestal. Valor presente y futuro.
- **Cambio, razón promedio de cambio, razón relativa de cambio**
- **Funciones exponenciales**
  Crecimiento y decrecimiento exponencial, tasa de crecimiento, el número e, tasa de crecimiento continua, tiempo de duplicación, vida media, interés compuesto. Crecimiento en porcentajes iguales en tiempos iguales.
- **La función de logaritmo natural**
- **Nuevas funciones a partir de otras anteriores**
  Composición, desplazamiento, estiramiento
- **Funciones de potencia y proporcionalidad**
- **Polinomios**
- **Funciones periódicas**
  Seno, coseno, amplitud, periodo.

PROBLEMAS DE REPASO

1. Sea $W = f(t)$ la función que representa la producción de trigo en Argentina, en millones de toneladas métricas, en donde t está en años desde 1990. Interprete el enunciado $f(9) = 14$ en términos de la producción de trigo.

2. La producción, Y, de un manzanal (en *bushels**) como una función de la cantidad, a, de fertilizante (en libras) usado en el manzanal se muestra en la figura 1.108.

(a) Describa el efecto de la cantidad de fertilizante en la producción del manzanal.

(b) ¿Cuál es la ordenada en el origen? Explique qué significa esto en términos de las manzanas y el fertilizante.

(c) ¿Cuál es la abscisa en el origen? Explique qué significa esto en términos de las manzanas y el fertilizante.

(d) ¿Cuál es el rango de esta función para $0 \le a \le 80$?

(e) ¿La función es creciente o decreciente en $a = 60$?

(f) ¿La gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo cerca de $a = 40$?

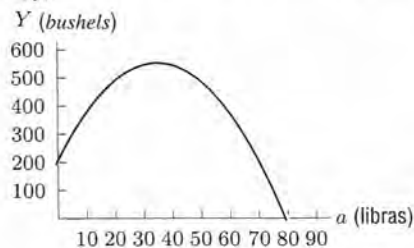


Figura 1.108.

*Medida de áridos que en Estados Unidos equivale a 35,237 litros.

3. Sea $y = f(x) = 3x - 5$.

(a) ¿A qué es igual $f(1)$?

(b) Calcule el valor de y cuando x es 5.

(c) Calcule el valor de x cuando y es 4.

(d) Encuentre la razón promedio de cambio de f entre $x = 2$ y $x = 4$.

4. La tabla 1.36 muestra las ventas de Pepsico, que opera dos grandes negocios: bebidas (incluyendo a Pepsi) y botanas.[42]

(a) Encuentre el cambio en las ventas entre 1991 y 1993.

(b) Determine la razón promedio de cambio en las ventas entre 1991 y 1993. Indique las unidades e interprete su respuesta.

Tabla 1.36 *Ventas de Pepsico, en millones de dólares*

Año	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Ventas	19,608	21,970	25,021	28,472	30,421	31,645	21,000

5. La tabla 1.37 señala los ingresos, I, de General Motors, el productor de automóviles más grande del mundo.[43]

(a) Encuentre el cambio en los ingresos entre 1989 y 1997.

(b) Determine la razón promedio de cambio en los ingresos entre 1989 y 1997. Indique las unidades e interprete su respuesta.

(c) Desde 1987 a 1997, ¿hubo algún año durante el cual la razón promedio de cambio fuera negativa? Si lo hubo, ¿cuál fue?

Tabla 1.37

Año	I ($ m)	Año	I ($ m)	Año	I ($ m)
1987	101,782	1991	123,056	1995	168,829
1988	120,388	1992	132,429	1996	164,069
1989	123,212	1993	138,220	1997	172,000
1990	122,021	1994	154,951		

6. Suponga que $q = f(p)$ es la curva de demanda de un producto, donde p es el precio de venta en dólares y q es la cantidad vendida a dicho precio.

(a) ¿Qué le dice el enunciado $f(12) = 60$ sobre la demanda de este producto?

(b) ¿Espera que esta función sea creciente o decreciente? ¿Por qué?

Encuentre la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos de los problemas 7 al 10.

7. $(0, -1)$ y $(2, 3)$

8. $(-1, 3)$ y $(2, 2)$

9. $(0, 2)$ y $(2, 2)$

10. $(-1, 3)$ y $(-1, 4)$

11. Los valores de $F(t)$, $G(t)$ y $H(t)$ se encuentran en la tabla 1.38. ¿Cuál gráfica es cóncava hacia arriba y cuál es cóncava hacia abajo? ¿Qué función es lineal?

Tabla 1.38

t	$F(t)$	$G(t)$	$H(t)$
10	15	15	15
20	22	18	17
30	28	21	20
40	33	24	24
50	37	27	29
60	40	30	35

12. El producto interno bruto, G, de Islandia fue de seis mil millones de dólares en 1998. Dé una fórmula para G (en miles de millones de dólares) t años después de 1998 si G aumenta

(a) 3% al año (b) 0.2 miles de millones de dólares anuales

13. Un artículo cuesta $80 hoy. ¿Cuánto costará en t días si el precio se reduce

(a) $4 al día? (b) 5% al día?

14. La tabla 1.39 señala los valores de las tres funciones. ¿Cuáles funciones pueden ser lineales? ¿Cuáles pueden ser exponenciales? ¿Cuáles no son lineales ni exponenciales? Para aquellas que podrían ser lineales o exponenciales, dé una posible fórmula para la función.

Tabla 1.39

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
0	25	30.8	15,000
1	20	27.6	9,000
2	14	24.4	5,400
3	7	21.2	3,240

15. Un cine tiene costos fijos de $5,000 diarios y costos variables de aproximadamente $2 por cliente. El cine cobra a $7 el boleto.

(a) ¿Cuántos clientes al día necesita tener el cine para obtener utilidades?

(b) Determine las funciones de costos e ingreso y grafíquelas en los mismos ejes. Señale el punto de beneficio nulo.

16. La tabla 1.40 muestra la concentración, c, de creatinina en el torrente sanguíneo de un perro.[44]

(a) Incluyendo las unidades, encuentre la razón promedio de cambio de dicha sustancia entre los minutos

(i) sexto y octavo. (ii) octavo y décimo.

(b) Explique el signo y las magnitudes relativas de sus resultados en términos de creatinina.

Tabla 1.40

t (minutos)	2	4	6	8	10
c (mg/ml)	0.439	0.383	0.336	0.298	0.266

[42]De *Value Line Investment Survey*, Value Line Publishing, Inc., Nueva York, 14 de noviembre de 1997, p. 1547.
[43]De *Value Line Investment Survey*, Value Line Publishing, Inc., Nueva York, 12 de diciembre de 1997, p. 105.
[44]De Cullen, M. R., *Linear Models in Biology*, Ellis Horwood, Chichester, 1985.

17. Para fines de impuestos, usted tiene que declarar el valor de sus activos fijos, por ejemplo, automóviles o refrigeradores. El valor que declara se deprecia, o cae, con el tiempo. "La depreciación en línea recta" supone que el valor es una función lineal del tiempo. Si un refrigerador de $950 se deprecia por completo en siete años, encuentre una fórmula para su valor como función del tiempo.

18. Las seis gráficas en la figura 1.109 muestran patrones usualmente observados respecto a las tasas de incidencia de cáncer en número de casos por 1,000 personas, como función de la edad.[45] Las escalas de los ejes verticales son iguales.

(a) Para cada una de las seis gráficas, escriba un enunciado que explique el efecto de la edad sobre la tasa de cáncer.

(b) ¿Qué gráfica muestra una tasa de incidencia relativamente alta para los niños? Sugiera un tipo de cáncer que se comporte de esta forma.

(c) ¿Qué gráfica muestra un ligero descenso en la tasa de incidencia alrededor de los 50 años de edad? Sugiera un tipo de cáncer que pueda comportarse de esta manera.

(d) ¿Cuál o cuáles gráficas pueden representar un cáncer que sea causado por las toxinas que se acumulan en el cuerpo a lo largo del tiempo? (Por ejemplo, cáncer de pulmón.) Explique.

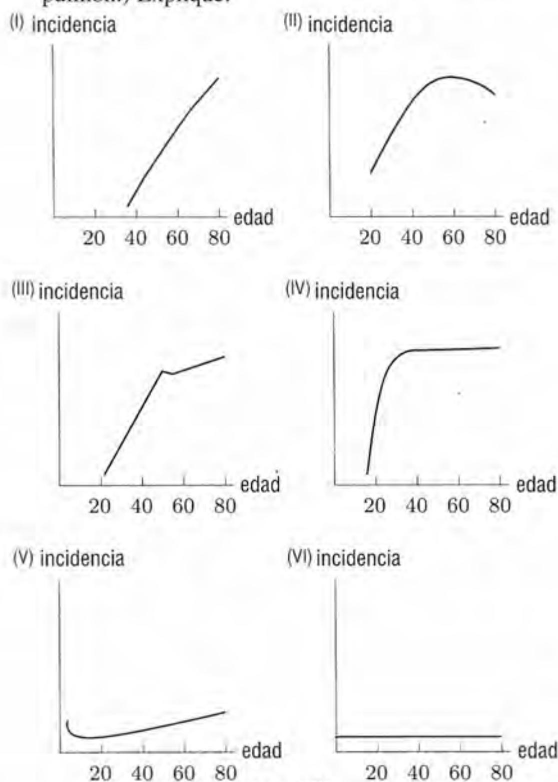


Figura 1.109.

19. La figura 1.110 muestra las tasas de mortalidad por edad para diferentes tipos de cáncer en varones estadounidenses.[46]

(a) Analice cómo ha cambiado la tasa de mortalidad para los diferentes tipos de cáncer.

(b) ¿Para qué tipo de cáncer ha sido la mayor la razón promedio de cambio entre 1930 y 1967? Estime la razón promedio de cambio para este tipo de cáncer. Explique su respuesta.

(c) ¿Para qué tipo de cáncer la razón promedio de cambio entre 1930 y 1967 fue la más negativa? Calcule la razón promedio de cambio para este tipo de cáncer. Explique su respuesta.

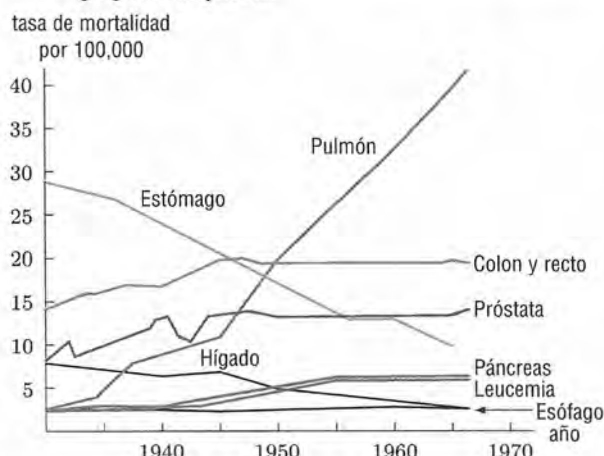
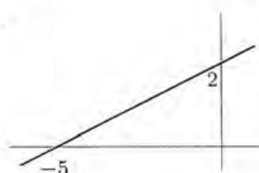


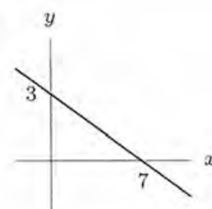
Figura 1.110.

Encuentre las posibles fórmulas para las gráficas de los problemas 20 al 25.

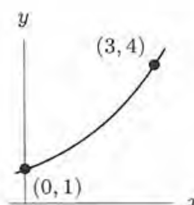
20.



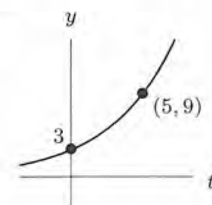
21.



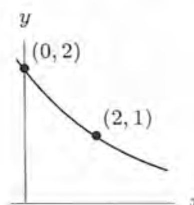
22.



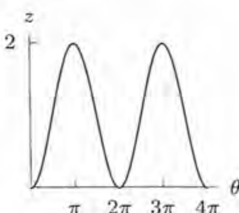
23.



24.



25.



---

[45]Abraham M. Lilienfeld, *Foundations of Epidemiology*, Oxford University Press, Nueva York, 1976, p. 155.
[46]*Ibídem*, p. 67.

Para los problemas del 26 al 29 resuelva en x usando logaritmos.

26. $3^x = 11$

27. $20 = 50(1.04)^x$

28. $e^{5x} = 100$

29. $25e^{3x} = 10$

30. Si usted necesita \$20,000 en su cuenta bancaria en seis años, ¿cuánto debe depositar ahora? La tasa de interés es del 10% compuesta continuamente.

31. Si un banco paga un interés compuesto continuamente de 6% al año, ¿cuánto tiempo se necesita para que se duplique el saldo de una cuenta?

32. La capacidad mundial de generación de energía eólica[47] fue de 1,930 megavatios en 1990 y de 18,100 megavatios en el año 2000.

(a) Use los valores señalados para escribir W, en megavatios, como función lineal de t, el número de años desde 1990.

(b) Emplee los valores indicados para escribir W como función exponencial de t.

(c) Trace la gráfica de las funciones encontradas en los incisos (a) y (b) en un mismo sistema de coordenadas. Señale los valores dados.

33. La concentración, C, de bióxido de carbono en la atmósfera fue de 338.5 partes por millón (ppm) en 1980, y de 369.4 ppm en el 2000.[48] Encuentre una fórmula para la concentración C en t años después de 1980 si:

(a) C es una función lineal de t. ¿Cuál es la proporción absoluta anual del incremento en la concentración de bióxido de carbono?

(b) C es una función exponencial de t. ¿Cuál es la proporción relativa anual del incremento en la concentración de bióxido de carbono?

34. Las mujeres embarazadas metabolizan ciertas sustancias a una tasa menor que el resto de la población. La vida media de la cafeína es de aproximadamente cuatro horas para la mayoría de las personas. En mujeres embarazadas es de 10 horas.[49] (Esto es importante porque la cafeína, como todas las drogas psicoactivas, atraviesa la placenta y llega al feto.) Si una mujer embarazada y su esposo toman, cada uno, una taza de café que contenga 100 mg de cafeína a las 8:00 a. m., ¿cuánta cafeína tiene en su cuerpo cada uno a las 10:00 p. m?

35. La vida media del estroncio 90 radiactivo es de 29 años. En 1929 el estroncio 90 radiactivo fue liberado a la atmósfera durante un experimento de armas nucleares, y los huesos de las personas lo absorbieron. ¿Cuántos años se necesitan para que sólo permanezca el 10% de la cantidad original?

36. Si la población mundial aumentó exponencialmente de 2.564 mil millones en 1950 a 4.478 mil millones en 1980 y continuará aumentando a la misma tasa porcentual entre 1980 y 1991, ¿cuál sería la población mundial en 1991? ¿Cómo se compara esto con la población actual de 5.423 mil millones y qué puede usted concluir?

37. Sean $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \ln x$. Determine

(a) $f(g(x))$ (b) $g(f(x))$ (c) $f(f(x))$

38. Sean $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 5x^2$. Calcule

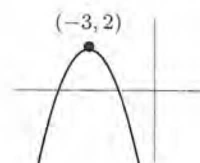
(a) $f(g(x))$ (b) $g(f(x))$ (c) $f(f(x))$

39. La masa sanguínea de un mamífero es proporcional a su masa corporal. Un rinoceronte con una masa corporal de 3,000 kilogramos tiene una masa sanguínea de 150 kilogramos. Encuentre una fórmula para la masa sanguínea de un mamífero como función de la masa corporal, y calcule la masa sanguínea de una persona con una masa corporal de 70 kilogramos.

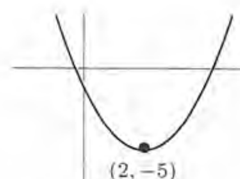
40. El número de especies de lagartos, N, descubierto en una isla cercana a Baja California, es proporcional a la raíz cuártica del área, A, de la isla.[50] Escriba una fórmula para N como función de A. Trace la gráfica de esta función. ¿Es creciente o decreciente? ¿La gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? ¿Qué le dice esto sobre los lagartos y el área de la isla?

En los problemas del 41 al 42 use los desplazamientos de una función de potencias para encontrar una posible fórmula para la gráfica.

41.



42.



43. Una empresa produce y vende camisas. Los costos fijos son de \$7,000 y los costos variables de \$5 por camisa.

(a) Las camisas se venden en \$12 cada una. Encuentre el costo y el ingreso como funciones de la cantidad de camisas, q.

(b) La empresa está considerando cambiar el precio de venta de las camisas. Suponga que la ecuación de demanda es $q = 2{,}000 - 40p$, donde p es el precio en dólares y q es el número de camisas. ¿Qué cantidad se vende al precio actual de \$12? ¿Qué utilidad se obtiene a este precio?

(c) Utilice la ecuación de demanda para escribir costo e ingreso como funciones del precio, p, y después escriba la ganancia como función del precio.

(d) Trace la gráfica de la ganancia respecto al tiempo. Determine el precio que maximiza el beneficio. ¿Cuál es esta ganancia?

[47]The Worldwatch Institute, *Vital Signs 2001*, W. W. Norton, Nueva York, 2001, p. 45.
[48]*Ibídem*, p. 53.
[49]De Robert M. Julien, *A Primer of Drug Action*, séptima edición, W. H. Freeman, Nueva York, 1995, p. 159.
[50]Rosenzweig, M. L., *Species Diversity in Space and Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, p. 143.

43. La figura 1.111 muestra las curvas de oferta y demanda.

(a) ¿Cuál es el precio de equilibrio de este producto? A este precio, ¿cuál es la cantidad producida?

(b) Elija un precio que sea mayor al precio de equilibrio, por ejemplo, $p = 300$. A este precio, ¿cuántas unidades están dispuestos a producir los fabricantes? ¿Cuántas unidades desean comprar los consumidores? Utilice sus respuestas a estas preguntas para explicar por qué, si los precios son mayores al precio de equilibrio, el mercado tiende a bajarlos (hacia el precio de equilibrio)?

(c) Ahora, escoja un precio que sea menor al de equilibrio, por ejemplo, $p = 200$. A este precio, ¿cuántas unidades están dispuestos a producir los fabricantes? ¿Cuántas unidades desean comprar los consumidores? Use sus respuestas a estas preguntas para explicar por qué, si los precios son menores al precio de equilibrio, el mercado tiende a subirlos (hacia el precio de equilibrio)?

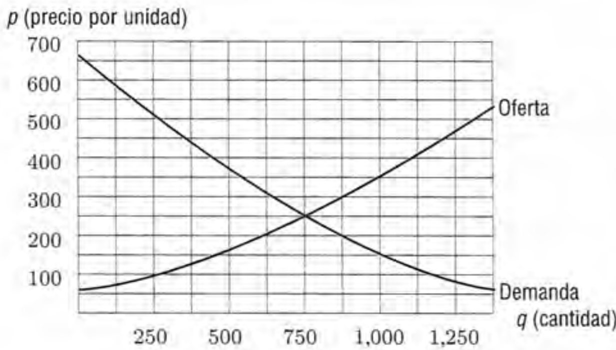


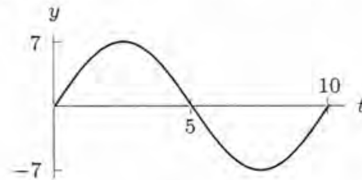
Figura 1.111.

45. Usted gana \$38,000 en la lotería estatal, los cuales le serán entregados en dos pagos, \$19,000 ahora y \$19,000 en un año. Un amigo le ofrece \$36,000 a cambio de sus dos pagos de la lotería. En vez de aceptar la oferta de su amigo, usted obtiene un préstamo de un año a una tasa de interés del 8.25% por año compuesta anualmente. El préstamo lo tendrá que saldar con un solo pago de \$19,000 (su segundo cheque de la lotería) al final del año. ¿Qué es mejor, la oferta de su amigo o el préstamo?

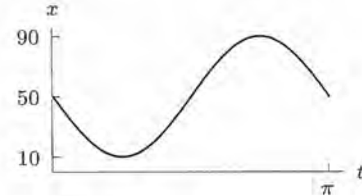
46. Usted está considerando si comprar o rentar una máquina cuyo precio de compra es de \$12,000. Los impuestos por la máquina serán de \$580 en un año, de \$464 en dos años y de \$290 en tres años. Si usted compra la máquina, espera poder venderla después de tres años a \$5,000. Si renta la máquina durante tres años, hará un pago inicial de \$2,650, y después tres pagos de \$2,650 al final de cada uno de los próximos tres años, y la empresa arrendadora pagará los impuestos. La tasa de interés es de 7.75% por año compuesta anualmente. ¿Le conviene comprar o rentar la máquina? Explique.

Encuentre una fórmula posible para las funciones de los problemas del 47 al 48.

47.



48.



49. La figura 1.112 muestra el número de casos de paperas reportados[51] por mes, en Estados Unidos, durante 1972-1973.

(a) Encuentre el periodo y la amplitud de esta función e interprete cada uno en términos de paperas.

(b) Pronostique el número de casos de paperas 30 meses y 45 meses después del 1o. de enero de 1972.

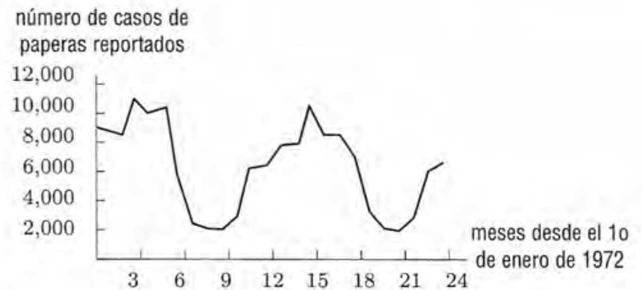


Figura 1.112.

50. La profundidad del agua en un tanque realiza una oscilación completa cada seis horas. Si la profundidad menor es de 5.5 pies, y la profundidad mayor es de 8.5 pies, encuentre una posible fórmula para la profundidad en términos del tiempo en horas.

51. La tabla 1.41 indica los valores para $g(t)$, una función periódica.

(a) Calcule el periodo y la amplitud de esta función.

(b) Calcule $g(34)$ y $g(60)$.

Tabla 1.41

t	0	2	4	6	8	10	12	14
$g(t)$	14	19	17	15	13	11	14	19
t	16	18	20	22	24	26	28	
$g(t)$	17	15	13	11	14	19	17	

[51]Centro para el Control de Enfermedades, *Reported Morbidity and Mortality in the United States 1973*, vol. 22, núm. 53, 1974.

PROYECTOS

1. Interés compuesto

El artículo que se incluye a continuación es del periódico *The New York Times*, del 27 de mayo de 1990. Complete los tres espacios vacíos. (En el primer espacio, suponga que la composición diaria es esencialmente la misma que la composición continua. En el último espacio, suponga que el interés se ha compuesto anualmente y dé su respuesta en dólares. Ignore la presencia de saltos en los años.)

213 Años después del préstamo, le cobran al Tío Sam

Por Lisa Belkin

En exclusiva para *The New York Times*

SAN ANTONIO, 26 de mayo.— Hace más de 200 años un acaudalado comerciante de Pensilvania, llamado Jacobo DeHaven, prestó $450,000 al Congreso Continental para rescatar a las tropas del Valle Forge. Ese préstamo aparentemente nunca fue pagado.

Por tanto, los descendientes del señor DeHaven llevan al Gobierno de Estados Unidos a la corte para cobrar el dinero que ellos dicen se les debe. El total es de: ________ en dólares actuales si el interés se compone diariamente al 6%, la tasa vigente hoy. Si se compone anualmente, la cuenta sólo es de ________.

La familia es flexible

Los descendientes de DeHaven dicen que están dispuestos a ser flexibles en la cantidad de la liquidación de la deuda, y que incluso podrían aceptar un agradecimiento de corazón, o quizás una estatua de DeHaven. Pero también advierten que el interés está acumulándose ________ cada segundo.

2. Centro de población de Estados Unidos

Desde la apertura del Oeste, la población de Estados Unidos comenzó a mudarse hacia el occidente. Para observar esto, se examina el "centro de población" de los Estados Unidos, el cual es el punto en el que el país se equilibraría si fuera un plato plano sin peso, y en el que cada persona tendría un peso igual. En 1790, el centro de población fue el este de Baltimore: Maryland. Desde entonces dicho centro se ha estado desplazando hacia el oeste, y en 1990 cruzó el río Mississippi hacia Steelville, Missouri (al sureste de St. Louis). Durante la segunda mitad del siglo XX, el centro de población se ha desplazado aproximadamente 50 millas hacia el oeste cada 10 años.

(a) Se mide la posición hacia el oeste desde Steelville por la línea que atraviesa Baltimore. Para los años desde 1990, exprese la posición aproximada del centro de población como función del tiempo en años desde 1990.

(b) La distancia de Baltimore a Steelville es un poco mayor de 700 millas. ¿El centro de población puede haberse estado moviendo en aproximadamente la misma tasa durante los últimos dos siglos?

(c) ¿La función del inciso (a) podría continuar vigente en los próximos cuatro siglos? ¿Por qué sí o por qué no? (Sugerencia: si lo desea puede ver un mapa. Observe que las distancias están en millas aéreas y no son distancias de viaje terrestre.)

ENFOQUE SOBRE MODELADO

PARA AJUSTAR FÓRMULAS A DATOS

En esta sección veremos cómo se pueden desarrollar las fórmulas que se usan en un modelo matemático. Algunas de las fórmulas que usamos son exactas. Sin embargo, algunas de éstas son aproximaciones, a veces construidas a partir de tablas de datos.

Para ajustar una función lineal a datos

Una empresa quiere entender la relación entre la cantidad gastada en publicidad, a, y las ventas totales, S. Los datos que recaban pueden ser semejantes a los de la tabla 1.42.

Tabla 1.42 *Publicidad y ventas: relación lineal*

a (publicidad en miles)	3	4	5	6
S (ventas en miles)	100	120	140	160

Los datos de la tabla 1.42 son lineales, así que es fácil hallar la fórmula para ajustarla exactamente. La pendiente de la recta es 20 y es posible determinar que la ordenada en el origen es 40, de modo que la recta es

$$S = 40 + 20\,a.$$

Ahora supongamos que los datos recabados por la empresa se muestran en la tabla 1.43. Esta vez los datos no son lineales. En general, es difícil hallar una fórmula para ajustar datos exactamente. Debemos estar satisfechos con una fórmula que sea una buena aproximación a los datos.

Tabla 1.43 *Publicidad y ventas: relación no lineal*

a (publicidad en miles)	3	4	5	6
S (ventas en miles)	105	117	141	152

La figura 1.113 muestra los datos de la tabla 1.43. Puesto que la relación es casi lineal, podemos lograr una buena aproximación mediante una recta. La figura 1.114 muestra la recta $S = 40 + 20a$ y los datos.

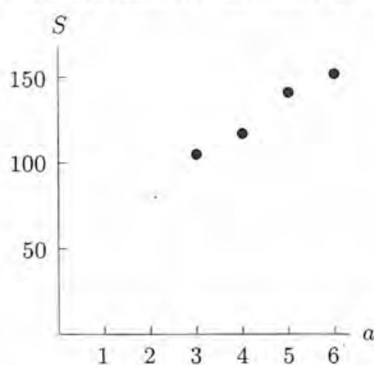


Figura 1.113. Datos de ventas de la tabla 1.43.

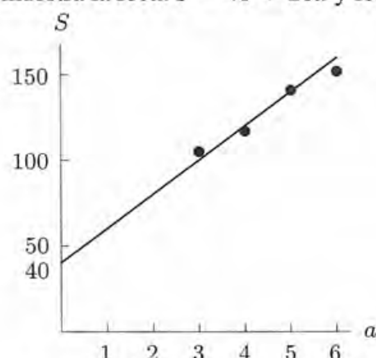


Figura 1.114. La recta $S = 40 + 20a$ y los datos de la tabla 1.43.

La recta de regresión

¿Hay una recta que ajuste los datos mejor que la de la figura 1.114? Si es así, ¿cómo la encontramos? El proceso de ajustar una recta a un conjunto de datos recibe el nombre de *regresión lineal*, y a la recta que ajusta mejor se denomina *recta de regresión*. (Véase en la página 77 un análisis de lo que significa "ajusta mejora".) Muchas calculadoras y programas de computadora calculan la recta de regresión a partir de puntos de datos. Por otra parte, la recta de regresión se puede estimar al trazar los puntos sobre papel y ajustar una recta "a simple vista". En el capítulo 9 se deducen las fórmulas para la recta de regresión. Para los datos de la tabla 1.43, la recta de regresión es

$$S = 54.5 + 16.5a.$$

Esta recta está graficada con los datos de la figura 1.115.

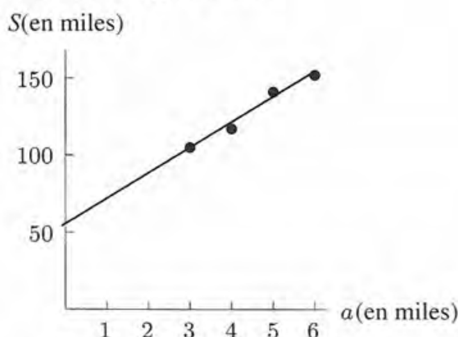


Figura 1.115. Recta de regresión $S = 54.5+16.5^a$ y los datos de la tabla 1.43.

Uso de la recta de regresión para hacer pronósticos

Podemos usar la fórmula de las ventas para hacer pronósticos. Por ejemplo, para pronosticar ventas totales si se gastan \$3,500 en publicidad, sustituimos $a = 3.5$ en la recta de regresión:

$$S = 54.5 + 16.5(3.5) = 112.25$$

La recta de regresión pronostica ventas de \$112,250. Para ver que esto sea razonable, comparémosla con las entradas de la tabla 1.43. Cuando $a = 3$ tenemos $S = 105$, y cuando $a = 4$ tenemos $S = 117$. Las ventas pronosticadas de $S = 112.25$ cuando $a = 3.5$ tienen sentido porque cae entre 105 y 117. Véase la figura 1.116. Por supuesto, si gastamos \$3,500 en publicidad, es probable que las ventas no sean exactamente de \$112,250. La ecuación de regresión nos permite hacer pronósticos, pero no da resultados exactos.

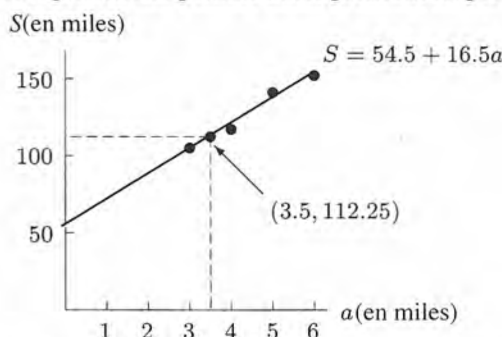


Figura 1.116. Pronóstico de ventas cuando se gasta \$3,500 en publicidad.

Ejemplo 1 Pronostique las ventas totales si los gastos de publicidad son de \$4,800 y \$10,000.

Solución Cuando se gasta \$4,800 en publicidad, $a = 4.8$, de modo que

$$S = 54.5 + 16.5(4.8) = 133.7.$$

Se pronostica que las ventas sean de \$133,700. Cuando se gastan \$10,000 en publicidad, $a = 10$, y

$$S = 54.5 + 16.5(10) = 219.5$$

Se pronostica que las ventas sean de \$219,500.

Considere los dos pronósticos hechos en el ejemplo 1 en $a = 4.8$ y $a = 10$. Confiamos más en la precisión del pronóstico cuando $a = 4.8$, porque estamos *interpolando* dentro de un intervalo del que ya conocemos algo. El pronóstico para $a = 10$ es menos confiable porque estamos *extrapolando* fuera del intervalo definido por los valores de datos de la tabla 1.43. En general, la interpolación es más segura que la extrapolación.

Interpretación de la pendiente de la recta de regresión

La pendiente de una función lineal es el cambio en la variable dependiente, dividido entre el cambio en la variable independiente. Para la recta de regresión de ventas y publicidad la pendiente es 16.5. Esto nos dice que S aumenta cerca de 16.5 siempre que a aumenta 1. Si los gastos de publicidad se incrementan \$1,000, las ventas crecen unos \$16,500. En general, la pendiente nos dice el cambio esperado en la variable dependiente para cambio unitario en la variable independiente.

Ejemplo 2 Una empresa ha recabado los datos de la tabla 1.44 referentes al costo de producir su producto. Encuentre la recta de regresión e interprete su pendiente.

Tabla 1.44 *Costo de producir diferentes cantidades de un producto*

q (cantidad en unidades)	25	50	75	100	125
C (costo en dólares)	500	625	689	742	893

Solución Con calculadora o computadora se tiene la recta de regresión

$$C = 418.9 + 3.612q.$$

La recta de regresión ajusta muy bien los datos; véase la figura 1.117. La pendiente de la recta es 3.612, lo cual significa que el costo aumenta aproximadamente \$3.612 por cada unidad adicional producida, es decir, el costo marginal es de \$3.612 por unidad.

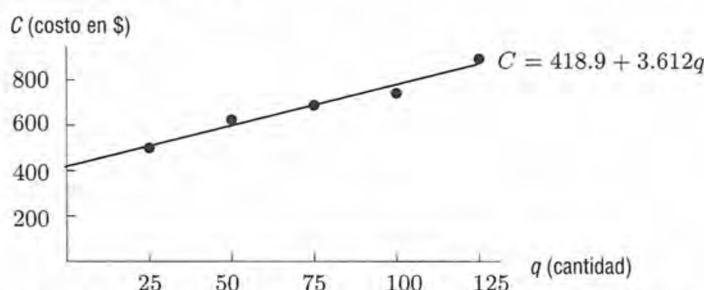


Figura 1.117. La recta de regresión para los datos de la tabla 1.44.

Cómo trabaja la regresión: qué significa "ajusta mejor"

La figura 1.118 muestra cómo ajustar una recta a un conjunto de datos. Suponemos que el valor de y está relacionado de alguna manera con el valor de x, aunque pueden influir en y algunos otros factores. Así, suponemos que podemos elegir el valor de x exactamente, pero el valor de y sólo lo podemos determinar de manera parcial con este valor de x.

Con calculadora o computadora se encuentra la recta que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los puntos de los datos y la recta. Véase la figura 1.118. La recta de regresión también se llama *recta de mínimos cuadrados* o *recta de mejor ajuste*.



Figura 1.118. Conjunto de datos y la correspondiente recta de regresión de mínimos cuadrados.

Regresión cuando la relación no es lineal

La tabla 1.45 muestra la población de Estados Unidos (en millones) de 1790 a 1860. Estos puntos están graficados en la figura 1.119. ¿Parecen lineales los datos? En realidad, no. Parece tener más sentido ajustar estos datos a una función exponencial que a una función lineal. Hallar la función exponencial de mejor ajuste se denomina *regresión exponencial*. Un algoritmo usado por una calculadora o una computadora da la función exponencial que ajusta los datos como

$$P = 3.9(1.03)^t$$

donde P es la población de Estados Unidos en millones, y t es los años desde 1790. Otros algoritmos pueden dar diferentes respuestas. Véase la figura 1.120.

Como la base de esta función exponencial es 1.03, la población de Estados Unidos estaba creciendo a una tasa de 3% anual entre 1790 y 1860. ¿Es razonable esperar que la población continúe creciendo a esta tasa? Lo anterior nos dice que este modelo exponencial no se ajusta a la población de Estados Unidos después de 1860. En la sección 4.7 vemos otra función que se emplea para modelar la población de Estados Unidos.

Tabla 1.45 *Población de Estados Unidos en millones*, 1790-1860

Año	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
Población	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2	31.4

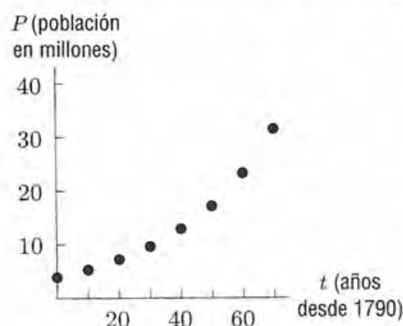


Figura 1.119. Población de Estados Unidos, 1790-1860.

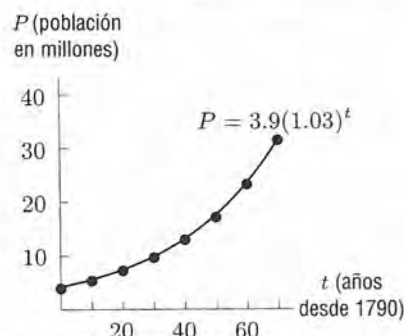


Figura 1.120. Población de Estados Unidos y función exponencial de regresión de mejor ajuste.

Las calculadoras y computadoras pueden hacer regresión lineal, regresión exponencial, regresión logarítmica y regresión cuadrática. Para ajustar una fórmula a un conjunto de datos, el primer paso es graficar los datos e identificar la familia de funciones apropiada.

Ejemplo 3 La eficiencia promedio del combustible (millas por galón de gasolina) de automóviles en Estados Unidos declinó hasta la década de 1960 y luego comenzó a subir cuando los fabricantes hicieron automóviles más eficientes en combustible.[52] Véase la tabla 1.46.

(a) Trace una gráfica de los datos. ¿Qué familia de funciones debe usarse para modelar los datos: lineal, exponencial, logarítmica, función de potencia o un polinomio? Si es un polinomio, exprese el grado y si el coeficiente principal es positivo o negativo.

(b) Use la regresión cuadrática para ajustar el mejor polinomio cuadrático a los datos; trace una gráfica de ella con los datos.

Tabla 1.46 *¿Qué función ajusta estos datos?*

Año	1940	1950	1960	1970	1980	1986
Millas promedio por galón	14.8	13.9	13.4	13.5	15.5	18.3

[52]C. Schaufele y N. Zumoff, *Earth Algebra* (versión preliminar), Harper Collins, Nueva York, 1993, p. 91.

Solución (a) En la figura 1.121 se muestran los datos, con el tiempo t en años desde 1940. Las millas por galón decrecen y después aumentan, así que una buena función para modelar los datos es un polinomio cuadrático (grado 2). Como la parábola se abre hacia arriba, el coeficiente principal es positivo.

(b) Si $f(t)$ es el promedio de millas por galón, una regresión cuadrática nos dice que el mejor polinomio cuadrático que ajusta los datos es

$$f(t) = 0.00617t^2 - 0.225t + 15.10.$$

En la figura 1.122 vemos que este polinomio cuadrático ajusta los datos razonablemente bien.

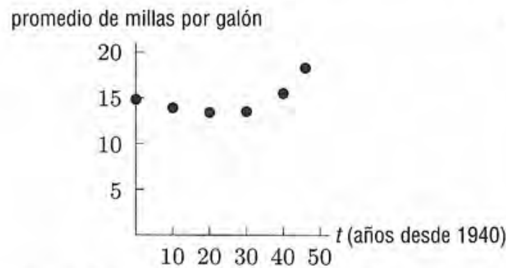


Figura 1.121. Datos que muestran la eficiencia de combustible de automóviles en Estados Unidos, respecto al tiempo.

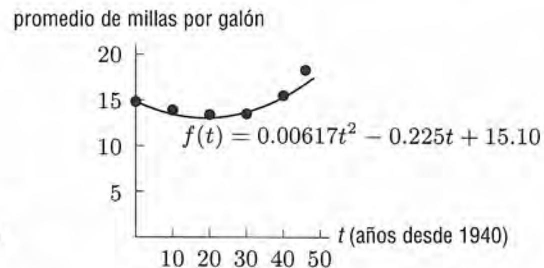


Figura 1.122. Datos y mejor polinomio cuadrado encontrado usando regresión.

Problemas sobre ajuste de fórmulas a datos

1. La tabla 1.47 muestra el producto mundial bruto, G, que mide la producción global de bienes y servicios.[53] Si t es años desde 1950, la recta de regresión para estos datos es

$$G = 3.543 + 0.734\,t.$$

(a) Trace una gráfica de los datos y de la recta de regresión en un mismo sistema de coordenadas. ¿La recta se ajusta bien con los datos?

(b) Interprete la pendiente de la recta en términos del producto mundial bruto.

(c) Use la recta de regresión para estimar el producto mundial bruto en el 2005 y en el 2020. Justifique su confianza en las dos predicciones.

Tabla 1.47 *G en trillones de dólares de 1999*

Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000
G	6.4	10.0	16.3	23.6	31.9	43.2

2. La tabla 1.48 muestra la producción mundial de cigarrillos como función de t, el número de años desde 1950.[54]

(a) Encuentre la recta de regresión para estos datos.

(b) Use la recta de regresión para calcular la producción mundial de cigarrillos en el año 2010.

(c) Interprete la pendiente de la recta en términos de la producción de cigarrillos.

(d) Trace la gráfica de los datos y la recta de regresión en los mismos ejes. ¿La recta se ajusta bien con los datos?

Tabla 1.48 *Producción de cigarrillos, P, en miles de millones*

t	0	10	20	30	40	50
P	1,686	2,150	3,112	4,388	5,419	5,564

3. La tabla 1.49 muestra el producto interno bruto (PIB) de Estados Unidos.

(a) Realice la gráfica de PIB respecto a los años desde 1960. ¿La recta se ajusta bien con los datos?

(b) Encuentre la regresión lineal y elabore una gráfica con los datos.

(c) Use la recta de regresión para calcular el PIB en 1985 y en el 2020. ¿Cuál le parece que es más confiable? ¿Por qué?

Tabla 1.49 *PIB en dólares de 1982*

Año	1960	1970	1980	1989
PIB (miles de millones)	1,665	2,416	3,187	4,118

[53]The Worldwatch Institute, *Vital Signs 2001*, W. W. Norton, Nueva York, 2001, p. 57.
[54]*Ibídem*, p. 77.

4. La acidez de una solución se mide por su pH, donde los valores más bajos del pH indican más acidez. Se realizó un estudio de lluvia ácida en Colorado entre 1975 y 1978, en el que la acidez de la lluvia se midió durante 150 semanas consecutivas. Los datos siguieron un patrón generalmente lineal y se determinó que la recta de regresión era

$$P = 5.43 - 0.0053t,$$

donde P es el pH de la lluvia y t es el número de semanas del estudio.[55]

(a) ¿El nivel de pH es creciente o decreciente durante el periodo de estudio? ¿Qué le indica esto acerca del nivel de acidez de la lluvia?

(b) De acuerdo con la recta, ¿cuál fue el pH al principio del estudio? ¿Y al final de éste ($t = 150$)?

(c) ¿Cuál es la pendiente de la recta de regresión? Explique qué le dice esta pendiente acerca del pH.

5. En 1977 se realizó un estudio[56] de las 21 mejores corredoras norteamericanas: los investigadores midieron el promedio de la razón de zancada, S, a diferentes velocidades, v. Los datos aparecen en la tabla 1.50.

(a) Encuentre la recta de regresión para estos datos, usando la razón de zancada como la variable dependiente.

(b) Trace una gráfica de la recta de regresión y los datos en un mismo sistema de coordenadas. ¿La recta ajusta bien con los datos?

(c) Use la recta de regresión para predecir la razón de zancada cuando la velocidad sea de l8 pies/s, y cuando la velocidad sea de 10 pies/s. ¿En cuál pronóstico confía usted más?, ¿Por qué?

Tabla 1.50 *Razón de zancada, S, en pasos/s y velocidad, v, en pies/s*

v	15.86	16.88	17.50	18.62	19.97	21.06	22.11
S	3.05	3.12	3.17	3.25	3.36	3.46	3.55

6. La tabla 1.51 muestra la concentración atmosférica de bióxido de carbono, CO_2 (en partículas por millón, ppm) en el Observatorio Mauna Loa de Hawai.[57]

(a) Encuentre la razón promedio de cambio de la concentración de bióxido de carbono entre 1960 y 1990. Dé las unidades con su respuesta e interprétela en términos de bióxido de carbono.

(b) Trace la gráfica de los datos y encuentre la recta de regresión para la concentración de bióxido de carbono respecto a los años desde 1960. Utilice la recta de regresión para pronosticar la concentración de bióxido de carbono en la atmósfera en el año 2000.

Tabla 1.51

Año	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
CO_2	316.8	319.9	325.3	331.0	338.5	345.7	354.0

7. En el problema 6, el aumento en la concentración de bióxido de carbono se modeló como una función lineal del tiempo. Sin embargo, si incluimos datos para concentración de bióxido de carbono desde 1900, los datos parecen ser más exponenciales que lineales. (Se vieron lineales en el problema 6 porque sólo estábamos viendo una pequeña parte de la gráfica.) Si C es la concentración de CO_2 en ppm, y t está dado en años desde 1900, una función de regresión exponencial que ajusta los datos es

$$C = 272.27(1.0026)^t.$$

(a) ¿Cuál es la tasa porcentual de crecimiento anual durante este periodo? Interprete esta razón en términos de la concentración de CO_2.

(b) ¿Qué concentración de CO_2 da el modelo para 1900? ¿Y para 1980? Compare la estimación para 1980 con el valor real dado en la tabla 1.51.

8. La tabla 1.52 muestra el promedio anual *per capita* (es decir, por persona) en gastos de salud pública durante varios años. ¿Qué ajusta mejor estos datos, un modelo lineal o uno exponencial? Encuentre una fórmula para la función de regresión que usted considere sea la mejor. Trace una gráfica de la función con los datos y evalúe qué tan bien se ajusta a los datos.

Tabla 1.52 *Gastos en salud,* per capita

Años desde 1970, t	0	5	10	15	20
Gastos, C	349	591	1,055	1,596	2,714

9. La tabla 1.53 muestra el número, N, de automóviles en Estados Unidos.[58]

(a) Trace la gráfica de los datos, con el número de automóviles como la variable dependiente.

(b) ¿Qué ajusta mejor los datos, el modelo lineal o el exponencial?

(c) Use primero un modelo lineal. Encuentre la recta de regresión para estos datos. Trace una gráfica de ésta con los datos. Utilice la recta de regresión para predecir el número de automóviles en el año 2010 ($t = 70$).

(d) Interprete la pendiente de la recta de regresión encontrada en el inciso (c) en términos de automóviles.

(e) Ahora use un modelo exponencial. Encuentre la función de regresión exponencial para estos datos; trace una gráfica de ella con los datos. Use la función exponencial para pronosticar el número de automóviles en el año 2010 ($t = 70$). Compare su pronóstico con el que obtuvo del modelo lineal.

(f) ¿Qué tasa de crecimiento porcentual anual en el número de automóviles en Estados Unidos muestra su modelo exponencial?

---

[55] Lewis, William M., y Michael C. Grant, "Acid Precipitation in the Western United States", en *Science,* núm. 207, 1980, pp. 176-177.

[56] Nelson, R. C., C. M. Brooks y N. L. Pike, "Biomechanical Comparison of Male and Female Distance Runners", *The Marathon: Physiological, Medical, Epidemiological, and Psychological Studies*, P. Milvy, New York Academy of Sciences, Nueva York, 1977, pp. 793-807.

[57] Brown, Lester R., *et al., Vital Signs 1994,* W. W. Norton, Nueva York, 1994, p. 67.

[58] *Statistical Abstracts of the United States.*

Tabla 1.53 *Número de automóviles, en millones*

t (años desde 1940)	0	10	20	30	40	50
N (millones de autos)	27.5	40.3	61.7	89.3	121.6	133.7

10. La tabla 1.54 indica la población mundial en miles de millones en años desde 1950.

(a) Trace una gráfica de estos datos. ¿Qué modelo ajusta mejor los datos, el lineal o el exponencial?

(b) Encuentre la función de regresión exponencial.

(c) ¿Cuál tasa de crecimiento porcentual anual muestra la función exponencial?

(d) Pronostique la población mundial en el año 2000 y en el año 2050. Comente sobre la confianza relativa que tenga en estas dos estimaciones.

Tabla 1.54 *Población mundial*

Año (desde 1950)	0	10	20	30	40	44
Población mundial (miles de millones)	2.6	3.1	3.7	4.5	5.4	5.6

11. En 1969 todos los intentos de goles de campo fueron analizados en la Liga Nacional de Fútbol y la Liga Americana de Fútbol. (Véase la tabla 1.55. Los datos se han resumido: todos los intentos entre 10 y 19 yardas del poste de gol de campo aparecen como 14.5 yardas de distancia, etcétera.)

(a) Trace una gráfica de los datos, con la razón de éxitos como la variable dependiente. Analice si un modelo lineal o uno exponencial ajusta mejor.

(b) Encuentre la función de regresión lineal; trace una gráfica de ésta con los datos. Interprete la pendiente de la recta de regresión en términos de fútbol.

(c) Encuentre la función de regresión exponencial; trace una gráfica de ésta con los datos. ¿Qué razón de éxitos pronostica esta función desde una distancia de 50 yardas?

(d) Usando las gráficas de los incisos (b) y (c), decida qué modelo parece ajustar mejor los datos.

Tabla 1.55 *Fracción de éxitos de intentos de gol de campo*

Distancia (en yardas) gol de campo, x	14.5	24.5	34.5	44.5	52.0
Fracción de gol de campo, Y	0.90	0.75	0.54	0.29	0.15

11. La tabla 1.56 muestra el número de automóviles japoneses que ha importado Estados Unidos desde 1964.[59]

(a) Trace una gráfica del número de automóviles japoneses importados respecto al número de automóviles desde 1964.

(b) ¿Los datos parecen más lineales o más exponenciales?

(c) Ajuste una función exponencial a los datos y trace una gráfica de ésta con los datos.

(d) ¿Qué porcentaje de crecimiento anual muestra el modelo exponencial?

(e) ¿Usted espera que este modelo pronostique de manera más precisa después de 1971? Explique su respuesta.

Tabla 1.56 *Automóviles japoneses importados, 1964-1971*

Años desde 1964	0	1	2	3	4	5	6	7
Automóviles (miles)	16	24	56	70	170	260	381	704

13. En la figura 1.123 se muestra la producción de petróleo en el Medio Oriente, en millones de toneladas, como función del año.[60] Si usted tuviera que modelar esta función con un polinomio, ¿qué grado elegiría? ¿Sería positivo o negativo el coeficiente principal?

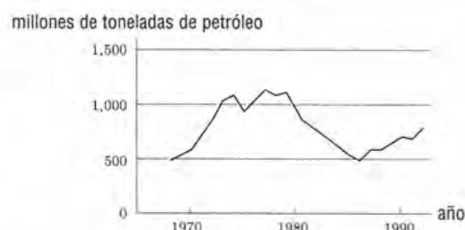


Figura 1.123.

En los problemas 14 al 16 están determinadas las tablas de datos.[61]

(a) Use una gráfica de los datos para decir si un modelo lineal, exponencial, logarítmico o cuadrático ajusta mejor los datos.

(b) Use una calculadora o una computadora para encontrar la ecuación de regresión para el modelo que eligió en el inciso (a). Si la ecuación es lineal o exponencial, interprete la razón de cambio absoluta o relativa.

(c) Use la ecuación de regresión para pronosticar el valor de la función en el año 2005.

(d) Grafique la ecuación de regresión en los mismos ejes que los datos, y haga comentarios acerca del ajuste.

14.

Potencia mundial solar, S, en megavatios; t en años desde 1990

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	46	55	58	60	69	79	89	126	153	201	288

15.

Ojiva nuclear, N, en miles; t en años desde 1960

t	0	15	10	15	20	25	30	35	40
N	20	39	40	52	61	69	60	43	32

16.

Bióxido de carbono, C, en ppm; t en años desde 1970

t	0	5	10	15	20	25	30
C	325.5	331.0	338.5	345.7	354.0	360.9	369.40

[59]*The World Almanac 1995.*

[60]Brown, Lester R., *et al.*, *Vital Signs*, W. W. Norton and Co., Nueva York, 1994, p. 49.

[61]The Worldwatch Institute, *Vital Signs 2001*, W. W. Norton and Co., Nueva York, 2001, p.47.

17. La tabla 1.57 da el área de un bosque lluvioso destruido para agricultura y desarrollo.[62]

(a) Trace una gráfica de estos datos.

(b) ¿Los datos son crecientes o decrecientes? ¿Cóncava hacia arriba, o cóncava hacia abajo? En cada caso, interprete su respuesta en términos del bosque lluvioso.

(c) Use calculadora o computadora para ajustar estos datos a una función logarítmica. Realice esta gráfica de la función en los mismos ejes que en el inciso (a).

(d) Use la curva que se encuentra en el inciso (c) para pronosticar el área de bosque lluvioso destruido en el año 2010.

Tabla 1.57 *Destrucción del bosque lluvioso*

x (año)	1960	1970	1980	1988
y (millones de hectáreas)	2.21	3.79	4.92	5.77

18. Para cada gráfica de la figura 1.124 decida si el mejor ajuste de los datos parece ser una función lineal, una función exponencial o un polinomio.

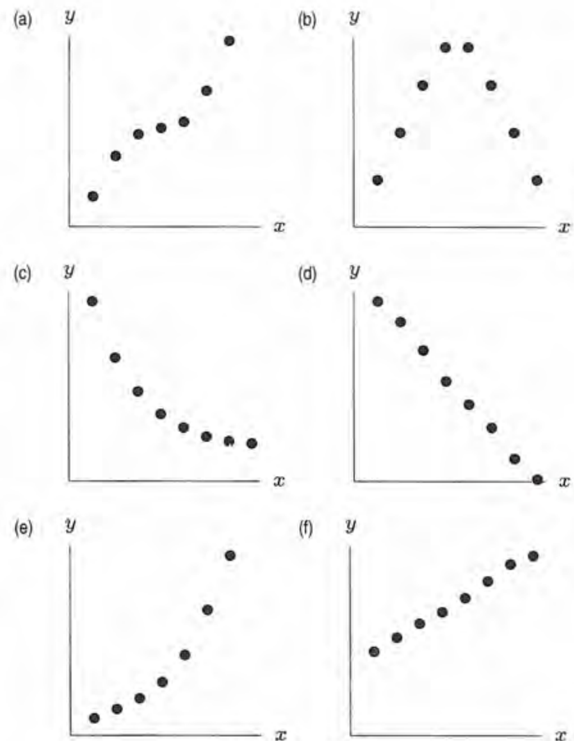


Figura 1.124.

INTERÉS COMPUESTO Y EL NÚMERO e

Si tiene un poco de dinero, puede decidir invertirlo para ganar interés. El interés se puede pagar de varias formas; por ejemplo, una vez al año o varias veces al año. Si el interés se paga con más frecuencia que una vez al año y los intereses no se retiran, hay un beneficio para el inversionista puesto que el interés gana intereses. Este efecto se llama *composición*. Puede haber observado que los bancos ofrecen cuentas que difieren tanto en tasas de interés como en métodos de composición. Algunos ofrecen intereses compuestos anualmente; otros, de manera trimestral, y otros, a diario. Algunos hasta ofrecen componer en forma continua.

¿Cuál es la diferencia entre una cuenta bancaria que anuncia el 8% de composición anual (una vez al año) y una que ofrece el 8% compuesto trimestralmente (cuatro veces por año)? En ambos casos, el 8% es una tasa de interés anual. La expresión del 8% *compuesto anualmente* significa que, al final de cada año, se suma el 8% del saldo actual. Esto equivale a multiplicar el saldo actual por 1.08. Así, si se depositan \$100, el saldo, B, en dólares, será

$$B = 100(1.08) \text{ después de un año,}$$
$$B = 100(1.08)^2 \text{ después de dos años,}$$
$$B = 100(1.08)^t \text{ después de } t \text{ años.}$$

La expresión 8% *compuesto trimestralmente* significa que el interés se suma cuatro veces al año (cada tres meses) y que $8/4 = 2\%$ del saldo actual se suma cada vez. Por tanto, si se depositan \$100, al final de un año habrán tenido lugar cuatro composiciones y la cuenta tendrá $\$100(1.02)^4$. Por tanto, el saldo será

$$B = 100(1.02)^4 \text{ después de un año}$$
$$B = 100(1.02)^8 \text{ después de dos años,}$$
$$B = 100(1.02)^{4t} \text{ después de } t \text{ años}$$

[62]Schaufele, C., y N. Zumoff, *Earth Algebra* (versión preliminar), Harper Collins, Nueva York, 1993, p. 131.

Observe que el 8% *no* es la tasa empleada para cada periodo de tres meses; la tasa anual se divide en cuatro pagos de 2%. El cálculo del saldo total después de un año en cada método muestra que

$$\text{Capitalización anual:} \quad B = 100(1.08) = 108.00$$
$$\text{Capitalización trimestral:} \quad B = 100(1.02)^4 = 108.24$$

Es decir, se gana más dinero en composición trimestral porque el interés gana interés a medida que transcurre el año. En general, cuanto más frecuente sea la composición del interés, se gana más dinero (aun cuando el aumento puede no ser muy grande).

Podemos medir el efecto de la composición al introducir el concepto de *rendimiento anual efectivo*. Como \$100 invertidos al 8% compuesto trimestralmente crecen a \$108.24 al final de un año, decimos que el *rendimiento anual efectivo* en este caso es de 8.24%. Ahora tenemos dos tasas de interés que describen la misma inversión: el 8% compuesto trimestralmente y el 8.24% de rendimiento anual efectivo. Los bancos lo llaman *tasa de porcentaje anual*, o TPA. También se le conoce como *tasa nominal* (nominal significa "sólo de nombre"). Sin embargo, el rendimiento efectivo es el que nos indica con exactitud cuánto interés paga la inversión. Así, para comparar dos cuentas bancarias, simplemente compare los rendimientos anuales efectivos. La siguiente vez que vaya a un banco observe los anuncios que deben incluir (por ley) la TPA, o tasa nominal, y el rendimiento anual efectivo. Con frecuencia, la *tasa de porcentaje anual* se abrevia *como tasa anual.*

Uso del rendimiento anual efectivo

Ejemplo 4 ¿Qué es mejor: el banco X que paga una tasa anual de 7% compuesto en forma mensual, o el banco Y que ofrece 6.9% de tasa anual compuesta diariamente?

Solución Encontramos el rendimiento anual efectivo para cada banco

Banco X: hay 12 pagos de interés en un año, siendo cada pago de $0.07/12 = 0.005833$ veces el saldo actual. Si el depósito inicial fuera de \$100, entonces el saldo B sería

$$B = 100(1.005833) \text{ después de un mes,}$$
$$B = 100(1.005833)^2 \text{ después de dos meses,}$$
$$B = 100(1.005833)^t \text{ después de } t \text{ meses.}$$

Para encontrar el rendimiento anual efectivo, vemos a un año, o 12 meses, lo cual da $B = 100(1.005833)^{12} = 100(1.072286)$, de modo que el rendimiento anual efectivo es ≈ 7.23 por ciento.

Banco Y: Hay 365 pagos de interés en un año (siempre que no sea un año bisiesto), siendo cada uno $0.069/365 = 0.000189$ veces el saldo actual. Entonces el saldo es

$$B = 100(1.000189) \text{ después de un día,}$$
$$B = 100(1.000189)^2 \text{ después de dos días,}$$
$$B = 100(1.000189)^t \text{ después de } t \text{ días.}$$

Por tanto, al final de un año hemos multiplicado el depósito inicial por

$$(1.000189)^{365} = 1.071413$$

de modo que el rendimiento anual efectivo para el Banco Y ≈ 7.14 por ciento.

Comparando los rendimientos anuales efectivos para los bancos, vemos que el Banco X está ofreciendo una mejor inversión, por un margen pequeño.

Ejemplo 5 Si se invierten $1,000 en cada banco del ejemplo 4, escriba una expresión para el saldo en cada banco después de t años.

Solución Para el Banco X el rendimiento anual efectivo $\approx 7.23\%$, de modo que después de t años el saldo, en dólares, será

$$B = 100\left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^{12t} = 1{,}000(1.005833)^{12t} = 1{,}000(1.0723)^t.$$

Para el Banco Y, el rendimiento anual efectivo $\approx 7.14\%$. Después de t años el saldo, en dólares, será

$$B = 1{,}000\left(1 + \frac{0.069}{365}\right)^{365t} = 1{,}000(1.0714)^t.$$

(Nuevamente, sin considerar años bisiestos.)

Si el interés a una tasa anual de r se compone n veces al año, entonces r/n por el saldo actual se suma n veces al año. Por tanto, con un depósito inicial de P, el saldo t años después es

$$B = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Observe que r es la tasa nominal, por ejemplo, $r = 0.05$ cuando la tasa anual es de 5 por ciento.

Aumento de la frecuencia de composición: composición continua

Veamos qué sucede al aumentar la frecuencia de la composición. ¿Qué tanto efecto tiene?

Ejemplo 6 Encuentre el rendimiento anual efectivo para una tasa de 7% anual compuesta
(a) 1,000 veces al año **(b)** 10,000 veces al año.

Solución En un año, un depósito se multiplica por

$$\left(1 + \frac{0.07}{1{,}000}\right)^{1{,}000} \approx 1.0725056,$$

lo que da un rendimiento anual efectivo de casi 7.25056%.

(b) En un año, un depósito se multiplica por

$$\left(1 + \frac{0.07}{10{,}000}\right)^{10{,}000} \approx 1.0725079,$$

lo que da un rendimiento anual efectivo de casi 7.25079%.

Podemos ver que no hay gran diferencia entre componer 1,000 veces cada año (unas tres veces por día) y 10,000 veces cada año (unas 30 veces por día). ¿Qué pasa si componemos incluso con más frecuencia? ¿Cada minuto? ¿Cada segundo? Le puede causar sorpresa saber que el rendimiento anual efectivo no aumenta indefinidamente, sino que tiende a un valor finito. El beneficio de aumentar la frecuencia de composición se hace despreciable después de cierto punto.

Por ejemplo, si calculáramos el rendimiento anual efectivo sobre una inversión al 7% compuesta n veces por año para valores de n mayores de 100,000, encontraríamos que

$$\left(1+\frac{0.07}{n}\right)^n \approx 1.0725082.$$

Por esto, el rendimiento anual efectivo es alrededor de 7.25082%. Aun si se toma $n = 1{,}000{,}000$ o $n = 10^{10}$, el rendimiento anual efectivo no cambiará de modo apreciable. El valor 7.25082% es un límite superior al que se aproxima a medida que aumenta la frecuencia de composición.

Cuando el rendimiento anual efectivo está en su límite superior, decimos que el interés se está *componiendo continuamente*. (La palabra *continuamente* se usa porque el límite superior se aproxima al componer con más y más frecuencia.) Así, cuando se compone una tasa anual nominal de 7% con tanta frecuencia que el rendimiento anual efectivo es de 7.25082%, decimos que el 7% se compone *continuamente*. Esto representa lo más que se puede obtener de una tasa nominal de 7 por ciento.

¿A qué corresponde el número e?

Resulta que e está íntimamente ligado a la composición continua. Para ver esto, use una calculadora para comprobar que $e^{0.07} \approx 1.0725082$, que es el mismo número que obtuvimos cuando compusimos el 7% un gran número de veces. Así, hemos descubierto que para n muy grande,

$$\left(1+\frac{0.07}{n}\right)^n \approx e^{0.07}$$

A medida que n aumenta, la aproximación es cada vez mejor y escribimos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0.07}{n}\right)^n = e^{0.07},$$

lo cual significa que a medida que n aumenta, el valor de $(1+0.07/n)^n$ se aproxima a $e^{0.07}$.

Si P se deposita a una tasa anual de 7% compuesto continuamente, el saldo, B, estará dado por

$$B = P(e^{0.07})^t = Pe^{0.07t}.$$

Si el interés de un depósito inicial de P se *compone continuamente* a una tasa anual r, el saldo t años después se puede calcular usando la fórmula

$$B = Pe^{rt}$$

Al resolver un problema que comprenda interés compuesto, es importante aclarar si las tasas de interés son tasas nominales o rendimientos efectivos, y también si la composición es continua o no.

Ejemplo 7 Encuentre el rendimiento anual efectivo de una tasa de 6% anual compuesta continuamente.

Solución En un año, una inversión de P será $Pe^{0.06}$. Usando calculadora vemos que

$$Pe^{0.06} = P(1.0618365).$$

De modo que el rendimiento anual efectivo es aproximadamente de 6.18 por ciento.

Ejemplo 8 Supongamos que usted invierte dinero en un certificado de depósito (CD) para la educación de su hijo y quiere tener \$120,000 en 10 años. ¿Cuánto debe invertir si el CD paga intereses a una tasa anual de 9% compuesta trimestralmente? ¿Y continuamente?

Solución Supongamos que inicialmente invierte P. Una tasa anual de 9% compuesta trimestralmente tiene un rendimiento anual efectivo dado por $(1 + 0.09/4)^4 = 1.0930833$, o sea 9.30833%. Entonces, después de 10 años tendrá

$$P(1.0930833)^{10} = 120{,}000.$$

Por tanto, debe invertir

$$P = \frac{120{,}000}{(1.0930833)^{10}} = \frac{120{,}000}{2.4351885} = 49{,}277.50$$

Por otra parte, si el CD paga el 9% compuesto continuamente, después de 10 años usted tendrá

$$Pe^{(0.09)10} = 120{,}000.$$

De modo que necesitaría invertir

$$P = \frac{120{,}000}{e^{(0.09)10}} = \frac{120{,}000}{2.4596031} = 48{,}788.36$$

Observe que para alcanzar el mismo resultado, la composición continua requiere una inversión inicial más pequeña que la composición trimestral. Esto es de esperarse porque el rendimiento anual efectivo es más alto para la composición continua que para la trimestral.

Problemas sobre interés compuesto y el número e

1. Un almacén de departamentos tiene su tarjeta de crédito propia, con una tasa de interés de 2% mensual. Explique por qué esto no es lo mismo que una tasa anual de 24%. ¿Cuál es la tasa anual efectiva?

2. Se hace un depósito de \$10,000 en una cuenta que paga una tasa de interés nominal anual de 8%. Determine la cantidad que habrá en la cuenta después de 10 años si los intereses se componen:

(a) Anualmente. **(b)** Mensualmente. **(c)** Semanalmente.
(d) Diariamente. **(e)** Continuamente.

3. Se hace un depósito de \$50,000 en una cuenta que paga una tasa de interés nominal anual de 6%. Determine la cantidad que hay en la cuenta después de 20 años si los intereses se componen:

(a) Anualmente. **(b)** Mensualmente. **(c)** Semanalmente.
(d) Diariamente. **(e)** Continuamente.

4. Use una gráfica de $y = (1 + 0.07/x)^x$ para calcular el número al que $(1 + 0.07/x)^x$ se aproxima a medida que $x \to \infty$. Confirme que el valor obtenido sea $e^{0.07}$.

5. Encuentre el rendimiento anual efectivo de una tasa anual de 6% compuesta continuamente.

6. ¿Qué tasa de interés anual nominal tiene un rendimiento anual efectivo de 5% bajo composición continua?

7. ¿Cuál es el rendimiento anual efectivo, bajo composición continua, para una tasa de interés anual nominal de 8 por ciento?

8. **(a)** Encuentre el rendimiento anual efectivo para una tasa de interés anual de 5% compuesto n veces/año si

(i) $n = 1{,}000$ **(ii)** $n = 10{,}000$
(iii) $n = 100{,}000$

(b) Observe la secuencia de respuestas del inciso (a) y pronostique el rendimiento anual efectivo para una tasa anual de 5% compuesta continuamente.

(c) Calcule $e^{0.05}$. ¿Cómo confirma esto su respuesta al inciso (b)?

9. **(a)** Encuentre $(1 + 0.04/n)^n$ para $n = 10{,}000$, $100{,}000$ y $1{,}000{,}000$. Utilice los resultados para pronosticar el rendimiento anual efectivo de una tasa anual de 4% compuesta continuamente.

(b) Confirme su respuesta al calcular $e^{0.04}$.

10. Una cuenta bancaria está ganando 6% de interés al año compuesto continuamente.

(a) ¿En qué porcentaje habrá aumentado el saldo de la cuenta en un año? (Éste es el rendimiento anual efectivo.)

(b) ¿Cuánto tarda en duplicarse el saldo?

(c) Si se supone ahora que la tasa de interés es r, encuentre una fórmula que dé el tiempo de duplicación en términos de la tasa de interés.

11. Explique cómo podemos acoplar las tasas de interés de la (a) a la (e) con los rendimientos anuales del I al V, sin hacer ningún cálculo.

(a) 5.5% de tasa anual compuesto continuamente

(b) 5.5% de tasa anual compuesto trimestralmente

(c) 5.5% de tasa anual compuesto semanalmente

(d) 5% de tasa anual compuesto anualmente

(e) 5% de tasa anual compuesto dos veces al año

I. 5% **II.** 5.06% **III.** 5.61%

IV. 5.651% **V.** 5.654%

Con frecuencia, los países con tasas muy altas de inflación publican mensualmente, y no anual, sus tasas de inflación porque las tasas mensuales son menos alarmantes. En los problemas 12 y 13 aparecen estas altas tasas de interés, que reciben el nombre de *hiperinflación*.

12. En 1989 la inflación en Estados Unidos fue de 4.6% al año. En 1989 en Argentina la tasa de inflación fue de 33% en un mes.

(a) ¿Cuál es el equivalente anual de la tasa mensual de 33% de Argentina?

(b) ¿Cuál es el equivalente mensual de la tasa anual de 4.6% de Estados Unidos?

13. Entre diciembre de 1988 y diciembre de 1989, la tasa de inflación de Brasil fue de 1,290% al año. (Esto significa que entre 1988 y 1989 los precios aumentaron en un factor de $1 + 12.90 = 13.90$.)

(a) ¿Cuánto costaría en 1989 un artículo cuyo costo era de 1,000 cruzeiros (la moneda actual de Brasil) en 1989?

(b) ¿Cuál fue la tasa de inflación mensual de Brasil durante este periodo?

ENFOQUE TEÓRICO

LÍMITES AL INFINITO Y COMPORTAMIENTO FINAL

Comparación de funciones de potencias

A medida que x aumenta, ¿cómo comparar diferentes funciones de potencias? Para potencias positivas, la figura 1.125 muestra que entre más alta sea la potencia de x, la función aumentará más rápidamente. Para valores grandes de x (de hecho, para todas las $x > 1$), $y = x^5$ está por arriba de $y = x^4$, que está por arriba de $y = x^3$, y así sucesivamente. No sólo las potencias más altas son mayores, sino que son *mucho* mayores. Esto se debe a que si $x = 100$, por ejemplo, 100^5 es 100 veces mayor que 100^4, el cual es 100 veces mayor que 100^3. A medida que x va aumentando (denotado como $x \to \infty$), cualquier potencia positiva de x elimina por completo a todas las potencias menores de x. Se dice que, a medida que $x \to \infty$, las potencias mayores de x *dominan* a las potencias menores.

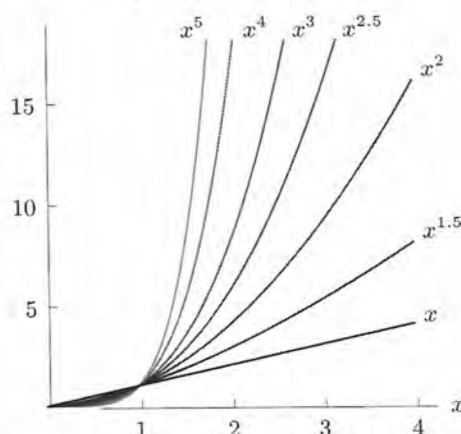


Figura 1.125. Potencias de x: ¿cuál es la potencia mayor para los valores grandes de x?

Límites al infinito

Cuando se consideran los valores de una función $f(x)$ a medida que $x \to \infty$, se desea encontrar el *límite* cuando $x \to \infty$. Esto se abrevia:

$$\lim_{x \to \infty} f(x).$$

La notación $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ significa que los valores de la función se aproximan a L a medida que los valores de x aumentan cada vez más. Tenemos que $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$. Al comportamiento de una función cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to \infty$ se le denomina *comportamiento final* de la función.

Ejemplo 9 Encuentre $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x)$ en cada caso.

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $f(x) = -x^3$ **(c)** $f(x) = e^x$

Solución **(a)** A medida que x va aumentando sin límite, la función x^2 aumenta cada vez más sin restricción alguna, entonces cuando $x \to \infty$, tenemos que $x \to \infty$. Por tanto,

$$\lim_{x \to \infty} (x^2) = \infty.$$

El cuadrado de un número negativo es positivo, de manera que cuando $x \to -\infty$, se tiene que $x^2 \to +\infty$. Por tanto,

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2) = \infty.$$

Para ver esto gráficamente, observe la figura 1.126. Cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, los valores de la función se hacen cada vez más grandes y los extremos de las gráficas suben.

(b) La gráfica de $f(x) = -x^3$ se muestra en la figura 1.127. A medida que $x \to \infty$, los valores de la función se hacen cada vez más negativos, y cuando $x \to -\infty$, los valores de la función son positivos y son cada vez más grandes. Se tiene que

$$\lim_{x \to \infty} (-x^3) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = \infty.$$

(c) La gráfica de $f(x) = e^x$ se muestra en la figura 1.128. Cuando $x \to \infty$, los valores de la función se hacen grandes sin límite superior, y cuando $x \to -\infty$, los valores de la función se acercan cada vez más a cero. Se tiene

$$\lim_{x \to \infty} (e^x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} (e^x) = 0.$$

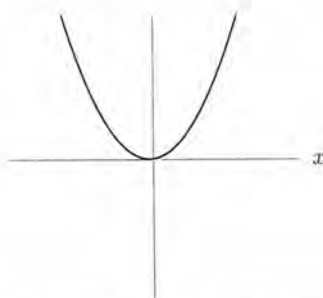


Figura 1.126. Comportamiento final de $f(x) = x^2$

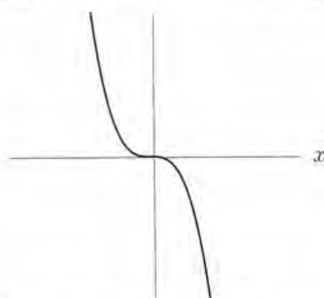


Figura 1.127. Comportamiento final de $f(x) = -x^3$

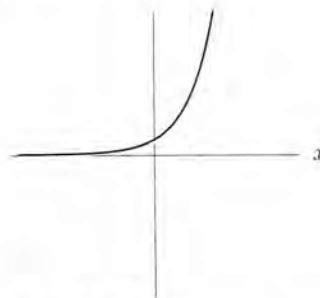


Figura 1.128. Comportamiento final de $f(x) = e^x$

Funciones exponenciales y funciones de potencia: ¿cuál domina?

¿Cómo se comparan las funciones de potencia con las funciones exponenciales de crecimiento, a medida que x aumenta? En el lenguaje cotidiano, la palabra exponencial se usa a veces para dar a entender un crecimiento muy rápido. Pero, ¿las funciones exponenciales siempre crecen más rápido que las funciones de potencia? Para determinar lo que ocurre a "largo plazo", frecuentemente buscamos conocer cuáles funciones dominan a medida que $x \to \infty$. Comparamos entonces las funciones de la forma $y = a^x$ para $a > 1$ y $y = x^n$ para $n > 0$.

Primero, consideremos $y = 2^x$ y $y = x^3$. Una vista en acercamiento a la figura 1.129(a) muestra que entre $x = 2$ y $x = 4$, la gráfica de $y = 2^x$ está debajo de la gráfica de $y = x^3$. Pero la figura 1.129(b) muestra que la función exponencial $y = 2^x$ finalmente supera a $y = x^3$. Una vista en alejamiento de la figura 1.129(c) muestra que, para las x grandes, el valor de x^3 es insignificante en comparación con 2^x. De hecho, 2^x está creciendo mucho más rápido que x^3, tanto que la gráfica de 2^x aparece casi vertical en comparación con el crecimiento más lento de x^3.

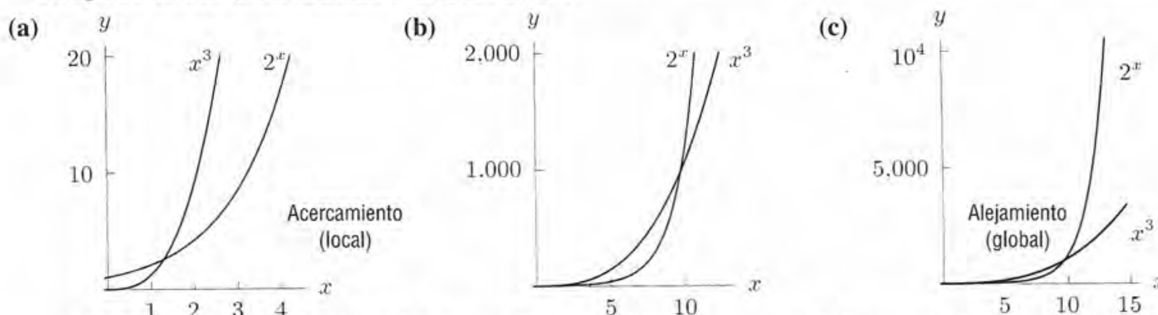


Figura 1.129. Vistas local y global de $y = 2^x$ y $y = x^3$. Observe que $y = 2^x$ finalmente domina a $y = x^3$.

De hecho, *cada* función de crecimiento exponencial finalmente domina a *cada* función de potencia. Aunque una función exponencial puede estar por debajo de una función de potencia para ciertos valores de x, si examinamos valores de x lo bastante grandes veremos que a^x finalmente domina a x^n, sin importar cuál sea n (con tal que $a > 1$).

¿Qué hay de la función logarítmica? Se sabe que las funciones exponenciales crecen muy rápido y las funciones logarítmicas muy lentamente. Véase la figura 1.130. De hecho, las funciones logarítmicas crecen con tanta lentitud que cada función de potencia x^n finalmente domina a $\ln x$ (con tal de que n sea positivo).

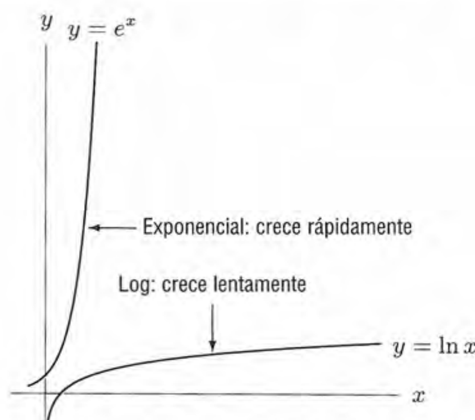


Figura 1.130. Crecimiento exponencial y logarítmico.

Comportamiento final de los polinomios

En la sección 1.9 vimos que si un polinomio es observado en una ventana lo suficientemente grande tiene más o menos la misma forma que la función de potencia dada por el término principal. Siempre y cuando $a_n \neq 0$, tenemos

$$\lim_{x\to\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\infty}(a_n x^n).$$

Un resultado similar se obtiene si $x \to -\infty$. El comportamiento final de un polinomio es el mismo que el comportamiento final de su término principal.

Ejemplo 10 Encuentre $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$ en cada caso.

(a) $f(x) = 5x^3 - 20x^2 + 15x - 100$

(b) $f(x) = 25 + 10x - 15x^2 - 3x^4$.

Solución **(a)** Tenemos

$$\lim_{x\to\infty}(5x^3 - 20x^2 + 15x - 100) = \lim_{x\to\infty}(5x^3) = \infty.$$

De igual manera,

$$\lim_{x\to-\infty}(5x^3 - 20x^2 + 15x - 100) = \lim_{x\to-\infty}(5x^3) = -\infty.$$

(b) Obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}(25 + 10x - 15x^2 - 3x^4) = \lim_{x\to\infty}(-3x^4) = -\infty.$$

De manera semejante,

$$\lim_{x\to-\infty}(25 + 10x - 15x^2 - 3x^4) = \lim_{x\to-\infty}(-3x^4) = -\infty.$$

Problemas sobre límites al infinito y comportamiento final

1. Cuando $x \to \infty$, ¿cuál de las tres funciones $y = 1{,}000x^2$, $y = 20x^3$, $y = 0.1x^4$ toma los valores más altos? ¿Cuál toma los valores más bajos? Dibuje una imagen global de estas tres funciones (para $x \geq 0$) en un mismo sistema de coordenadas.

2. Cuando $x \to \infty$, ¿cuál de las dos funciones $y = 5{,}000x^3$ y $y = 0.2x^4$ domina? Las dos gráficas pasan por el origen. ¿Hay algún otro punto de intersección? Si es así, determine sus abscisas x.

3. Trace las gráficas de $y = x^{1/2}$ y $y = x^{2/3}$ para $x \geq 0$ en un mismo sistema de coordenadas. ¿Qué función toma valores mayores para $x \to \infty$?

4. A mano, trace la gráfica de $f(x) = x^3$ y $g(x) = 20x^2$ en un mismo sistema de coordenadas. ¿Qué función toma valores más altos para $x \to \infty$?

5. A mano, trace la gráfica de $f(x) = x^5$, $g(x) = -x^3$, y $h(x) = 5x^2$ en un mismo sistema de coordenadas. ¿Cuál toma los valores positivos más altos cuando $x \to \infty$? ¿Cuando $x \to -\infty$?

En los problemas 6 y 7, dibuje las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en dos ventanas. Describa qué ve.

(a) Ventana $-7 \leq x \leq 7$ y $-15 \leq y \leq 15$

(b) Ventana $-50 \leq x \leq 50$ y $-10{,}000 \leq y \leq 10{,}000$

6. $f(x) = 0.2x^3 - 5x + 3$ y $g(x) = 0.2x^3$

7. $f(x) = 3 - 5x + 5x^2 + x^3 - x^4$ y $g(x) = -x^4$

En los problemas del 8 al 10, trace una posible gráfica para $f(x)$.

8. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

9. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

10. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

11. Una función continua tiene $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

(a) Explique verbalmente qué significa este límite.

(b) Para cada inciso, del (i) al (iv), trace la gráfica de una función $f(x)$ con este límite, y que sea

(i) Creciente. **(ii)** Decreciente.
(iii) Cóncava hacia arriba. **(iv)** Oscilante.

12. Una función continua tiene $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 3$.

(a) Explique verbalmente qué significa este límite.

(b) En cada inciso, del (i) al (iv), realice la gráfica de una función $f(x)$ con este límite y que sea

(i) Creciente. **(ii)** Decreciente.
(iii) Cóncava hacia arriba. **(iv)** Oscilante.

13. Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$. Explique su razonamiento.

14. Si $f(x) = -x^2$, ¿a qué es igual $\lim_{x\to\infty} f(x)$? ¿A qué es igual $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?

En los problemas del 15 al 18 encuentre $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

15. $f(x) = -10x^4$ **16.** $f(x) = 2^x$

17. $f(x) = 8(1 - e^{-x})$

18. $f(x) = 4x^5 - 25x^3 - 60x^2 + 1{,}000x + 5{,}000$

¿Qué función en los problemas 19 al 24 toma valores más grandes cuando $x \to \infty$?

19. $3x^5$ o $58x^4$ **20.** $12x^6$ o $(1.06)^x$

21. $x^{1/2}$ o $\ln x$

22. $x^3 + 2x^2 + 25x + 100$ o $10 - 6x^2 + x^4$

23. $5x^3 + 20x^2 + 150x + 200$ o $0.5x^4$

24. $5x^3 + 20x^2 + 150x + 200$ o $e^{0.2x}$

25. Relacione $y = 70x^2$, $y = 5x^3$, $y = x^4$ y $y = 0.2x^5$ con sus gráficas en la figura 1.131.

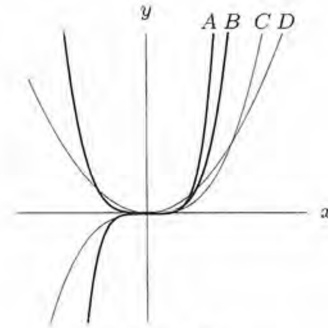


Figura 1.131.

26. Relacione $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = x^2$, y $y = x^{1/2}$ con sus gráficas en la figura 1.132.

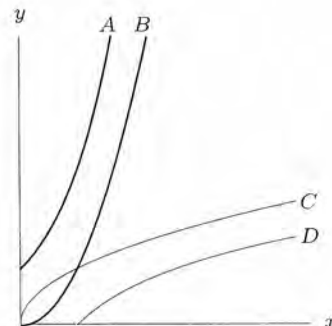


Figura 1.132.

27. Las gráficas globales de $y = x^5$, $y = 100x^2$ y $y = 3^x$ están en la figura 1.133. ¿Qué función corresponde a cada curva?

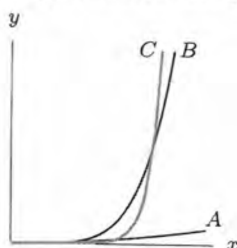


Figura 1.133.

28. Use una calculadora graficadora o una computadora para graficar $y = x^4$ y $y = 3^x$. Determine los dominios y los rangos aproximados que tiene cada una de las gráficas de la figura 1.134.

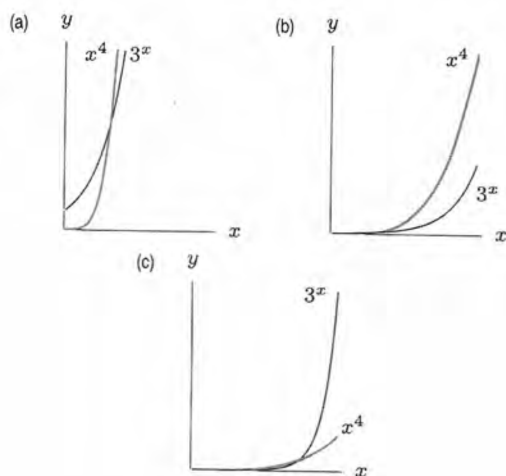


Figura 1.134.

29. Trace la gráfica de $f(x) = e^{-x^2}$ usando una ventana que incluya tanto los valores positivos como los negativos de x.

(a) ¿Para qué valores de x es creciente f? ¿Para qué valores es decreciente?

(b) ¿La gráfica de f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo cerca de $x = 0$?

(c) Cuando $x \to \infty$, ¿qué pasa con el valor de $f(x)$? Cuando $x \to -\infty$, ¿qué le sucede a $f(x)$?

30. Dibuje la gráfica de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ usando una ventana que incluya tanto los valores positivos como los negativos de x.

(a) ¿Para qué valores de x es creciente f? ¿Para qué valores es decreciente?

(b) ¿f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo cerca de $x = 0$?

(c) Cuando $x \to \infty$, ¿qué pasa con el valor de $f(x)$? Cuando $x \to -\infty$, ¿qué le sucede a $f(x)$?

Capítulo 2

RAZÓN DE CAMBIO: LA DERIVADA

En el capítulo 1 abordamos la razón promedio de cambio como una función en un intervalo. En este capítulo, analizaremos la razón de cambio *instantánea* de una función en un punto dado. El concepto de razón de cambio en un instante determinado nos conducirá al concepto de la *derivada*.

La derivada se puede interpretar en forma geométrica como la pendiente de una curva, y físicamente, como la razón de cambio. Las derivadas se pueden utilizar para representar todo, desde fluctuaciones en las tasas de interés hasta la tasa de mortalidad de los peces, o la rapidez de crecimiento de un tumor.

2.1 RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA

En el capítulo 1 se abordó la razón promedio de cambio como una función en todo un intervalo. En esta sección, consideraremos la razón de cambio como una función en un punto determinado. En el capítulo 1 vimos que cuando un objeto se mueve a lo largo de una recta, la razón promedio de cambio de posición respecto al tiempo es la velocidad promedio. Si la posición se expresa como $y = f(t)$, donde t es el tiempo, entonces

$$\text{Razón promedio de cambio de la posición entre } t = a \text{ y } t = b = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si usted conduce un vehículo 200 millas durante 4 horas, su velocidad promedio es $200/4 = 50$ millas por hora. Claro que esto no significa que viaja exactamente a 50 millas por hora durante todo el recorrido. La velocidad a la que va en determinado instante del recorrido puede verse en el velocímetro y ésta es la cifra que investigaremos ahora.

Velocidad instantánea

Lanzamos una toronja al aire en línea recta hacia arriba. La tabla 2.1 indica su altura, y, en el tiempo, t. ¿Cuál es la velocidad de la toronja exactamente en $t = 1$? Para calcular esta cifra utilizamos las velocidades promedio.

Tabla 2.1 *Altura de la toronja sobre el suelo*

t (segundos)	0	1	2	3	4	5	6
$y = s(t)$ (pies)	6	90	142	162	150	106	30

La velocidad promedio en el intervalo $0 \le t \le 1$ es de 84 pies/segundo, y la velocidad promedio en el intervalo $1 \le t \le 2$ es de 52 pies/segundo. Observe que antes de $t = 1$ la velocidad promedio es mayor que la velocidad promedio que se tiene después de $t = 1$, porque la velocidad a la que se mueve la toronja está disminuyendo. Es de esperar que la velocidad en $t = 1$ esté entre las dos velocidades promedio. ¿Cómo podemos encontrar la velocidad *exactamente* en $t = 1$? Analicemos con más detalle qué pasa alrededor de $t = 1$. Suponga que encontramos las velocidades promedio en ambos lados de $t = 1$, en intervalos cada vez más cortos, como se muestra en la figura 2.1. Entonces, por ejemplo,

$$\text{Velocidad promedio entre } t = 1 \text{ y } t = 1.01 = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{s(1.01) - s(1)}{1.01 - 1} = \frac{90.678 - 90}{0.01} = 67.8 \text{ pies/segundo}.$$

Es natural suponer que la velocidad en $t = 1$ está entre las velocidades promedio de ambos lados de $t = 1$. En la figura 2.1 los valores de la velocidad promedio antes de $t = 1$, y la velocidad promedio después de $t = 1$, se aproximan cada vez más a medida que el tamaño del intervalo se reduce. En los intervalos más cortos de la figura 2.1, ambas velocidades son de 68.0 pies/segundo (redondeado a un decimal) por tanto, la velocidad en $t = 1$ es de 68.0 pies/segundo (redondeado a un decimal).

t	0	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	2
$y = s(t)$	6.000	83.040	89.318	89.932	90.000	90.068	90.678	96.640	142.000

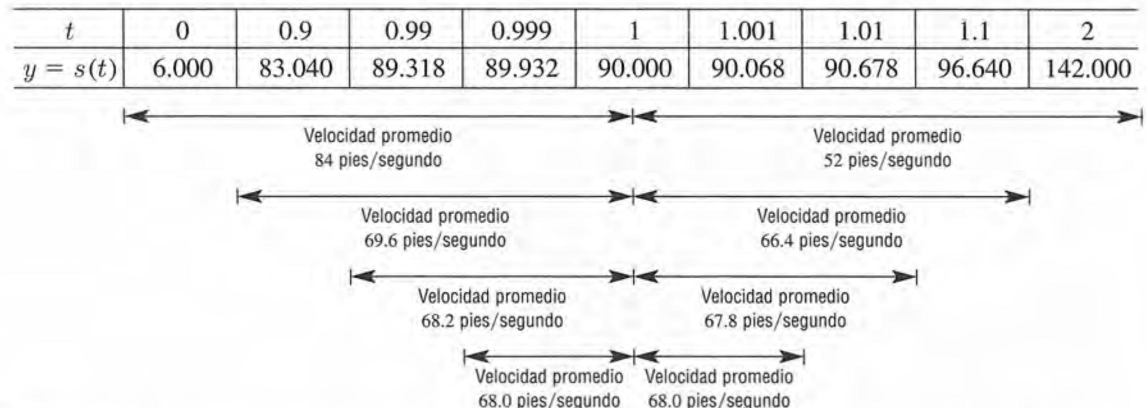


Figura 2.1. Velocidades promedio en intervalos a cada lado de $t = 1$, al mostrar intervalos sucesivamente más pequeños.

Obviamente, si mostráramos más posiciones decimales las velocidades promedio antes y después de $t = 1$ ya no concordarían. Para calcular la velocidad en $t = 1$ con una precisión de más decimales, tendríamos que tomar intervalos más pequeños a cada lado de $t = 1$, hasta que las velocidades promedio concordaran hasta el número de posiciones decimales que deseamos tener. De esta forma, podemos determinar la velocidad en $t = 1$ con cierto grado de precisión.

Definición de velocidad instantánea mediante el concepto de límite

Cuando tomamos intervalos cada vez más pequeños alrededor de $t = 1$, resulta que las velocidades promedio, en el ejemplo de la toronja, siempre son por muy poco mayores o menores a 68 pies/segundo. Entonces, parece natural afirmar que la velocidad en el instante $t = 1$ es de 68 pies/segundo. A esto se le llama *velocidad instantánea* en cierto punto. Esta definición depende de nuestro convencimiento de que intervalos cada vez más pequeños resultan en velocidades promedio que arbitrariamente se acercan a 68. Este proceso se conoce como *tomar el límite*.

La **velocidad instantánea** de un objeto en el tiempo t se puede definir como el límite de la velocidad promedio del objeto sobre intervalos de tiempo cada vez más cortos que contienen a t.

Observe que la velocidad instantánea parece ser exactamente 68, pero, ¿qué pasaría si ésta fuera 68.000001? ¿Cómo podemos estar seguros de que hemos tomado intervalos lo suficientemente pequeños? Para demostrar que el límite es exactamente igual a 68 se necesita un conocimiento más preciso sobre cómo fueron calculadas las velocidades, así como del proceso que involucra el límite; véase la sección Enfoque teórico, de la página 129.

Razón de cambio instantánea

Podemos definir la *razón de cambio instantánea* de cualquier función $y = f(t)$ en un punto $t = a$. Para esto, realizamos lo que hicimos para la velocidad y vemos la razón promedio de cambio sobre intervalos cada vez más pequeños.

La **razón de cambio instantánea** de f en a, también llamada **razón de cambio** de f en a, se define como el límite de las razones de cambio de f en intervalos cada vez más cortos alrededor de a.

Puesto que la razón promedio de cambio es un cociente de diferencias de la forma $\Delta y/\Delta t$, la razón de cambio instantánea es el límite del cociente de diferencias. A menudo, en la práctica se aproxima una razón de cambio a través de uno de estos cocientes de diferencia.

Ejemplo 1 La cantidad (en mg) de un medicamento en la sangre en el tiempo t (en minutos) está dada por $Q = 25(0.8)^t$. Determine la razón de cambio de la cantidad en $t = 3$ y explique su respuesta.

Solución Estimamos la razón de cambio en $t = 3$ al calcular la razón promedio de cambio en intervalos alrededor de $t = 3$. La aproximación tendrá un mayor grado de exactitud si elegimos intervalos lo suficientemente cortos. La razón promedio de cambio en el intervalo $3 \leq t \leq 3.01$ es:

$$\text{Razón promedio de cambio} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{25(0.8)^{3.01} - 25(0.8)^3}{3.01 - 3.00} = \frac{12.7715 - 12.80}{3.01 - 3.00} = -2.85.$$

Una evaluación razonable para la razón de cambio de la cantidad en $t = 3$ es -2.85. Puesto que Q se mide en mg y t en minutos, las unidades de $\Delta Q/\Delta t$ son mg/minuto. Debido a que la razón de cambio es negativa, la cantidad de medicamento está disminuyendo. Después de tres minutos la cantidad de medicamento en el cuerpo disminuye a razón de unos 2.85 mg/minuto.

En el ejemplo 1 evaluamos la razón de cambio utilizando un intervalo a la derecha del punto ($t = 3$ a $t = 3.01$). Podemos usar un intervalo a la izquierda de este punto, o promediar las razones de cambio de la derecha y la izquierda. Por lo general, en este libro utilizamos un intervalo a la derecha del punto.

Derivada en un punto

La razón de cambio instantánea de una función f en un punto a es tan importante que recibe su propio nombre: la *derivada de f en a*, la cual se denota por $f'(a)$ (se lee como "f prima de a"). Si queremos destacar que $f'(a)$ es la razón de cambio de $f(x)$ a medida que aumenta la variable x, denominamos a $f'(a)$ la derivada de f *con respecto a x* en $x = a$. Observe que la derivada es sólo un nombre nuevo para definir la razón de cambio de una función.

> La **derivada de f en a**, que se escribe $f'(a)$, se define como la razón de cambio instantánea de f en el punto a.

En la sección Enfoque teórico, página 129, se presenta una definición de la derivada que utiliza una fórmula.

Ejemplo 2 Estime $f'(2)$ si $f(x) = x^3$.

Solución Como $f'(2)$ es la derivada, o la razón de cambio, de $f(x) = x^3$ en 2, tomamos la razón promedio de cambio de los intervalos cercanos a 2. Usando el intervalo $2 \le x \le 2.001$ vemos que

$$\begin{array}{c}\text{Razón promedio de cambio}\\ \text{en } 2 \le x \le 2.001\end{array} = \frac{(2.001)^3 - 2^3}{2.001 - 2} = \frac{8.012 - 8}{0.001} = 12.0.$$

La razón de cambio de $f(x)$ en $x = 2$ parece ser aproximadamente de 12, por lo que concluimos $f'(2) = 12$.

Visualización de la derivada: pendiente de la curva y pendiente de la recta tangente

La figura 2.2 muestra la razón promedio de cambio de una función representada por la pendiente de la secante que une los puntos A y B. La derivada se determina tomando la razón promedio de cambio en intervalos cada vez más cortos. En la figura 2.3, conforme el punto B se aproxima al punto A, la recta secante se convierte en la recta tangente en el punto A. Por consiguiente, la derivada se representa por la pendiente de tangente a la curva (o gráfica) en el punto.

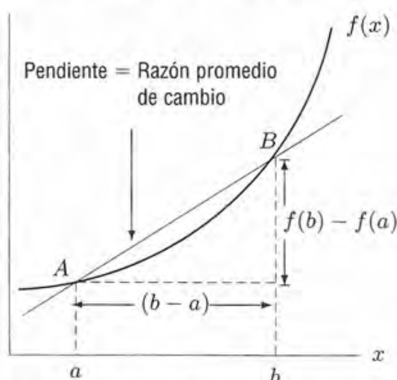


Figura 2.2. Visualización de la razón promedio de cambio de f entre a y b.

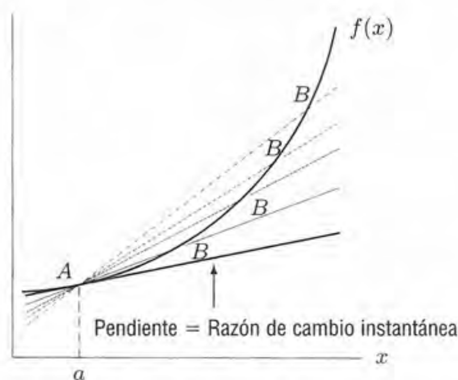


Figura 2.3. Visualización de la razón de cambio instantánea de f en a.

Por otra parte, observe la gráfica de una función alrededor de cierto punto y realice un "acercamiento" para obtener una perspectiva con mayor detalle (véase la figura 2.4). Entre más se acerque uno, más parecerá que la curva es una recta. A la pendiente de esta recta se le llama *pendiente de la curva* en el punto, que también representa a la derivada.

> La derivada de una función en el punto A es igual a
>
> - La pendiente de la curva que representa a la función en A.
> - La pendiente de la recta tangente a la curva en A.

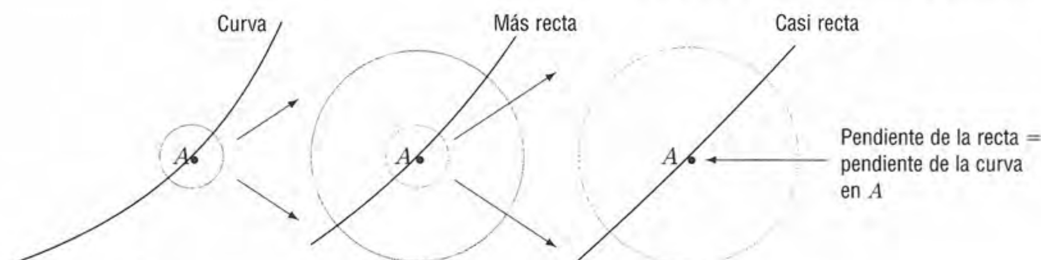


Figura 2.4. Determinación de la pendiente de una curva en un punto, haciendo un acercamiento.

Con frecuencia, la interpretación de pendiente es útil para obtener información general acerca de la derivada, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3 Utilice una gráfica de $f(x) = x^2$ para determinar si cada una de las siguientes cantidades es positiva, negativa, o cero: **(a)** $f'(1)$ **(b)** $f'(-1)$ **(c)** $f'(2)$ **(d)** $f'(0)$

Solución La figura 2.5 muestra segmentos de la recta tangente a la curva de $f(x) = x^2$ en los puntos $x = 1, x = -1, x = 2, x = 0$. Puesto que la derivada es igual a la pendiente de la recta tangente en el punto, tenemos que:

(a) $f'(1)$ es positiva
(b) $f'(-1)$ es negativa
(c) $f'(2)$ es positiva [y mayor que $f'(1)$]
(d) $f'(0) = 0$ porque la gráfica tiene una tangente horizontal en $x = 0$.

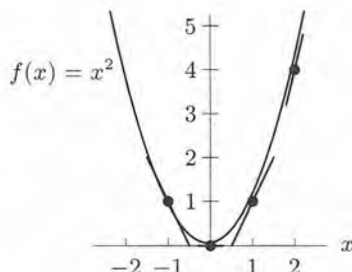


Figura 2.5. Rectas tangentes que muestran el signo de la derivada de $f(x) = x^2$.

Ejemplo 4 Calcule la derivada de $f(x) = 2^x$ en $x = 0$ tanto gráfica como numéricamente.

Solución Gráficamente: si trazamos una tangente en $x = 0$ a la curva exponencial de la figura 2.6, podemos observar que ésta tiene una pendiente positiva entre 0.5 y 1.

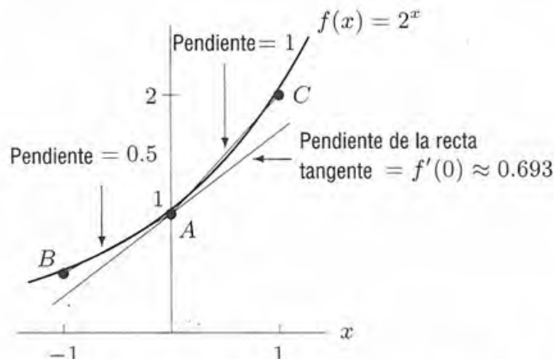


Figura 2.6. Gráfica de $f(x) = 2^x$ que muestra la derivada de $x = 0$.

Numéricamente: para hallar la derivada en $x = 0$, calculamos la razón promedio de cambio en un intervalo cercano a 0.

$$\begin{array}{c}\text{Razón promedio de cambio}\\ \text{en } 0 \le x \le 0.0001\end{array} = \frac{2^{0.0001} - 2^0}{0.0001 - 0} = \frac{1.000069317 - 1}{0.0001} = 0.69317.$$

Debido a que al utilizar intervalos más pequeños se obtienen más o menos los mismos valores, parece que la derivada es aproximadamente 0.69317, es decir, $f'(0) \approx 0.693$.

Ejemplo 5 La gráfica de una función $y = f(x)$ se muestra en la figura 2.7. Señale si cada una de las siguientes cantidades es positiva o negativa e ilustre sus respuestas gráficamente.

(a) $f'(1)$ **(b)** $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$ **(c)** $f(4) - f(2)$



Figura 2.7.

Solución **(a)** Puesto que $f'(1)$ es la pendiente de la gráfica en $x = 1$, vemos en la figura 2.8 que $f'(1)$ es positiva.

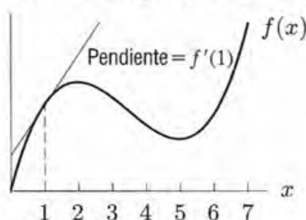


Figura 2.8.

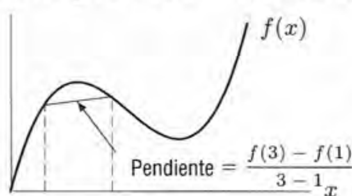


Figura 2.9.

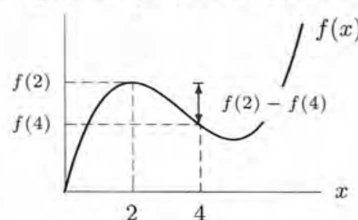


Figura 2.10.

(b) El cociente de diferencias $[f(3) - f(1)]/(3 - 1)$ es la pendiente de la recta secante entre $x = 1$ y $x = 3$. De la figura 2.9 vemos que esta pendiente es positiva.

(c) Puesto que $f(4)$ es el valor de la función en $x = 4$ y $f(2)$ es el valor de la función en $x = 2$, la expresión $f(4) - f(2)$ es el cambio en la función entre $x = 2$ y $x = 4$. Debido a que $f(4)$ es menor que $f(2)$ este cambio es negativo (véase la figura 2.10).

Cálculo de la derivada de una función dada numéricamente

Si tenemos una tabla de valores de una función, podemos calcular los valores de su derivada. Para esto, debemos suponer que los puntos en la tabla son lo suficientemente próximos entre sí como para que la función no cambie de manera desordenada entre ellos.

Ejemplo 6 La cantidad de tierra de cosecha por persona está disminuyendo en el mundo[1] (véase la tabla 2.2).

Tabla 2.2 *Cantidad de tierra de cosecha por persona*

Año	1800	1900	1950	1970
Tierra para cosechar (acres/persona)	3.51	2.03	1.24	0.84

(a) ¿Cuál fue la razón promedio de cambio de la tierra de labranza por persona entre 1800 y 1970?

(b) Calcule $f'(1950)$ y dé su respuesta en términos de tierra de labranza.

[1]Schaefer, Lawrence, *An Introduction to Population, Environment, Society*, CT: E-P Education Services, Hamden, 1972, p. 30.

Solución (a) Entre 1800 y 1970.

$$\text{Razón promedio de cambio} = \frac{0.84 - 3.51}{1970 - 1800} = \frac{-2.67}{170} = -0.0157 \text{ acres por persona al año.}$$

Entre 1800 y 1970, la cantidad de tierra de cultivo o labranza por persona estaba disminuyendo a una tasa promedio de 0.0157 acres por persona al año.

(b) Usamos el intervalo de 1950 a 1970 para calcular la razón de cambio instantánea en 1950.

$$f'(1950) = \begin{matrix}\text{Razón de cambio}\\ \text{en 1950}\end{matrix} \approx \frac{0.84 - 1.24}{1970 - 1950} = \frac{-0.4}{20} = -0.02 \text{ acres por persona al año.}$$

En 1950 la cantidad de tierra de labranza por persona disminuía a razón de aproximadamente 0.02 acres por persona al año.

Problemas para la sección 2.1

1. La distancia (en pies) recorrida por un objeto desde un punto está dada por $s(t) = t^2$, donde el tiempo t está en segundos.

(a) ¿Cuál es la velocidad promedio del objeto entre $t = 3$ y $t = 5$?

(b) Al utilizar intervalos cada vez menores cercanos a 3, evalúe la velocidad instantánea en el tiempo $t = 3$.

2. El tamaño, S, de un tumor (en milímetros cúbicos) está dado por $S = 2^t$, donde t es el número de meses a partir del momento en que el tumor fue descubierto. Indique las unidades junto con sus respuestas.

(a) ¿Cuál es el cambio total en el tamaño del tumor durante los primeros seis meses?

(b) ¿Cuál es la razón promedio de cambio en el tamaño del tumor durante los primeros seis meses?

(c) Evalúe la razón a la que el tumor está creciendo en $t = 6$. (Utilice intervalos cada vez más pequeños.)

3. Relacione los puntos señalados en la curva de la figura 2.11 con las pendientes dadas.

Pendiente	Punto
−3	
−1	
0	
1/2	
1	
2	

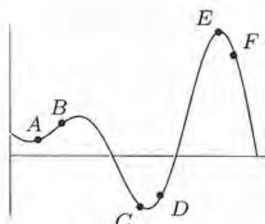


Figura 2.11.

4. Encuentre la velocidad promedio en el intervalo $0 \le t \le 0.8$ y calcule la velocidad en $t = 0.2$ de un automóvil cuya posición, s, está dada por la siguiente tabla.

t (segundos)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
s (pies)	0	0.5	1.8	3.8	6.5	9.6

5. La figura 2.12 muestra el costo, $y = f(x)$, de producir x kilogramos de un producto químico.

(a) ¿La razón promedio de cambio del costo es mayor entre $x = 0$ y $x = 3$, o entre $x = 3$ y $x = 5$? Explique gráficamente su respuesta.

(b) ¿La razón de cambio instantánea del costo de producir x kilogramos es mayor en $x = 1$ o en $x = 4$? Explique gráficamente su respuesta.

(c) ¿Cuáles son las unidades de estas razones de cambio?

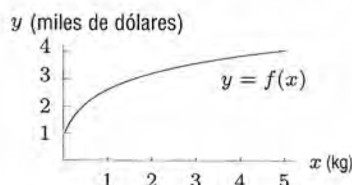


Figura 2.12.

6. Para la función que se muestra en la figura 2.13, ¿en cuáles de los puntos señalados es positiva la pendiente de la curva? ¿En cuáles es negativa? ¿En cuál de los puntos señalados la pendiente de la curva es máxima (es decir, la más positiva)? ¿La pendiente mínima (esto es, negativa y con la mayor magnitud)?

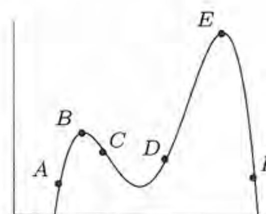


Figura 2.13.

7. Utilice la gráfica de la figura 2.7, en la página 98, para decidir si cada una de las siguientes cantidades es positiva, negativa, o se aproxima a cero. Ilustre sus respuestas gráficamente.

(a) La razón promedio de cambio de $f(x)$ entre $x = 3$ y $x = 7$.

(b) La razón de cambio instantánea de $f(x)$ en $x = 3$.

8. Sea $f(x) = 5^x$. Utilice un intervalo pequeño para calcular $f'(2)$. Ahora mejore su exactitud al estimar nuevamente a $f'(2)$ utilizando un intervalo aún más pequeño.

9. Calcule $f'(2)$ para $f(x) = 3^x$. Explique su razonamiento.

10. Calcule $P'(0)$ si $P(t) = 200(1.05)^t$. Explique cómo obtuvo la respuesta.

11. La siguiente tabla muestra el porcentaje de la población de Estados Unidos que vive en áreas urbanas como función del año.[2]

Años	1800	1830	1860	1890	1920	1950	1960	1970
Porcentaje	6	9	20	35	51	64	69.9	73.5

(a) Determine la razón promedio de cambio del porcentaje de la población que vivía en las áreas urbanas entre 1860 y 1960.

(b) Evalúe la razón a la que dicho porcentaje aumentaba en el año de 1960.

(c) Evalúe la razón de cambio de esta función durante el año 1830 y explique qué le indica esto.

(d) ¿Esta función es creciente o decreciente?

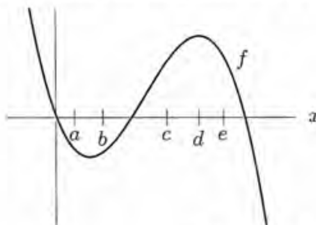
12. En un tiempo de t segundos una partícula recorre una distancia de s metros a partir de su punto de partida, donde $s = 3t^2$.

(a) Determine la velocidad promedio entre $t = 1$ y $t = 1 + h$ si:

(i) $h = 0.1$, (ii) $h = 0.01$, (iii) $h = 0.001$.

(b) Utilice las respuestas del inciso (a) para evaluar la velocidad instantánea de la partícula en el tiempo $t = 1$.

13. La figura 2.14 muestra la gráfica de f. Relacione las derivadas en la tabla con los puntos a, b, c, d y e.



x	$f'(x)$
	0
	0.5
	2
	−0.5
	−2

Figura 2.14.

14. (a) Utilice una gráfica de $f(x) = 2 - x^3$ para decidir si $f'(1)$ es positiva o negativa. Dé sus razones.

(b) Utilice un intervalo pequeño para evaluar $f'(1)$.

15. (a) Sea $g(t) = (0.8)^t$. Utilice una gráfica para determinar si $g'(2)$ es positiva, negativa, o cero.

(b) Utilice un intervalo pequeño para evaluar $g'(2)$.

16. La tabla 2.3 muestra $P = f(t)$, el porcentaje de hogares en Estados Unidos que tienen un horno de microondas t años después de 1978.[3]

(a) ¿Le parece que $f'(6)$ es positiva o negativa? ¿Qué le dice esto sobre el porcentaje de hogares con hornos de microondas?

(b) Estime $f'(2)$. Calcule $f'(9)$. Explique qué le indica a usted esto, en términos de hornos de microondas.

Tabla 2.3

t (años desde 1978)	0	2	4	6	9	12
P(% con hornos de microondas)	8	14	21	34	61	79

17. La figura 2.15 muestra $N = f(t)$, el número de granjas en Estados Unidos[4] entre 1930 y 1992 como una función del año, t.

(a) ¿ $f'(1950)$ es positiva o negativa? ¿Qué le dice esto sobre el número de granjas?

(b) ¿Cuál es más negativa: $f'(1960)$ o $f'(1980)$? Explique.



Figura 2.15.

18. Muestre cómo representar lo siguiente en la figura 2.16:

(a) $f(4)$ (b) $f(4) - f(2)$

(c) $\dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2}$ (d) $f'(3)$

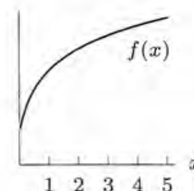


Figura 2.16.

19. Para cada uno de los siguientes pares de números, utilice la figura 2.16 para decidir cuál es mayor. Explique su respuesta.

(a) ¿ $f(3)$ o $f(4)$?

(b) ¿ $f(3) - f(2)$ o $f(2) - f(1)$?

(c) ¿ $\dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$ o $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$?

(d) ¿ $f'(1)$ o $f'(4)$?

20. La población del mundo alcanzaba mil millones de habitantes en 1804, dos mil millones en 1927, tres mil millones en 1960, cuatro mil millones en 1974, cinco mil millones en 1987 y seis mil millones en 1999. Determine la razón promedio de cambio de la población mundial, en personas por minuto, durante cada uno de estos intervalos. (Esto es, de 1804 a 1927, y de 1927 a 1960, etcétera.)

---

[2]Departamento de Comercio de Estados Unidos, Oficina de Censos, *Statistical Abstracts of the US*, 1985, p. 22.
[3]*The World Almanac*, Funk & Wagnalls, Nueva Jersey, 1994, p. 152.
[4]*Ibídem*, p. 122.

21. La función graficada en la figura 2.17 tiene $f(4) = 25$ y $f'(4) = 1.5$. Determine las coordenadas de los puntos A, B, C.

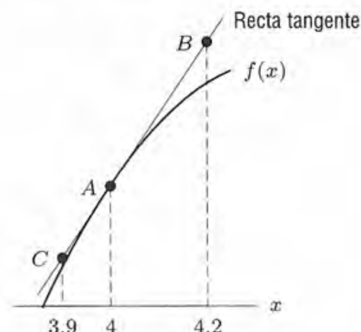


Figura 2.17.

22. Utilice la figura 2.18 para llenar los espacios en blanco de los siguientes enunciados acerca de la función g en el punto B.

(a) $g(__) = __$ **(b)** $g'(__) = __$

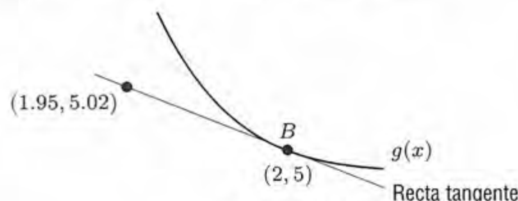


Figura 2.18.

23. La siguiente tabla muestra el número de horas que trabajan los obreros en una semana, $f(t)$, sus ganancias en dólares por hora, $g(t)$ y sus ganancias semanales en dólares, $h(t)$, como funciones de t, el año.[5]

(a) Indique si cada una de las siguientes derivadas es positiva o negativa: $f'(t)$, $g'(t)$, $h'(t)$. Interprete cada respuesta en términos de las horas o ganancias.

(b) Calcule cada una de las siguientes derivadas y explique sus respuestas:

(i) $f'(1965)$ y $f'(1985)$
(ii) $g'(1965)$ y $g'(1985)$
(iii) $h'(1965)$ y $h'(1985)$

t	1965	1970	1975	1980	1985	1990
$f(t)$	38.8	37.1	36.1	35.3	34.9	34.5
$g(t)$	2.46	3.23	4.53	6.66	8.57	10.01
$h(t)$	95.45	119.83	163.53	235.10	299.09	345.35

24. **(a)** Trace una gráfica de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 3$ en un mismo sistema de coordenadas. ¿Qué puede usted decir acerca de las pendientes de las tangentes de las dos gráficas en el punto $x = 0$?, ¿$x = 1$?, ¿$x = 2$?, ¿$x = a$, donde a es cualquier valor?

(b) Explique por qué al sumar una constante a cualquier función, el valor de la derivada en cualquier punto no cambiará.

25. Calcule la razón de cambio instantánea de la función $f(x) = x \ln x$ en $x = 1$ y en $x = 2$. ¿Qué indican estos valores sobre la concavidad de la curva de la función entre 1 y 2?

2.2 FUNCIÓN DERIVADA

En la sección 2.1 estudiamos la derivada de una función en un punto fijo. En general, la derivada toma distintos valores en diferentes puntos y es por sí misma una función. Recuerde que la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Búsqueda de la derivada de una función dada gráficamente

Ejemplo 1 Calcule la derivada de la función $f(x)$, cuya gráfica aparece en la figura 2.19, en $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

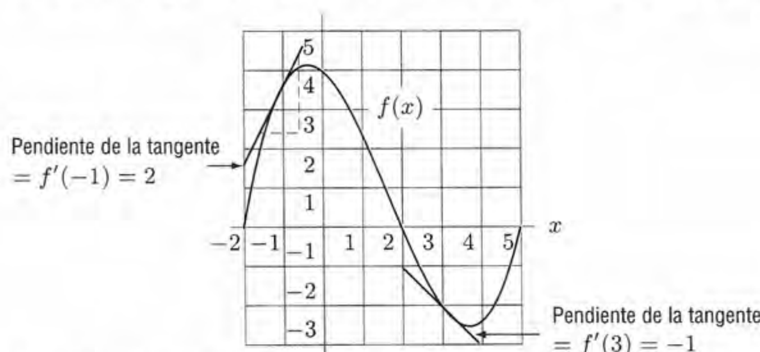


Figura 2.19. Estimación gráfica de la derivada como la pendiente de una tangente.

[5]Oficina de Estadísticas Laborales, Departamento del Trabajo de Estados Unidos, *The World Almanac*, Funk & Wagnalls, 1995, p. 150. Los obreros incluyen a trabajadores no administrativos que laboran en actividades de minería, producción, construcción, transporte, servicios públicos, comercio al mayoreo y al menudeo, seguros, bienes raíces y servicios.

Solución Con base en la gráfica, evaluamos la derivada en cualquier punto al colocar una recta que sea tangente en dicho punto, y después utilizamos la cuadrícula para evaluar la pendiente de la tangente. Por ejemplo, en la figura 2.19 se trazó la tangente en $x = -1$, que tiene una pendiente cercana a 2, por lo que $f'(-1) \approx 2$. Observe que la pendiente en $x = -2$ es positiva y bastante grande; la pendiente en $x = -1$ es positiva, pero más pequeña. En $x = 0$ la pendiente es negativa, en $x = 1$ se ha vuelto más negativa, y así sucesivamente. Algunas evaluaciones de las derivadas, redondeadas al entero más cercano, se muestran en la tabla 2.4. Compruebe usted mismo estos valores. ¿La derivada es positiva justo donde usted esperaba? ¿Es negativa?

Tabla 2.4 *Evaluaciones de la derivada de la función en la figura 2.19*

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Derivada en x	6	2	-1	-2	-2	-1	1	4

Es importante observar que para cada valor de x hay un valor correspondiente de la derivada. Por tanto, la derivada es una función de x.

> Para una función f, definimos la **función derivada**, f', como
>
> $$f'(x) = \text{Razón de cambio instantánea de } f \text{ en } x.$$

Ejemplo 2 Grafique los valores de la función derivada calculada en el ejemplo 1. Compare las gráficas de f' y f.

Solución Las figuras 2.20 y 2.21 muestran las gráficas de f y f', respectivamente. Observe que f' es positiva (su gráfica está arriba del eje x) donde f es creciente y f' es negativa (su gráfica está abajo del eje x) donde f es decreciente. El valor de $f'(x)$ es 0 donde f tiene un valor máximo o mínimo (en aproximadamente $x = -0.5$ y $x = 3.7$).

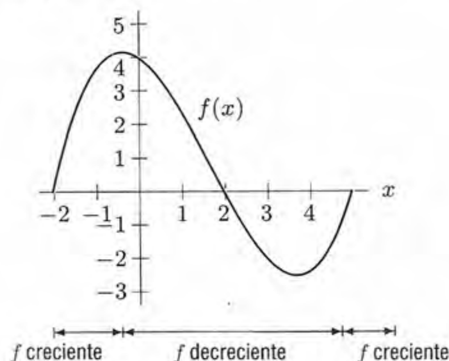


Figura 2.20. La función f.

→

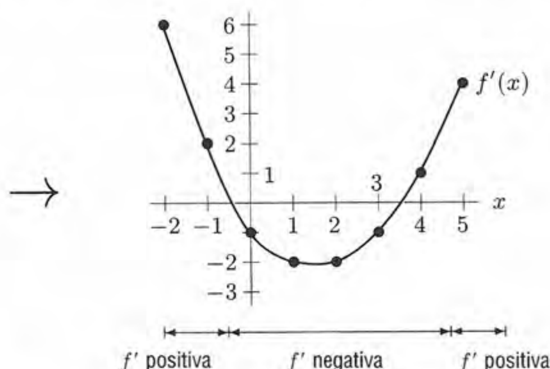


Figura 2.21. Estimaciones de la derivada, f'.

Ejemplo 3 La gráfica de f está en la figura 2.22. ¿Cuál de las gráficas (a)–(c) es una gráfica de la derivada, f'?

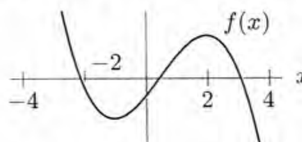
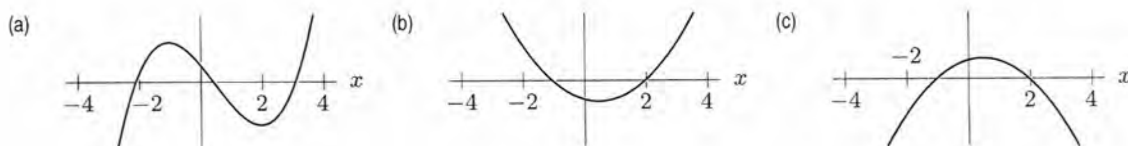


Figura 2.22.



Solución Como la gráfica de $f(x)$ es horizontal en $x = -1$ y $x = 2$, la derivada es cero en esos puntos. Por tanto, la gráfica de $f'(x)$ intercepta al eje x en $x = -1$ y $x = 2$.

La función f es decreciente en $x < -1$, creciente en $-1 < x < 2$, y decreciente en $x > 2$. La derivada es positiva (su gráfica está por arriba del eje x) donde f es creciente y la derivada es negativa (su gráfica está por abajo del eje x) donde f es decreciente. La gráfica correcta es (c).

¿Qué indica gráficamente la derivada?

Donde la derivada, f', de una función es positiva, la tangente a la curva de f es ascendente; donde f' es negativa, la tangente es descendente. Si $f' = 0$ en todos sus puntos, entonces la tangente es horizontal en todos los puntos y, por consiguiente, f es constante. El signo de la derivada f' indica si la función f es creciente o decreciente.

> Si $f' > 0$ en un intervalo, entonces f es *creciente* en ese intervalo.
> Si $f' < 0$ en un intervalo, entonces f es *decreciente* en ese intervalo.
> Si $f' = 0$ en un intervalo, entonces f es *constante* en ese intervalo.

La magnitud de la derivada indica la magnitud de la razón de cambio de f. Si f' tiene una magnitud grande, entonces la gráfica de f es de inclinación pronunciada (hacia arriba si f' es positiva y hacia abajo si f' es negativa); si f' es pequeña, la gráfica de f se inclina moderadamente.

Cálculo de la derivada de una función dada numéricamente

Si tenemos una tabla de valores de una función en lugar de una gráfica de la función, podemos calcular los valores de la derivada.

Ejemplo 4 La tabla 2.5 da los valores de $c(t)$, la concentración (mg/cc) de un medicamento en el torrente sanguíneo en un tiempo t (minutos). Construya una tabla de valores de $c'(t)$, la razón de cambio de $c(t)$ respecto a t.

Tabla 2.5 *Concentración de un medicamento como una función del tiempo*

t (minutos)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$c(t)$ (mg/cc)	0.84	0.89	0.94	0.98	1.00	1.00	0.97	0.90	0.79	0.63	0.41

Solución Para evaluar la derivada de c por medio de los valores en la tabla, supongamos que los puntos de los datos son lo suficientemente cercanos entre sí, de forma que la concentración no cambia abruptamente entre ellos. Con la tabla podemos ver que la concentración es creciente entre $t = 0$ y $t = 0.4$, por lo que se espera que la derivada sea positiva en ese intervalo. De $t = 0.5$ a $t = 1.0$ la concentración comienza a descender y la razón de decremento se hace más y más grande, de modo que sería razonable esperar que la derivada sea negativa y de magnitud cada vez mayor.

Calculamos la derivada para cada valor de t utilizando un cociente de diferencias. Por ejemplo,

$$c'(0) \approx \frac{c(0.1) - c(0)}{0.1 - 0} = \frac{0.89 - 0.84}{0.1} = 0.5 \text{ (mg/cc) por minuto.}$$

De forma similar, obtenemos las estimaciones

$$c'(0.1) \approx \frac{c(0.2) - c(0.1)}{0.2 - 0.1} = \frac{0.94 - 0.89}{0.1} = 0.5$$

$$c'(0.2) \approx \frac{c(0.3) - c(0.2)}{0.3 - 0.2} = \frac{0.98 - 0.94}{0.1} = 0.4$$

y así sucesivamente. La tabla 2.6 muestra estos valores. Observe que la derivada tiene valores pequeños y positivos hasta $t = 0.4$ y posteriormente se hacen más y más negativos, como era de esperarse.

Tabla 2.6 *Derivada de concentración*

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$c'(t)$	0.5	0.5	0.4	0.2	0.0	−0.3	−0.7	−1.1	−1.6	−2.2

Optimización de las evaluaciones numéricas de la derivada

En el ejemplo anterior, la estimación que hicimos de la derivada de $c(t)$ en $t = 0.2$ utilizaba un punto a la derecha de éste. Se determinó la razón promedio de cambio entre $t = 0.2$ y $t = 0.3$. Sin embargo, de la misma forma se pudo haber ido hacia la izquierda y emplear la razón de cambio entre $t = 0.1$ y $t = 0.2$ para aproximar la derivada en 0.2. Para obtener un resultado más exacto podemos promediar estas pendientes, lo que nos daría mayor precisión.

$$c'(0.2) \approx \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c}\text{Pendiente a la izquierda}\\ \text{de } 0.2\end{array} + \begin{array}{c}\text{Pendiente a la derecha}\\ \text{de } 0.2\end{array}\right) = \frac{0.5 + 0.4}{2} = 0.45.$$

Cada uno de estos métodos de aproximar la derivada produce una respuesta razonable. Por lo general, calcularemos la derivada desde la derecha del punto.

Determinación de la derivada de una función dada por una fórmula

Si tenemos la fórmula para una función f, ¿podríamos obtener una fórmula para f'? Con frecuencia, esto es factible mediante la definición de la derivada. De hecho, mucho del poder del cálculo depende de nuestra capacidad para hallar fórmulas para las derivadas de todas las funciones conocidas. Esto se explica con detalle en el capítulo 3. En el siguiente ejemplo se demuestra cómo determinar una fórmula para la derivada.

Ejemplo 5 Proponga una fórmula para la derivada de $f(x) = x^2$.

Solución Usamos los cocientes de diferencia para evaluar los valores de $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$. Después, buscamos patrones en los valores para determinar una fórmula de $f'(x)$.

Alrededor de $x = 1$, tenemos

$$f'(1) \approx \frac{1.001^2 - 1^2}{0.001} = \frac{1.002 - 1}{0.001} = \frac{0.002}{0.001} = 2.$$

De forma semejante,

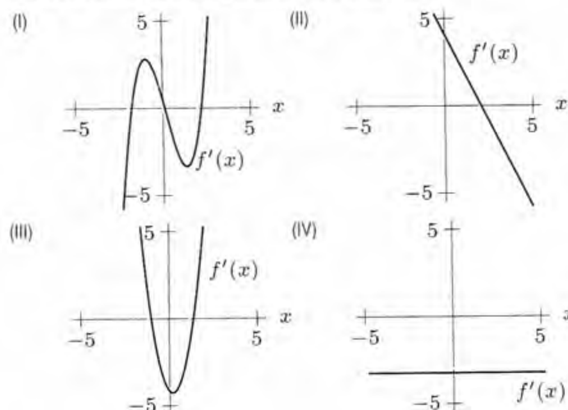
$$f'(2) \approx \frac{2.001^2 - 2^2}{0.001} = \frac{4.004 - 4}{0.001} = \frac{0.004}{0.001} = 4.$$

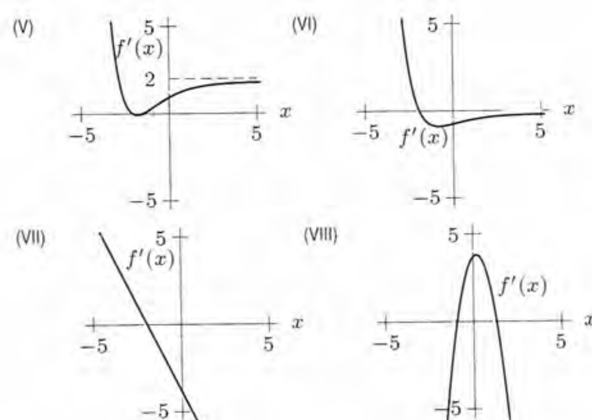
$$f'(3) \approx \frac{3.001^2 - 3^2}{0.001} = \frac{9.006 - 9}{0.001} = \frac{0.006}{0.001} = 6.$$

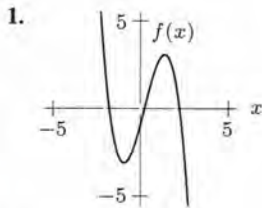
El conocimiento del valor de f' en puntos específicos no nos dice la fórmula de f', pero puede sugerirla: si sabemos que $f'(1) \approx 2$, $f'(2) \approx 4$, $f'(3) \approx 6$ ello sugiere que $f'(x) = 2x$. En el capítulo 3 se demuestra que éste es, de hecho, el caso.

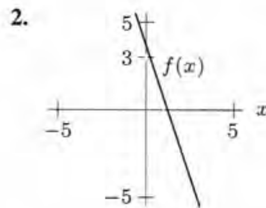
Problemas para la sección 2.2

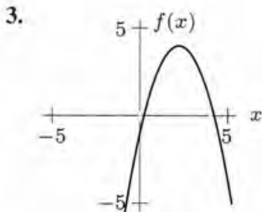
Relacione las funciones en los problemas del 1 al 4 con una de las derivadas en las figuras de la I a la VIII.

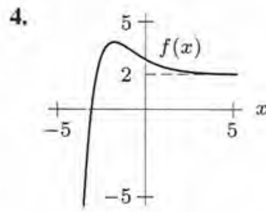




1. 

2. 

3. 

4. 

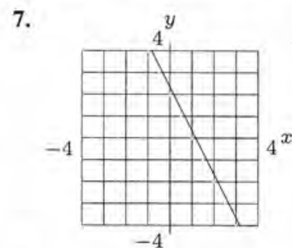
5. **(a)** Evalúe $f'(2)$ utilizando los valores de f en la tabla.
(b) ¿En cuáles valores de x es positiva $f'(x)$? ¿En cuáles es negativa?

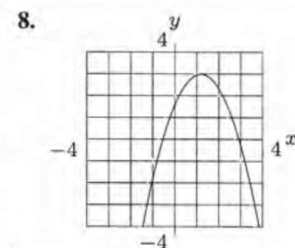
x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	10	18	24	21	20	18	15

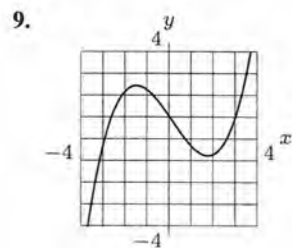
6. Encuentre valores aproximados de $f'(x)$ en cada uno de los valores de x que se muestran en la siguiente tabla,

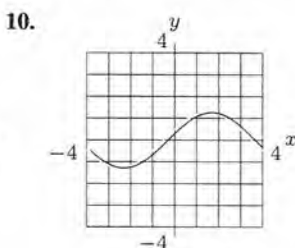
x	0	5	10	15	20
$f(x)$	100	70	55	46	40

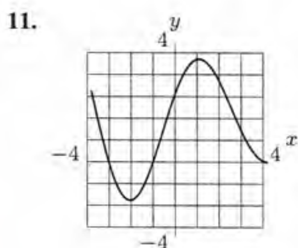
Para los problemas del 7 al 12 trace una gráfica de la derivada de una función para cada una de las funciones dadas.

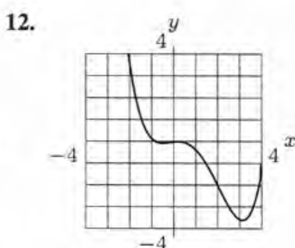
7. 

8. 

9. 

10. 

11. 

12. 

13. Dibuje una gráfica posible de $y = f(x)$ considerando la siguiente información sobre su derivada.

- $f'(x) > 0$ para $x < -1$
- $f'(x) < 0$ para $x > -1$
- $f'(x) = 0$ en $x = -1$

14. Dibuje una gráfica posible de $y = f(x)$ que tenga como base la siguiente información sobre su derivada.

- $f'(x) > 0$ en $1 < x < 3$
- $f'(x) < 0$ para $x < 1$ y $x > 3$
- $f'(x) = 0$ en $x = 1$ y $x = 3$

15. Considerando los valores numéricos que se muestran a continuación, determine los valores aproximados de la derivada de $f(x)$ en cada uno de los valores de x que se indican. ¿En qué punto la razón de cambio de $f(x)$ es positiva? ¿Dónde es negativa? ¿En qué punto la razón de cambio de $f(x)$ es máxima?

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	18	13	10	9	9	11	15	21	30

16. En la gráfica de f en la figura 2.23, ¿en cuál de los valores de x señalados

(a) $f(x)$ es máxima? **(b)** $f(x)$ es mínima?
(c) $f'(x)$ es máxima? **(d)** $f'(x)$ es mínima?

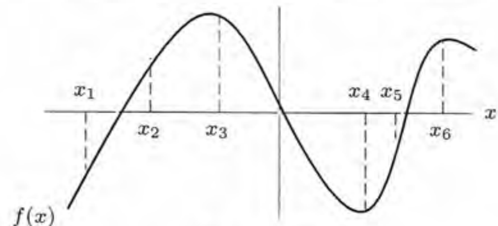
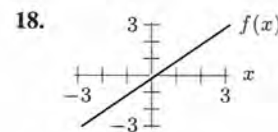
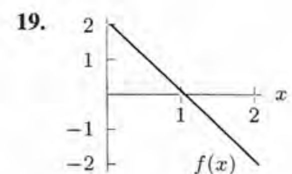


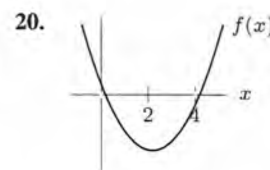
Figura 2.23.

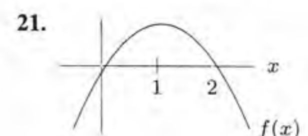
17. La población de una ciudad creció durante la década de 1980, y alcanzó el máximo en 1990; posteriormente disminuyó en la década de 1990. Tomemos $P = f(t)$ como la función que representa la población de la ciudad t años después de 1980. Dibuje las gráficas de $f(t)$ y $f'(t)$ indicando las unidades en los ejes.

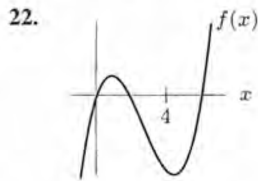
En los problemas del 18 al 25, dibuje la gráfica de $f'(x)$.

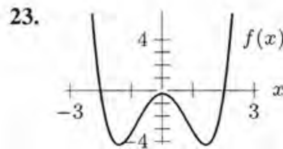
18. 

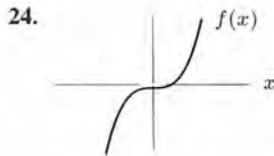
19. 

20. 

21. 

22.


23.


24.


25.


26. **(a)** Sea $f(x) = \ln x$. Utilice intervalos pequeños para evaluar $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$, $f'(4)$ y $f'(5)$.
(b) Utilice sus respuestas del inciso (a) para inferir una fórmula de la derivada de $f(x) = \ln x$.

27. Suponga que $f(x) = \frac{1}{3}x^3$. Calcule $f'(2)$, $f'(3)$ y $f'(4)$. ¿Qué observa? ¿Puede inferir una fórmula para $f'(x)$?

28. Un vehículo que circula por un camino recto recorre una distancia $f(t)$ desde su punto de partida en un tiempo t. ¿Cuál de las gráficas en la figura 2.24 podría ser $f'(t)$ en los siguientes escenarios? (Suponga que las escalas en los ejes verticales son las mismas.)
(a) Un autobús en una ruta común, sin tráfico.
(b) Un automóvil sin tráfico y con todos los semáforos en verde.
(c) Un automóvil en condiciones de tráfico pesado.

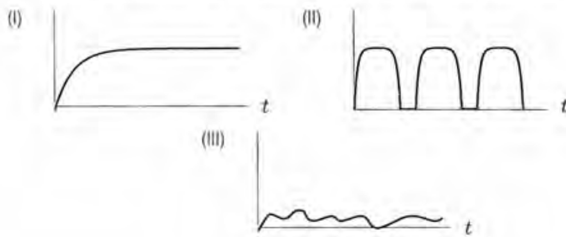


Figura 2.24.

29. Un niño infla un globo; lo ve durante un rato y después deja escapar el aire de éste a una razón constante. Si $V(t)$ indica el volumen del globo en tiempo t, entonces la figura 2.25 muestra a $V'(t)$ como una función de t. ¿En qué tiempo el niño:
(a) comienza a inflar el globo?
(b) termina de inflar el globo?
(c) empieza a desinflarlo?
(d) ¿Cómo sería la gráfica de $V'(t)$ si el niño hubiera alternado entre presionar y soltar la boquilla del globo, en vez de dejar escapar el aire a una razón constante?

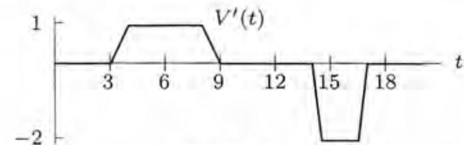


Figura 2.25.

30. Los valores de x y $g(x)$ se muestran en la tabla. ¿En qué valor de x es más cercana $g'(x)$ a 3?

x	2.7	3.2	3.7	4.2	4.7	5.2	5.7	6.2
$g(x)$	3.4	4.4	5.0	5.4	6.0	7.4	9.0	11.0

31. La figura 2.26 es la gráfica de f', la derivada de una función f. ¿En qué intervalo(s) la función f es
(a) creciente? **(b)** decreciente?

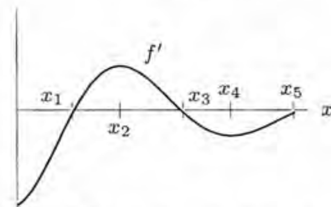


Figura 2.26. Gráfica de f', no de f.

2.3 INTERPRETACIONES DE LA DERIVADA

Hemos analizado la interpretación de la derivada como una pendiente y como una razón de cambio. En esta sección veremos otras interpretaciones. El propósito de estos ejemplos no es hacer un catálogo de interpretaciones sino ilustrar el proceso para obtenerlas. Hay otra notación para la derivada que con frecuencia es útil.

Notación alternativa para la derivada

Hasta aquí hemos empleado la notación f' para representar la derivada de la función f. Una notación alternativa para derivadas fue introducida por el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) cuando se creó el Cálculo. Sabemos que $f'(x)$ se aproxima por la razón promedio de cambio en un intervalo pequeño. Si $y = f(x)$, entonces la razón promedio de cambio está dada por $\Delta y/\Delta x$. Para Δx pequeña, tenemos

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

La notación de Leibniz para la derivada, dy/dx, se utiliza para recordarnos este hecho. Si $y = f(x)$, entonces escribimos

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

La notación de Leibniz es muy sugerente, en especial si consideramos que la letra d en dy/dx representa la "pequeña diferencia en . . . ." La notación dy/dx nos recuerda que la derivada es un límite de cocientes de la forma

$$\frac{\text{Diferencia en valores de } y}{\text{Diferencia en valores de } x}.$$

La notación dy/dx es útil para determinar las unidades para la derivada: las unidades de dy/dx son las unidades de y divididas entre (o "por") las unidades de x.

Las entidades separadas dy y dx no tienen ningún significado independiente: son parte de una notación. De hecho, una buena forma de ver la notación dy/dx es ver que d/dx es la definición de un solo símbolo: "la derivada con respecto a x de . . .". Por consiguiente, dy/dx podría considerarse como

$$\frac{d}{dx}(y), \text{ que significa "la derivada con respecto a } x \text{ de } y\text{".}$$

Por otra parte, muchos científicos y matemáticos realmente piensan que dy y dx son entidades separadas que representan diferencias "infinitesimalmente" pequeñas en y y en x, aunque sea muy difícil decir exactamente qué tan pequeño sea algo "infinitesimal". Tal vez no sea correcto, formalmente hablando, pero de modo intuitivo es de mucha ayuda suponer que dy/dx es un cambio muy pequeño en y dividido entre un cambio muy pequeño en x.

Por ejemplo, recordemos que si $s = f(t)$ es la posición de un objeto que se mueve en un tiempo t, entonces $v = f'(t)$ es la velocidad del objeto en el tiempo t. Escribir

$$v = \frac{ds}{dt}$$

nos recuerda que v es una velocidad, ya que la notación representa una distancia, ds, sobre un tiempo, dt, y sabemos que la distancia sobre el tiempo es la velocidad. Del mismo modo, reconocemos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

como la pendiente de la gráfica de $y = f(x)$, si recordamos que la pendiente es la elevación vertical, dy, sobre la variación horizontal, dx.

La desventaja de la notación de Leibniz es que es difícil de manejar para especificar el valor de x en el que se evalúa una derivada. Por ejemplo, para especificar $f'(2)$, tenemos que escribir

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}.$$

Uso de unidades para interpretar la derivada

Supongamos que $s = f(t)$ indica la posición, en metros, de un cuerpo a partir de un punto fijo como una función del tiempo, t, en segundos. Entonces, saber que

$$\frac{ds}{dt} = f'(2) = 10 \text{ m/s}$$

nos indica que cuando $t = 2$ segundos, el cuerpo se está moviendo a una velocidad de 10 metros/segundo. Si el cuerpo continúa moviéndose a esta velocidad durante todo un segundo (de $t = 2$ a $t = 3$), se moverá 10 metros más. En general:

- Las unidades de la derivada de una función son las unidades de la variable dependiente, divididas entre las unidades de la variable independiente.
- Si la derivada de una función no cambia con rapidez cerca de un punto, entonces la derivada es aproximadamente igual al cambio en la función cuando la variable independiente aumenta una unidad.

La derivada de la velocidad, dv/dt, se conoce como *aceleración*.

Ejemplo 1 Si la velocidad de un cuerpo en el tiempo t se mide en metros/segundo, ¿cuáles son las unidades de la aceleración?

Solución Puesto que la aceleración, dv/dt, es la derivada de la velocidad, las unidades de la aceleración son unidades de velocidad divididas entre unidades de tiempo, o (metros/segundo)/segundo, que se escribe como metros/segundo^2.

Los siguientes ejemplos ilustran cuán útiles pueden ser las unidades al sugerir interpretaciones de la derivada.

Ejemplo 2 El costo C (en dólares) de construir una casa de A pies cuadrados de área está dado por la función $C = f(A)$. ¿Cuál es la interpretación práctica de la función $f'(A)$?

Solución En la notación de Leibniz

$$f'(A) = \frac{dC}{dA}.$$

Éste es un costo dividido por área, de modo que se mide en dólares por pie cuadrado. Usted puede considerar que dC es el costo adicional de construir dA pies cuadrados más de la casa. Por consiguiente, dC/dA es el costo adicional por pie cuadrado. Por lo que si se está planeando construir una casa en un área de aproximadamente A pies cuadrados, $f'(A)$ es el costo por pie cuadrado del área *adicional* si se construyera una casa un poco más grande, y a esto se le conoce como el *costo marginal*. El costo marginal no es necesariamente lo mismo que el costo promedio por pie cuadrado de toda la casa, sino que una vez que estemos listos para comenzar la construcción de una casa grande, el costo de agregar algunos pies cuadrados podría ser comparativamente bajo.

Ejemplo 3 El costo de extraer T toneladas de mineral de una mina de cobre es $C = f(T)$ dólares. ¿Qué significa decir que $f'(2{,}000) = 100$?

Solución En la notación de Leibniz

$$f'(2{,}000) = \left.\frac{dC}{dT}\right|_{T=2{,}000}.$$

Como C se mide en dólares y T en toneladas, dC/dT debe medirse en dólares por tonelada. Entonces la expresión

$$\left.\frac{dC}{dT}\right|_{T=2{,}000} = 100$$

dice que cuando han sido extraídas de la mina 2,000 toneladas del mineral, el costo de extraer la siguiente tonelada es de aproximadamente \$100. Otra forma de expresar esto es que el costo de extraer la 2,001ª tonelada es de aproximadamente \$100. Observe que este costo puede ser muy diferente del costo de extraer la décima tonelada, lo cual parece ser lo más accesible.

Ejemplo 4 Si $q = f(p)$ da el número de libras de azúcar que se producen cuando el precio por libra es de p dólares, entonces, ¿cuáles son las unidades y el significado de

$$\left.\frac{dq}{dp}\right|_{p=3} = 50?$$

Solución Las unidades de dq/dp son las unidades de q sobre las unidades de p, o libras/dólar. La expresión

$$\left.\frac{dq}{dp}\right|_{p=3} = f'(3) = 50 \text{ libras/dólar}$$

nos indica que la razón de cambio de q respecto a p es de 50 cuando $p = 3$. Esto significa que cuando el precio es de \$3, la cantidad producida aumenta 50 libras por cada aumento de un dólar en el precio. Ésta es la razón de cambio instantánea, lo que quiere decir que si la razón permaneciera constante en 50 libras/dólar y si el precio aumentara un dólar, la cantidad producida se incrementaría en 50 libras. De hecho, probablemente la razón no permanece constante y, por tanto, la cantidad producida no sería exactamente 50 libras.

Ejemplo 5 El lapso de tiempo, L (en horas), que un medicamento permanece en el organismo de una persona es una función de la cantidad suministrada, q, en mg, por lo que $L = f(q)$.

(a) Interprete la expresión $f(10) = 6$. Indique las unidades de los números 10 y 6.
(b) Escriba la derivada de la función $L = f(q)$ en la notación de Leibniz. Si $f'(10) = 0.5$, ¿cuáles son las unidades de 0.5?
(c) Interprete la expresión $f'(10) = 0.5$ en términos de la dosis y la duración.

Solución **(a)** Sabemos que $f(q) = L$. En la expresión $f(10) = 6$, tenemos que $q = 10$ y $L = 6$, por lo que las unidades son de 10 miligramos y seis horas, respectivamente. La expresión $f(10) = 6$ señala que una dosis de 10 mg dura seis horas.
(b) Puesto que $L = f(q)$, podemos ver que L depende de q. La derivada de esta función es dL/dq. Considerando que L está en horas y q está en mg, las unidades de la derivada son horas por miligramo. En el enunciado $f'(10) = 0.5$, el 0.5 es la derivada y las unidades son horas por miligramo.
(c) El enunciado $f'(10) = 0.5$ indica que, con una dosis de 10 mg, la razón de cambio de la duración es de 0.5 horas/mg, es decir, si la dosis aumenta un miligramo, el medicamento permanece en el cuerpo aproximadamente 30 minutos más.

Ejemplo 6 Se le informa que el agua circula a través de una tubería a una razón de 10 pies cúbicos por segundo. Interprete esta razón como la derivada de cierta función.

Solución Al principio, puede pensar que el enunciado se refiere a la velocidad del agua, pero, de hecho, sólo puede alcanzarse una razón de 10 pies cúbicos si el agua circula muy lento a través de una tubería muy ancha, o si ésta circula rápidamente a través de una tubería muy estrecha. Si analizamos las unidades —pies cúbicos por segundo—, podremos darnos cuenta que se tiene una razón de cambio de una cantidad medida en pies cúbicos. Pero un pie cúbico es una medida del volumen; por tanto, tenemos la razón de cambio de un volumen. Si usted supone que toda el agua que está circulando termina en un tanque en algún lugar, y que $V(t)$ es el volumen del tanque en el tiempo t, entonces la razón de cambio de $V(t)$ es 10, o

$$V'(t) = \frac{dV}{dt} = 10.$$

Uso de la derivada para estimar valores de una función

Como la derivada nos indica con qué rapidez cambia el valor de una función, podemos utilizar la derivada en un punto para evaluar los valores de la función en puntos cercanos.

Ejemplo 7 El número de nuevas suscripciones a un periódico, y, en un mes es una función de la cantidad, x, en dólares que se gasta en publicidad durante dicho mes; por tanto, $y = f(x)$.

(a) Interprete las expresiones $f(250) = 180$ y $f'(250) = 2$.
(b) Utilice las expresiones del inciso (a) para evaluar a $f(251)$ y $f(260)$. ¿Cuál evaluación es la más confiable?

Solución (a) La expresión $f(250) = 180$ indica que $y = 180$ cuando $x = 250$. Esto significa que si se gastan $250 al mes en publicidad, hay 180 nuevas suscripciones al mes. Como la derivada es dy/dx, la expresión $f'(250) = 2$ nos dice que

$$\frac{dy}{dx} = 2 \quad \text{cuando } x = 250.$$

Esto significa que si la cantidad gastada en publicidad es de $250 y aumenta en $1, el número de nuevas suscripciones se incrementará en dos.

(b) La expresión $f(250) = 180$ indica que cuando se gastan $250 en publicidad, hay 180 nuevas suscripciones. La expresión $f'(250) = 2$ significa que el número de nuevas suscripciones aumenta a razón de dos suscripciones por cada dólar adicional gastado en publicidad. Si se gasta un dólar más en publicidad (entonces $x = 251$), es de esperarse que haya dos suscripciones más, además de las 180, por consiguiente

$$f(251) \approx 180 + 2 = 182.$$

De forma similar, si se gastaran 10 dólares más en publicidad (de tal forma que $x = 260$), esperaríamos que hubiera $10(2) = 20$ nuevas suscripciones, por tanto

$$f(260) \approx 180 + 10(2) = 200.$$

Observe que para calcular $f(260)$ tenemos que suponer que la cantidad de dos nuevas suscripciones por cada dólar adicional es la misma desde $x = 250$ hasta $x = 260$. Esto significa que el cálculo de $f(251)$ es más confiable.

En el ejemplo 7, que representa el cambio en y mediante Δy y el cambio en x por Δx, utilizamos el siguiente resultado:

Aproximación lineal local

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

Ejemplo 8 Los crecientes costos en salud pública han sido una fuente de preocupación durante cierto tiempo. Utilice los datos[6] de la tabla 2.7 para evaluar el gasto promedio *per capita* en 1991 y 2010.

Tabla 2.7 *Promedios anuales de costos de atención médica* per capita *para varios años, desde 1970*

Año	1970	1975	1980	1985	1990
Gasto *per capita* ($)	349	591	1,055	1,596	2,714

Solución Los costos de atención médica aumentaron durante el periodo que se muestra. Entre 1985 y 1990 se incrementaron en $(2{,}714 - 1{,}596)/5 = \$223.60$ por año. Para hacer estimaciones después de 1990 se supondrá que los costos continúan aumentando a la misma razón. De ahí que,

$$\begin{aligned} \text{Costos en 1991} &= \text{Costos en 1990} + \text{Cambio en costos} \\ &\approx \$2{,}714 + \$223.60 = \$2{,}937.60. \end{aligned}$$

Puesto que el año 2010 está 20 años después de 1990,

$$\text{Costos en 2000} \approx \$2{,}714 + \$223.60(20) = \$7{,}186.$$

[6]Datos adaptados de la información proporcionada por el Departamento de Salud y Servicios Humanos de Estados Unidos.

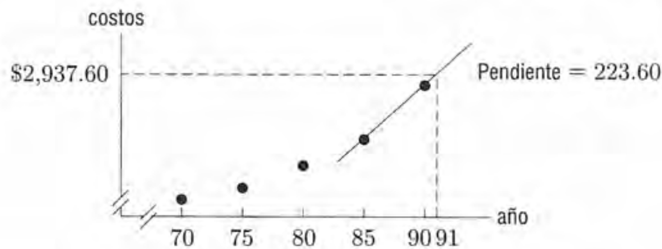


Figura 2.27. Gráfica de costos de atención médica.

Debe observar que, en el ejemplo anterior, el estimado para el año 1991 posiblemente se aproxima más al valor real que el estimado para el año 2010. Cuanto más extrapolamos los datos, menos exactitud tenemos. Es poco probable que la razón de cambio de los costos de atención médica todavía sean de $223.60 anuales hasta 2010.

Gráficamente, lo que hemos hecho es prolongar la recta que une a los puntos de los años de 1985 y 1990 para realizar proyecciones a futuro (véase la figura 2.27). Cabe preguntar por qué sólo utilizamos las dos últimas partes de los datos para llevar a cabo las cálculos. ¿Podemos obtener información valiosa con el resto de los datos? Sí, porque no hay una forma única de considerar esta información. Usted debe observar la razón de cambio para los años anteriores a 1985, sacar un promedio, o hacer una regresión lineal o exponencial.

Problemas para la sección 2.3

1. La temperatura, H, en grados Celsius, de una taza de café que se coloca en el mostrador de la estufa está dada por $H = f(t)$, donde t está en minutos a partir del momento en que se colocó la taza en la hornilla.

(a) ¿$f'(t)$ es positiva o negativa? Explique la razón de su respuesta.

(b) ¿Cuáles son las unidades de $f'(20)$? ¿Cuál es su significado práctico en términos de la temperatura del café?

2. La temperatura, T, en grados Fahrenheit, de un camote frío en un horno caliente está dada por $T = f(t)$, donde t es el tiempo en minutos a partir del momento en que se depositó el camote en el horno.

(a) ¿Cuál es el signo de $f'(t)$? ¿Por qué?

(b) ¿Cuáles son las unidades de $f'(20)$? ¿Cuál es el significado práctico del enunciado $f'(20) = 2$?

3. El costo, C (en dólares), de producir g galones de helado puede expresarse como $C = f(g)$. Explique el significado de las siguientes expresiones, haciendo uso de las unidades en términos del helado.

(a) $f(200) = 350$ **(b)** $f'(200) = 1.4$

4. El tiempo de una reacción química, T (en minutos), es una función de la cantidad del catalizador presente, a (en mililitros), de tal forma que $T = f(a)$.

(a) Si $f(5) = 18$, ¿cuáles son las unidades del 5? ¿En qué unidades se mide el 18? ¿Qué dice esta expresión respecto a la reacción?

(b) Si $f'(5) = -3$, ¿cuáles son las unidades del 5? ¿En qué unidades se mide el -3? ¿Qué indica esta expresión?

5. El grosor, P, en mm, de los cascarones de huevo de pelícano depende de la concentración, c, de PCB en el cascarón, medido en ppm (partes por millón), es decir, $P = f(c)$.

(a) La derivada $f'(c)$ es negativa. ¿Qué le dice esto a usted?

(b) Indique las unidades e interprete $f(200) = 0.28$ y $f'(200) = -0.0005$ en términos de los PCB y los huevos.

6. El peso, W (en libras), de un niño es una función de su edad, a, en años; por tanto, $W = f(a)$.

(a) ¿Usted espera que $f'(a)$ sea positiva o negativa? ¿Por qué?

(b) ¿Qué le indica $f(8) = 45$? Proporcione las unidades de los números 8 y 45.

(c) ¿Cuáles son las unidades de $f'(a)$? Explique qué le dice $f'(a)$ en términos de la edad y el peso.

(d) ¿Qué le indica $f'(8) = 4$ respecto a la edad y el peso?

(e) Conforme a aumenta, ¿usted esperaría que $f'(a)$ aumente o disminuya? Explique.

7. La figura 2.28 muestra la producción mundial de energía solar, en megavatios, como una función de los años desde 1990.[7] Calcule $f'(6)$. Indique las unidades y argumente su respuesta.

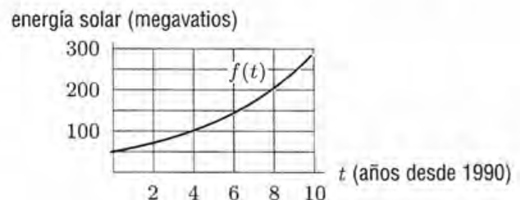


Figura 2.28.

[7]The Worldwatch Institute, *Vital Signs 2001*, W. W. Norton, Nueva York, 2001, p. 47.

8. Si t es el número de años desde 1993, la población, P, de China, en miles de millones, puede aproximarse por medio de la función

$$P = f(t) = 1.15(1.014)^t.$$

Evalúe a $f(6)$ y $f'(6)$, indicando las unidades. ¿Qué le indican estos dos números sobre la población de China?

9. Para ciertos analgésicos, el tamaño de la dosis, D, que se suministra depende del peso del paciente, W. Por tanto, $D = f(W)$, donde D está en miligramos y W en libras.

(a) Interprete los enunciados $f(140) = 120$ y $f'(140) = 3$ en términos de este analgésico.

(b) Utilice la información de los enunciados del inciso (a) para evaluar $f(145)$.

10. Suponga que $f(x)$ es una función con $f(100) = 35$ y $f'(100) = 3$. Calcule $f(102)$.

11. La cantidad, Q (en mg), de nicotina en el cuerpo t minutos después de fumar un cigarrillo está dada por $Q = f(t)$.

(a) Interprete los enunciados $f(20) = 0.36$ y $f'(20) = -0.002$ en términos de la nicotina. ¿Cuáles son las unidades de los números 20, 0.36, y -0.002?

(b) Utilice la información del inciso (a) para evaluar $f(21)$ y $f(30)$. Justifique sus respuestas.

12. Suponga que $f(t)$ es una función con $f(25) = 3.6$ y $f'(25) = -0.2$. Evalúe a $f(26)$ y $f(30)$.

13. Las acciones de un fondo mutuo tienen un valor actual de \$80 cada una y el valor de cada acción está aumentando a razón de \$0.50 al día. $V = f(t)$ es la función que representa el valor de la acción t días después de este momento.

(a) Exprese la información sobre el fondo mutuo en términos de f y f'.

(b) Suponiendo que la razón de crecimiento permanece constante, evalúe e interprete $f(10)$.

14. La tabla[8] muestra a $f(t)$, las ventas totales de discos compactos (CD) de música, en millones, y a $g(t)$, las ventas totales de casetes de música, también en millones, como una función del año t.

(a) Calcule $f'(1998)$ y $g'(1998)$. Indique las unidades junto con sus respuestas e interprete cada respuesta en términos de las ventas de CD o de casetes.

(b) Utilice a $f'(1998)$ para estimar $f(1999)$ y $f(2005)$. Explique sus respuestas en términos de las ventas de discos compactos.

Año, t	1992	1994	1996	1998
Ventas de CD, $f(t)$	407.5	662.1	778.9	847.0
Ventas de casetes, $g(t)$	366.4	345.4	225.3	158.5

15. El peso promedio, W (en libras), de un adulto es una función, $W = f(c)$, del número promedio de calorías consumidas al día, c.

(a) Interprete los enunciados $f(1{,}800) = 155$ y $f'(2{,}000) = 0$ en términos de la dieta y el peso.

(b) ¿Cuáles son las unidades de $f'(c) = dW/dc$?

16. Después de invertir \$1,000 a una tasa de interés anual de 7% compuesta continuamente durante t años, su balance es de \$$B$, donde $B = f(t)$. ¿Cuáles son las unidades de dB/dt? ¿Cuál es la interpretación financiera de dB/dt?

17. Al invertir \$1,000 a una razón de interés anual de r%, compuesta continuamente durante 10 años, usted obtiene un balance de \$$B$, donde $B = g(r)$. Dé una interpretación financiera para los enunciados:

(a) $g(5) \approx 1{,}649$.

(b) $g'(5) \approx 165$. ¿Cuáles son las unidades de $g'(5)$?

18. Suponga que $C(r)$ es el costo total de pagar el préstamo para comprar un auto, que se realizó a una tasa de interés anual de r%. ¿Cuáles son las unidades de $C'(r)$? ¿Cuál es el significado práctico de $C'(r)$? ¿Cuál es el signo de éste?

19. Suponga que $P(t)$ es el pago mensual, en dólares, de una hipoteca que tardará t años en ser liquidada. ¿Cuáles son las unidades de $P'(t)$. ¿Cuál es el significado práctico de $P'(t)$? ¿Cuál es su signo?

20. Sea $f(x)$ la función que representa la altura, en pies, del río Mississippi a x millas de su nacimiento. ¿Cuáles son las unidades de $f'(x)$? ¿Qué puede usted decir sobre el signo de $f'(x)$?

21. Un economista está interesado en cómo el precio de cierta mercancía afecta sus ventas. Supongamos que al precio de \$$p$ vende una cantidad, q, de las unidades. Si $q = f(p)$, explique el significado de cada una de las siguientes expresiones:

(a) $f(150) = 2{,}000$ **(b)** $f'(150) = -25$

22. Cuando usted respira, un músculo (llamado diafragma) reduce la presión alrededor de sus pulmones y después éstos se expanden para llenarse de aire. La tabla muestra el volumen de un pulmón como función de la reducción en la presión del diafragma. Los neumólogos (especialistas en el funcionamiento de los pulmones) definen a la *elasticidad* del pulmón como la derivada de esta función.[9]

(a) ¿Cuáles son las unidades de la elasticidad?

(b) Evalúe la elasticidad máxima del pulmón.

(c) Explique por qué la elasticidad es pequeña cuando el pulmón está casi lleno (aproximadamente un litro).

Reducción de la presión (cm de agua)	Volumen (litros)
0	0.20
5	0.29
10	0.49
15	0.70
20	0.86
25	0.95
30	1.00

[8] *World Almanac 2001*, p. 313.

[9] Adaptado de West, John B., *Respiratory Physiology*, 4ª edición, Williams y Wilkins, Nueva York, 1990.

23. El ingreso de una compañía por la venta de automóviles, C (en miles de dólares), es una función del gasto en publicidad, a, en miles de dólares; de ahí que $C = f(a)$.
   (a) ¿Qué espera la compañía que se cumpla sobre el signo de f'?
   (b) ¿Qué significa el enunciado $f'(100) = 2$ en términos prácticos? ¿Qué significa $f'(100) = 0.5$?
   (c) Suponga que la compañía planea gastar $100,000 en publicidad. Si $f'(100) = 2$, ¿la compañía debería gastar más o menos de $100,000 en publicidad? ¿Qué pasaría si $f'(100) = 0.5$?

2.4 SEGUNDA DERIVADA

Como la derivada en sí es una función, podemos calcular su derivada. Para una función, f, la derivada de su derivada se denomina *segunda derivada* y se escribe f''. Si $y = f(x)$, la segunda también se puede escribir como $\frac{d^2y}{dx^2}$, lo cual significa $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, la derivada de $\frac{dy}{dx}$.

¿Qué nos dice la segunda derivada?

Recordemos que la derivada de una función nos dice si la función es creciente o decreciente.

Si $f' > 0$ en un intervalo, entonces f es creciente en dicho intervalo.

Si $f' < 0$ en un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

Puesto que f'' es la derivada de f', se tiene que

Si $f'' > 0$ en un intervalo, entonces f' es creciente en dicho intervalo.

Si $f'' < 0$ en un intervalo, entonces f' es decreciente en tal intervalo.

Entonces la pregunta es: ¿qué significa que f' sea creciente o decreciente? El caso en que f' es creciente se muestra en la figura 2.29, donde la gráfica de f se dobla hacia arriba, o es *cóncava hacia arriba*. En el caso cuando f' es decreciente, como se muestra en la figura 2.30, la gráfica se dobla hacia abajo, o es *cóncava hacia abajo*.

> $f'' > 0$ en un intervalo significa que f' es creciente; por tanto, la gráfica de f es cóncava hacia arriba.
> $f'' < 0$ en un intervalo significa que f' es decreciente, por lo que la gráfica de f es cóncava hacia abajo.

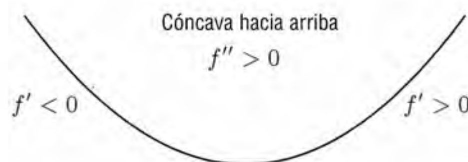


Figura 2.29. Significado de f'': la pendiente aumenta de negativa a positiva a medida que nos movemos de izquierda a derecha, por lo que f'' es positiva y f es cóncava hacia arriba.

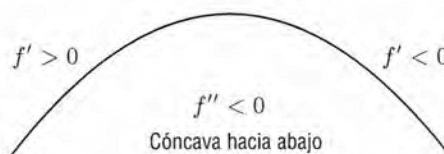


Figura 2.30. Significado de f'': la pendiente disminuye de positivo a negativo conforme usted avanza de izquierda a derecha, por lo que f'' es negativa y f es cóncava hacia abajo.

Ejemplo 1 Para las funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 2.31, decida dónde sus segundas derivadas son positivas y dónde son negativas.

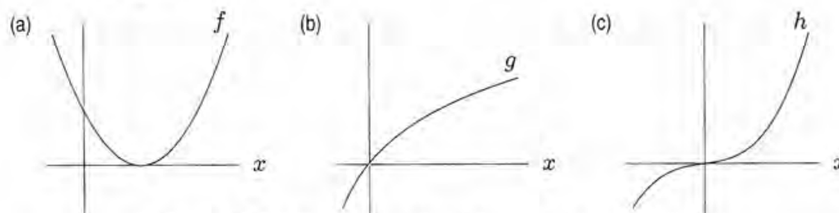


Figura 2.31. ¿Qué signos tienen las segundas derivadas?

Solución De acuerdo con las gráficas

(a) $f'' > 0$ en todos los puntos, ya que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en todos los puntos.
(b) $g'' < 0$ en todos los puntos, puesto que la gráfica es cóncava hacia abajo en todos los puntos.
(c) $h'' > 0$ para $x > 0$, debido a que la gráfica de h es cóncava hacia arriba en ese intervalo; $h'' < 0$ para $x < 0$, ya que la gráfica de h es cóncava hacia abajo en dicho intervalo.

Interpretación de la segunda derivada como una razón de cambio

Si consideramos la derivada como una razón de cambio, entonces la segunda derivada es una razón de cambio de una razón de cambio. Si la segunda derivada es positiva, la razón de cambio es creciente; si la segunda derivada es negativa, la razón de cambio es decreciente.

Con frecuencia, la segunda derivada es un asunto de interés práctico. En 1985, el encabezado de un periódico informó que el Secretario de Defensa de Estados Unidos anunció que el Congreso y el Senado redujeron el presupuesto para la defensa nacional. Sin embargo, a diferencia de lo que sus oponentes señalaron, el Congreso había reducido la tasa a la que estaba aumentando el presupuesto de defensa,[10] es decir, la derivada del presupuesto de defensa aún seguía siendo positiva (el presupuesto estaba aumentando), pero la segunda derivada era negativa (la razón de aumento en el presupuesto había disminuido).

Ejemplo 2 Una población, P, que crece en un entorno limitado, por lo general, sigue una curva de crecimiento *logístico*, como la curva que se muestra en la figura 2.32. Describa cómo cambia la razón a la cual está aumentando la población a lo largo del tiempo. ¿Cuál es el signo de la segunda derivada d^2P/dt^2? ¿Cuál es la interpretación práctica de $t*$ y L?

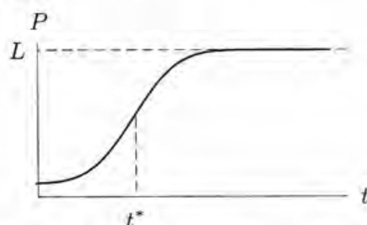


Figura 2.32. Curva de crecimiento logístico.

Solución Inicialmente, la población se incrementa a una tasa creciente. De modo que inicialmente dP/dt es creciente y $d^2P/dt^2 > 0$. En $t*$, la razón con la cual la población es creciente es máxima; la población está creciendo entonces con mayor rapidez. Después de $t*$, la razón con la que está creciendo la población es decreciente, por lo que $d^2P/dt^2 < 0$. En $t*$, la gráfica cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo y $d^2P/dt^2 = 0$.

La cantidad L representa el valor límite que alcanza la población a medida que t tiende al infinito; L se conoce como la *capacidad de carga* del entorno y representa la población máxima que el entorno puede sostener.

[10]*Boston Globe*, 13 de marzo de 1985. El representante William Gray (Demócrata, Pennsylvania) dijo: "Es confuso para el pueblo estadounidense dar a entender que el Congreso amenaza la seguridad nacional con recortes presupuestales, cuando en realidad se está hablando de una reducción en el incremento".

Ejemplo 3 La tabla 2.8 muestra el número de abortos por año, A, ocurridos en Estados Unidos en el año t (según información del Centro para el Control y Prevención de Enfermedades).

Tabla 2.8 *Abortos registrados en Estados Unidos (1972–1985)*

Año, t	1972	1976	1980	1985
Número de abortos registrados, A	586,760	988,267	1,297,606	1,328,570

(a) Calcule dA/dt para los intervalos de tiempo que se muestran entre 1972 y 1985.
(b) ¿Qué puede decir acerca del signo de d^2A/dt^2 durante el periodo de 1972–1985?

Solución **(a)** Para cada intervalo de tiempo podemos calcular la razón promedio de cambio del número de abortos por año en dicho intervalo. Por ejemplo, entre 1972 y 1976

$$\frac{dA}{dt} \approx \begin{array}{c}\text{Razón promedio}\\ \text{de cambio}\end{array} = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{988{,}267 - 586{,}760}{1976 - 1972} \approx 100{,}377.$$

En la tabla 2.9 aparecen los valores aproximados de dA/dt:

Tabla 2.9 *Razón de cambio del número de abortos registrados*

Tiempo	1972–1976	1976–1980	1980–1985
Razón promedio de cambio, $\Delta A/\Delta t$	100,377	77,335	6,193

(b) En la figura 2.33 suponemos que los datos están sobre la curva. Como los valores de $\Delta A/\Delta t$ están disminuyendo de modo considerable durante 1976–1985, podemos estar bien seguros de que dA/dt también decrece, por lo que d^2A/dt^2 es negativo para este periodo. Durante 1972–1976 el signo de d^2A/dt^2 es algo incierto; los datos de los abortos realizados en 1968 podrían ser útiles en este caso. La figura 2.33 confirma esto: la curva se muestra cóncava hacia abajo durante 1976–1985. El hecho de que dA/dt sea positiva nos indica que el número de abortos registrados aumentó durante el periodo 1972–1985. El hecho de que d^2A/d^2t sea negativa para 1976–1985 nos dice que la razón de aumento disminuyó en este periodo.



Figura 2.33. Cómo cambia, con el tiempo, el número de abortos registrados en Estados Unidos.

Problemas para la sección 2.4

1. Para la función graficada en la figura 2.34, ¿las siguientes cantidades son positivas o negativas?

(a) $f(2)$ (b) $f'(2)$ (c) $f''(2)$

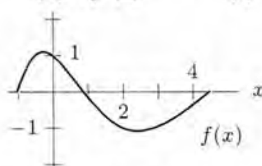


Figura 2.34.

2. La gráfica de una función $f(x)$ se muestra en la figura 2.35. En una copia de la tabla indique si f, f', f'' es positiva, negativa, o cero en cada uno de los puntos indicados.

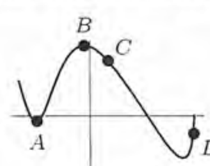


Figura 2.35.

Punto	f	f'	f''
A			
B			
C			
D			

3. ¿En cuál de los puntos, indicados en la gráfica de la figura 2.36, tanto dy/dx como d^2y/dx^2 son positivas?

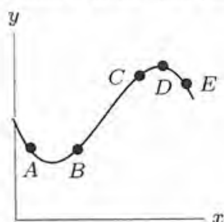
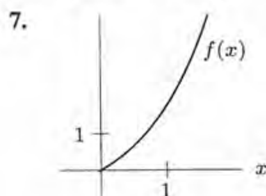


Figura 2.36.

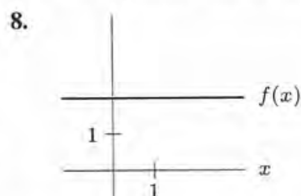
4. Trace la gráfica de una función cuya primera y segunda derivadas sean positivas en todas partes.
5. Trace la gráfica de una función cuya primera derivada sea negativa en todos los puntos y cuya segunda derivada sea positiva para algunos valores de x, y negativa para otros valores de x.
6. Trace la gráfica de la altura de una partícula respecto al tiempo, si la velocidad es positiva y la aceleración es negativa.

Para los problemas del 7 al 12, indique los signos de la primera y de la segunda derivadas para cada una de las siguientes funciones.

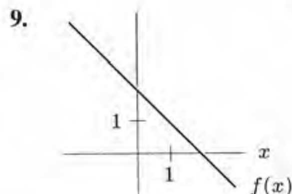
7.



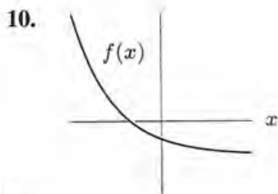
8.



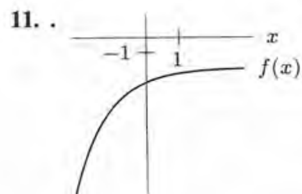
9.



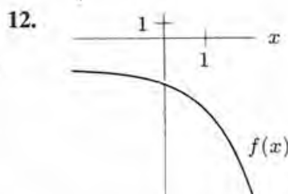
10.



11. .



12.



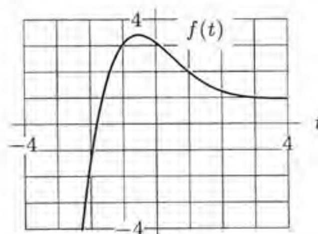
13. La tabla indica el número de autobuses, $C = f(t)$, en millones, en Estados Unidos durante el año t.
   (a) ¿$f'(t)$ y $f''(t)$ parecen ser positivas o negativas durante el periodo 1940–1980?
   (b) Estime $f'(1975)$. Utilizando unidades, interprete su respuesta en términos de autobuses.

t (año)	1940	1950	1960	1970	1980
C (autobuses, en millones)	27.5	40.3	61.7	89.3	121.6

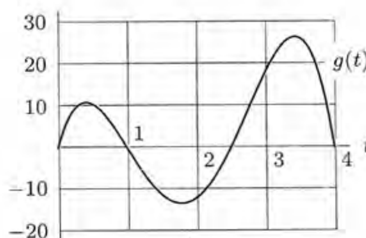
En los problemas del 14 al 15, utilice la gráfica correspondiente para cada función.

(a) Determine los intervalos en los que la derivada es positiva y los intervalos en los que la derivada es negativa.
(b) Determine los intervalos en los que la segunda derivada es positiva y los intervalos en los que la segunda derivada es negativa.

14.



15.



En los problemas del 16 al 17, emplee los valores dados para cada función.

(a) ¿Parece ser la derivada de la función positiva o negativa en el intervalo dado? Explique.
(b) ¿Parece ser la segunda derivada de la función positiva o negativa en el intervalo dado? Explique.

16.

t	0	1	2	3	4	5
$s(t)$	12	14	17	20	31	55

17.

t	100	110	120	130	140
$w(t)$	10.7	6.3	4.2	3.5	3.3

18. Dibuje la gráfica de una función continua f que satisface las siguientes propiedades:
   - $f'(x) > 0$ para todas las x
   - $f''(x) < 0$ para $x < 2$ y $f''(x) > 0$ para $x > 2$.

19. $P(t)$ es la función que representa el precio de una acción de una corporación en el tiempo t. ¿Qué indican los siguientes enunciados acerca de los signos de la primera y la segunda derivadas de $P(t)$?
   (a) "El precio de la acción sube más y más rápido."
   (b) "El precio de la acción está a punto de tocar fondo."

20. En economía, la *ganancia* o *utilidad total* se refiere a la satisfacción total por consumir algún producto. De acuerdo con el economista Samuelson:[11]

> Conforme una persona consume más del mismo producto, la ganancia total (psicológica) aumenta. Sin embargo, [...] con sucesivas nuevas unidades del producto, su ganancia total crece a una razón cada vez más lenta y menos aguda debido a la tendencia fundamental de la capacidad psicológica de la persona para apreciar unidades adicionales del producto.

(a) Trace la ganancia total como una función del número de unidades consumidas.
(b) En términos de derivadas, ¿qué nos dice Samuelson?

21. IBM-Perú emplea segundas derivadas para evaluar el éxito relativo de diversas campañas de publicidad. Ellos suponen que todas las campañas producen algún aumento en las ventas. Si una gráfica de ventas respecto al tiempo muestra una segunda derivada positiva durante una nueva campaña de publicidad, ¿qué sugiere esto a la administración de IBM? ¿Por qué? ¿Qué sugiere una segunda derivada negativa?

22. La Agencia de Protección Ambiental (APA) acusó a una empresa industrial de descargar niveles inaceptables de contaminantes tóxicos en un lago. En un periodo de varios meses, una empresa de ingeniería hacía mediciones diarias de la razón a la que se descargan los contaminantes en el lago. Los ingenieros elaboran una gráfica similar a la de la figura 2.37(a), o a la de la figura 2.37(b). En cada caso, exprese una idea de la demanda que podría interponer la APA ante la Corte en contra de la empresa y otra en defensa de la empresa.



Figura 2.37.

23. ¿Cuáles de los puntos indicados por las letras en la gráfica de f en la figura 2.38 tienen

(a) f' y f'' diferentes de cero y del mismo signo?
(b) Cuando menos dos de las funciones f, f' y f'' iguales a cero?

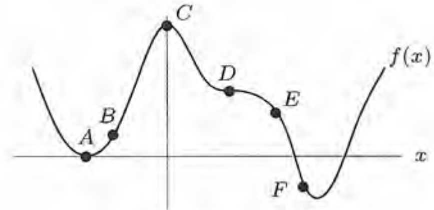


Figura 2.38.

24. Una función f satisface las siguientes condiciones: $f(5) = 20$, $f'(5) = 2$, y $f''(x) < 0$, para $x \geq 5$. ¿Cuáles de las siguientes cantidades son valores posibles de $f(7)$ y cuáles son imposibles?

(a) 26 **(b)** 24 **(c)** 22

25. La directora de una escuela preparatoria está preocupada por la disminución en el porcentaje de estudiantes que se gradúan, según se muestra en la siguiente tabla.

Año de ingreso a la preparatoria t	1989	1992	1995	1998	2001
Porcentaje de graduados, P	62.4	54.1	48.0	43.5	41.8

(a) Calcule dP/dt para cada uno de los intervalos de tres años entre 1989 y 2001.
(b) ¿d^2P/dt^2 parece positivo o negativo entre 1989 y 2001?
(c) Explique por qué los valores de P y dP/dt le preocupan a la directora.
(d) Explique por qué el signo de d^2P/dt^2 y la magnitud de dP/dt en el año de 1998 puede ofrecer a la directora algo de optimismo.

2.5 COSTO E INGRESO MARGINALES

Las decisiones de administración de una compañía o industria en particular suelen depender de los costos e ingresos de que se trate. En esta sección analizaremos las funciones de costo e ingreso.

Gráficas de las funciones de costo e ingreso

La gráfica de una función de costo puede ser lineal, como en la figura 2.39, o puede ser como se muestra en la figura 2.40. La intersección con el eje C representa los costos fijos en que incurre incluso si no se produce nada. (Por ejemplo, esto incluye el costo de la maquinaría necesaria para comenzar la producción.) En la figura 2.40 la función de costos aumenta rápidamente al principio y luego con lentitud porque producir cantidades más grandes de un producto suele ser más eficiente que producir cantidades más

[11]Samuelson, Paul A., *Economics*, 11ª edición, McGraw-Hill, Nueva York, 1981.

pequeñas de éste, a lo cual se le conoce como *economía de escala*. No obstante, a niveles de producción incluso más altos la función de costo de nuevo comienza a aumentar cada vez más rápido a medida que escasean los recursos, y pueden presentarse aumentos drásticos cuando haya que construir nuevas fábricas. Entonces, la gráfica de una función de costo, C, puede comenzar siendo cóncava hacia abajo y después hacerse cóncava hacia arriba.

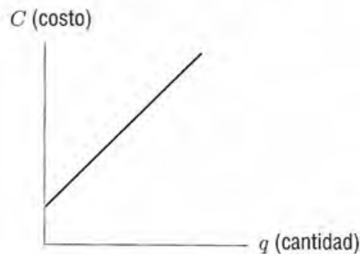


Figura 2.39. Función de costos lineal.

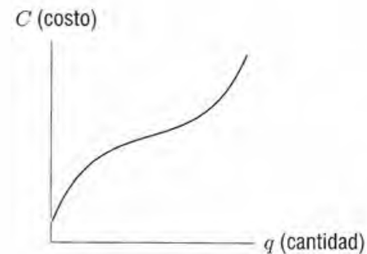


Figura 2.40. Función de costos no lineal.

La función de ingresos es $I = pq$, donde p es el precio y q es la cantidad. Si el precio, p, es una constante, la gráfica de I respecto a q es una línea recta que pasa por el origen con una pendiente igual al precio (véase la figura 2.41). En la práctica, el mercado puede saturarse, para valores grandes de q, y hacer que el precio caiga y que I tenga la forma de la figura 2.42.

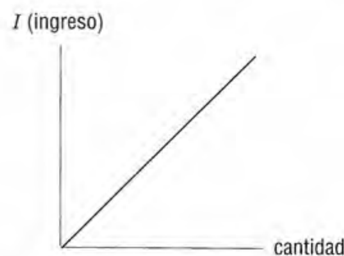


Figura 2.41. Ingreso: precio constante.

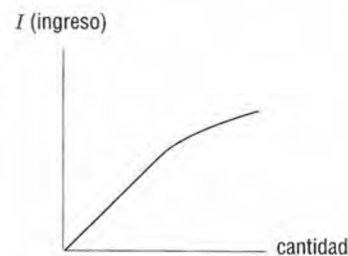


Figura 2.42. Ingreso: precio decreciente.

Ejemplo 1 Si el costo, C, y el ingreso, I, se dan en la gráfica de la figura 2.43, ¿para qué cantidades de producción obtiene ganancias la compañía?

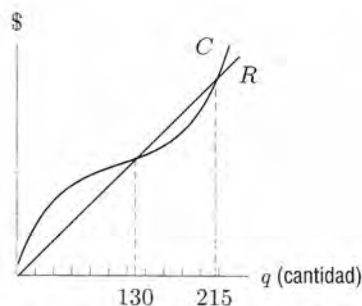


Figura 2.43. Costos e ingresos para el ejemplo 1.

Solución La empresa obtiene ganancias siempre que los ingresos sean mayores a los costos, es decir, cuando $I > C$. La gráfica de I está arriba de la gráfica de C aproximadamente cuando $130 < q < 215$. Al producir entre 130 y 215 unidades se obtendrán ganancias.

Análisis marginal

Muchas decisiones económicas se basan en un análisis de costos e ingresos "en el margen". Examinemos esta idea mediante un ejemplo.

Suponga que dirige una línea aérea y que está tratando de decidir si ofrece un vuelo adicional. ¿Cómo lo decide? Supondremos que la decisión la tomará basándose sólo en la cuestión financiera: si el vuelo produce dinero para la compañía, debe agregarse. Obviamente, necesita considerar los costos y los ingresos que esto representa. Considerando que la elección consiste en agregar este vuelo o dejar las cosas como están, la pregunta crucial es si los *costos adicionales* que se contraerán son mayores o menores a los *ingresos adicionales* generados por el vuelo. Estos costos e ingresos adicionales se denominan *costos marginales* e *ingresos marginales*.

Suponga que $C(q)$ es la función que indica el costo de operar q vuelos. Si la aerolínea originalmente tenía planeado operar 100 vuelos, sus costos serían $C(100)$. Con el vuelo adicional los costos serán $C(101)$. Por tanto,

$$\text{Costo marginal} = C(101) - C(100).$$

Ahora

$$C(101) - C(100) = \frac{C(101) - C(100)}{101 - 100},$$

y esta cantidad es la razón promedio de cambio del costo entre 100 y 101 vuelos. En la figura 2.44 la razón promedio de cambio es la pendiente de la secante. Si la gráfica de la función de costos no se curva demasiado rápido alrededor de ese punto, la pendiente de la secante está cerca de la pendiente de la tangente en dicho punto. Por consiguiente, la razón promedio de cambio es similar a la razón de cambio instantánea. Puesto que estas razones de cambio no son muy diferentes entre sí, muchos economistas prefieren definir al costo marginal, CM, como la razón de cambio instantánea del costo respecto a la cantidad:

$$\text{Costo marginal} = CM = C'(q).$$

La pendiente de la curva de costos representa al costo marginal.

De manera similar, si el ingreso generado por q vuelos es $I(q)$, entonces el ingreso adicional que se genera al incrementar el número de vuelos de 100 a 101 es

$$\text{Ingreso marginal} = I(101) - I(100).$$

Ahora $I(101) - I(100)$ es la razón promedio de cambio de ingreso entre 100 y 101 vuelos. Al igual que antes, la razón promedio de cambio es aproximadamente igual a la razón de cambio instantánea, de modo que los economistas definen muchas veces

$$\text{Ingreso marginal} = IM = I'(q).$$

El ingreso marginal está representado por la pendiente de la curva de ingresos.

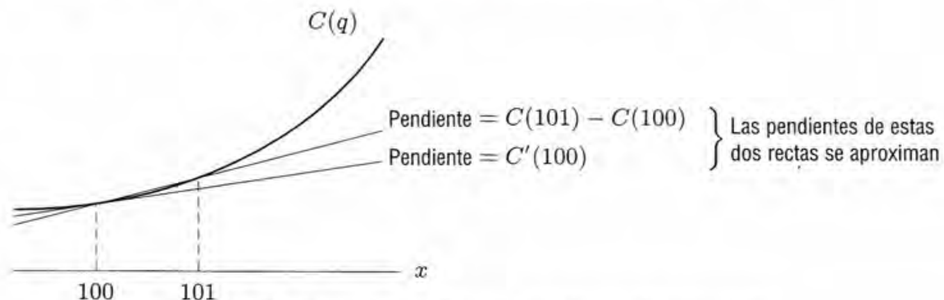


Figura 2.44. Costo marginal: pendiente de una de estas rectas.

Ejemplo 2 Si $C(q)$ e $I(q)$ para la línea aérea están dados en la figura 2.45, ¿debe la línea aérea agregar el vuelo 101?

Solución El ingreso marginal es la pendiente de la curva de ingreso. El costo marginal es la pendiente de la gráfica de C en el punto 100. La figura 2.45 indica que la pendiente en el punto A es menor que la pendiente en el punto B, de modo que $CM < IM$ para $q = 100$. Esto significa que la línea aérea tendrá más ingreso extra de lo que gastará en costos extra si opera otro vuelo, de modo que debe seguir adelante y operar el vuelo 101.

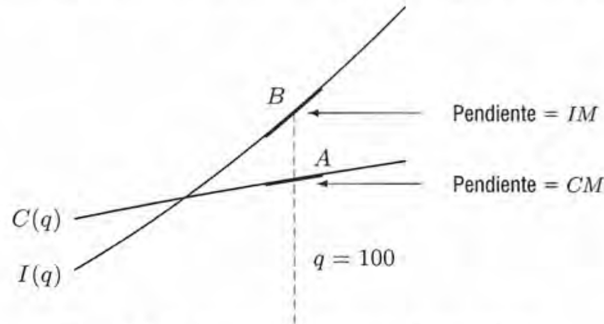


Figura 2.45. Costo e ingreso para el ejemplo 2.

Ejemplo 3 La figura 2.46 muestra la gráfica de una función de costo. ¿Cuesta más producir el artículo 500, o el 2,000? ¿Es más costoso producir el 3,000 o el 4,000? ¿Aproximadamente en cuál nivel de producción es más pequeño el costo marginal? ¿Cuál es el costo total en este nivel de producción?

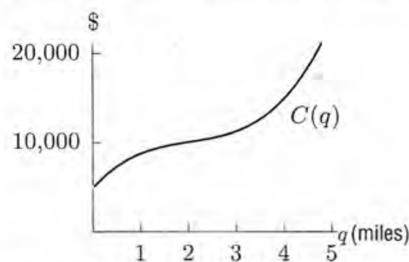


Figura 2.46. Estimación del costo marginal: ¿En dónde es mínimo el costo marginal?

Solución El costo de producir un artículo adicional es el costo marginal, que se representa por la pendiente de la curva de costos. Como la pendiente de la función de costos de la figura 2.46 es mayor en $q = 0.5$ (cuando la cantidad producida es de 0.5 miles de dólares, o 500), entonces en $q = 2$ es más costoso producir el artículo 500 que el 2,000. Puesto que la pendiente es mayor en $q = 4$ que en $q = 3$, es más caro producir el artículo 4,000 que el 3,000.

La pendiente de la función de costo es aproximadamente cero en $q = 2$, y es positiva en todos los demás puntos, de ahí que la pendiente sea más pequeña en $q = 2$. El costo marginal es mínimo en un nivel de producción de 2,000 unidades. Debido a que $C(2) \approx 10{,}000$, el costo total de producir 2,000 unidades es de aproximadamente $10,000.

Ejemplo 4 Si las gráficas de la figura 2.47 muestran las funciones de costos y de ingreso, C e I, trace las gráficas de las funciones del ingreso marginal y del costo marginal, IM y CM.



Figura 2.47. Ingreso total y costo total para el ejemplo 4.

Solución La gráfica de ingreso es una recta que atraviesa el origen, con ecuación

$$I = pq$$

donde p representa el precio constante, y la pendiente es p

$$IM = I'(q) = p.$$

El costo total es creciente, por lo que el costo marginal siempre es positivo. Para valores pequeños de q, la gráfica de la función de costos es cóncava hacia abajo; por tanto, el costo marginal es decreciente. Para valores grandes de q, digamos $q > 100$, la gráfica de la función de costos es cóncava hacia arriba y el costo marginal es creciente. Por tanto, el costo marginal es mínimo en $q = 100$ (véase la figura 2.48).

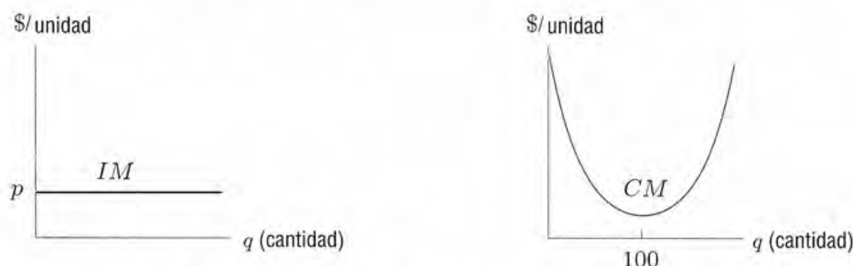


Figura 2.48. Ingresos y costos marginales para el ejemplo 4.

Maximización de las ganancias

Ahora veamos la pregunta de cómo maximizar la ganancia total, considerando las funciones de ingreso y costo. El siguiente ejemplo sugiere un criterio para identificar el nivel óptimo de producción.

Ejemplo 5 Calcule la ganancia máxima si el ingreso y el costo están dados por las curvas I y C, respectivamente, en la figura 2.49.

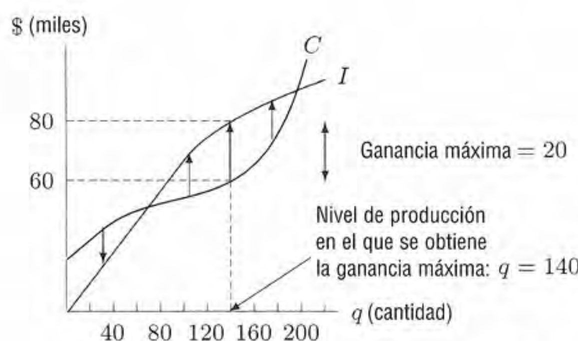


Figura 2.49. Ganancia máxima en $q = 140$.

Solución La diferencia vertical entre las curvas representa la ganancia máxima y se indica mediante las flechas de la gráfica. Cuando el ingreso es menor al costo, la empresa tiene pérdidas; cuando el ingreso es mayor al costo la empresa genera ganancias. La ganancia máxima se debe presentar aproximadamente entre $q = 70$ y $q = 200$, que es el intervalo en el que se generan ganancias. La ganancia se maximiza cuando la distancia vertical entre las curvas es más grande (y el ingreso es mayor al costo). Esto ocurre aproximadamente en $q = 140$.

Puesto que la ganancia es igual a ingreso menos costo, la ganancia real es la distancia vertical entre las dos curvas. En $q = 140$, la ganancia máxima = \$80,000 − \$60,000 = \$20,000.

Ganancia máxima puede presentarse donde $IM = CM$

Para las funciones de costos y de ingreso de la figura 2.49, la ganancia se maximiza a un nivel de producción de $q = 140$. La gráfica de la figura 2.50 da un acercamiento sobre las funciones de costo e ingreso alrededor de $q = 140$ y se obtiene la gráfica de la figura 2.50.

En cualquier nivel de producción q_1 menor a 140, la figura 2.50 muestra que el costo marginal es menor al ingreso marginal. La empresa ganaría más dinero al producir más unidades, de modo que la producción debe aumentarse (hacia el nivel de producción de 140). En cualquier nivel de producción q_2 mayor a 140, el costo marginal es mayor que el ingreso marginal. La compañía pierde dinero si produjera más unidades (y gana más dinero si produce menos unidades). La producción debe ajustarse a la baja, presionando nuevamente la producción hacia $q = 140$.

¿Qué pasa con el ingreso marginal y el costo marginal en $q = 140$? Puesto que $CM < IM$ a la izquierda de 140 y $CM > IM$ a la derecha de 140, esperamos que $CM = IM$ en $q = 140$. En este ejemplo, la ganancia se maximiza en el punto donde las pendientes de las curvas de costo e ingreso son iguales, esto es, donde

$$\text{Costo marginal} = \text{ingreso marginal}$$

La sección 4.3 contiene un análisis más detallado de cómo se maximiza la ganancia.

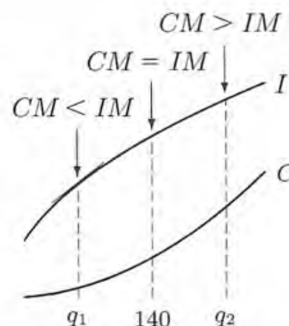


Figura 2.50. Ejemplo 5: La ganancia máxima se presenta donde $CM = IM$.

Problemas para la sección 2.5

1. En la producción de 1,000 artículos el costo total es \$5,000 y el costo marginal es \$25. Calcule los costos de producir 1,001 artículos, 999 artículos y 1,100 artículos.
2. En la figura 2.51, calcule el costo marginal cuando el nivel de producción es de 10,000 unidades y dé una interpretación.
3. $C(q)$ es la función que representa el costo total de producir q artículos. Entonces $C'(q)$ indica el costo marginal en dólares por unidad. Suponga que $C(15) = 2{,}300$ y $C'(15) = 108$. Calcule el costo de producir: **(a)** 16 artículos **(b)** 14 artículos.
4. Con base en la figura 2.52, calcule el ingreso marginal cuando el nivel de producción es de 600 unidades y dé una interpretación.

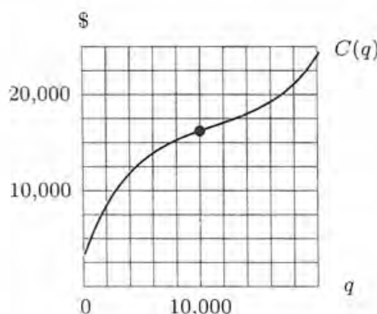


Figura 2.51.

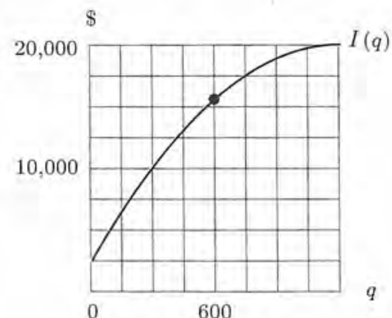


Figura 2.52.

5. En la figura 2.53, ¿el costo marginal es mayor en $q = 5$, o en $q = 30$? ¿En $q = 20$, o en $q = 40$? Explique.

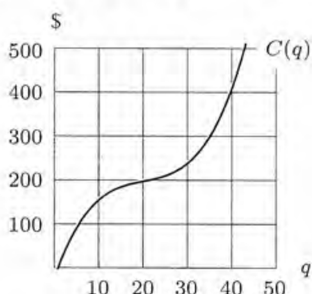


Figura 2.53.

6. Las funciones de costo e ingreso de una compañía de camiones de alquiler se muestran en la figura 2.54. ¿La compañía debe añadir el camión número 50? ¿Añadir el camión número 90? Explique sus respuestas empleando el ingreso y el costo marginales.

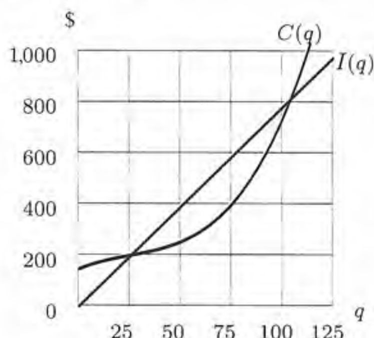


Figura 2.54.

7. Con base en las gráficas de costo e ingreso de la figura 2.55, trace una gráfica de las siguientes funciones. Marque los puntos q_1 y q_2.

(a) Ganancia total (b) Costo marginal
(c) Ingreso marginal

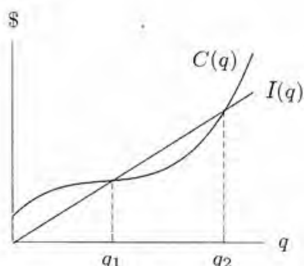


Figura 2.55.

8. El costo de reciclar q toneladas de papel se muestra en la siguiente tabla. Calcule el costo marginal en $q = 2{,}000$. Indique las unidades e interprete su respuesta en términos del costo. ¿Aproximadamente en qué nivel de producción parece ser mínimo el costo marginal?

q (toneladas)	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000	3,500
$C(q)$ (dólares)	2,500	3,200	3,640	3,825	3,900	4,400

9. Sea $C(q)$ la función que representa el costo total de producir una cantidad q de cierto producto (véase la figura 2.56).

(a) ¿Cuál es el significado de $C(0)$?
(b) Describa verbalmente cómo cambia el costo marginal a medida que aumenta la cantidad producida.
(c) Explique la concavidad de la gráfica (en términos económicos).
(d) Explique la importancia económica (en términos de costo marginal) del punto en el que cambia la concavidad.
(e) ¿Usted espera que la gráfica de $C(q)$ sea parecida a ésta para todo tipo de artículos?

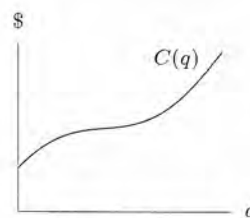


Figura 2.56.

10. La tabla siguiente da el costo y el ingreso, en dólares, para diferentes niveles de producción, q.

(a) ¿Aproximadamente en qué nivel de producción se maximizan las ganancias?
(b) ¿Qué precio se cobra por cada unidad de este producto?
(c) ¿Cuáles son los costos fijos de producción?

q	0	100	200	300	400	500
$I(q)$	0	500	1,000	1,500	2,000	2,500
$C(q)$	700	900	1,000	1,100	1,300	1,900

11. La figura 2.57 muestra las funciones de costo y de ingreso. ¿Aproximadamente en qué cantidad se maximiza la ganancia?

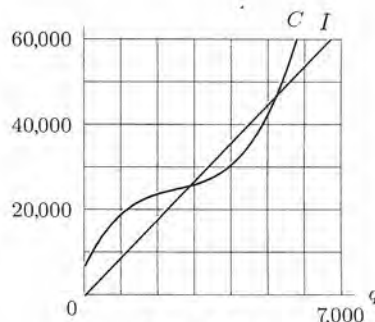


Figura 2.57.

12. La figura 2.57 muestra las funciones de costo e ingreso.

(a) A un nivel de producción de $q = 3{,}000$, ¿cuál es mayor, el costo marginal o el ingreso marginal? Explique lo que esto indica acerca de si la empresa debe aumentar o disminuir su producción.
(b) Conteste las mismas preguntas para $q = 5{,}000$.

13. Sea $C(q)$ la función que representa el costo; $I(q)$, el ingreso, y $\pi(q)$, la ganancia total (en dólares) de producir q unidades.
   (a) Si $C'(50) = 75$ e $I'(50) = 84$, ¿aproximadamente qué ganancia se obtiene por el artículo 51?
   (b) Si $C'(90) = 71$ e $I'(90) = 68$, ¿aproximadamente qué ganancia se obtiene para el artículo 91?
   (c) Si $\pi(q)$ es un máximo cuando $q = 78$, ¿cómo cree usted que se comparan $C'(78)$ e $I'(78)$? Explique.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

- **Razón de cambio**
  Promedio, instantánea.
- **Función de derivada**
  Cociente de diferencia.
- **Cálculo de derivadas**
  Calcular derivadas a partir de una gráfica, tabla de valores o fórmula.
- **Interpretación de derivadas**
  Razón de cambio, pendiente, uso de unidades, velocidad instantánea.
- **Marginalidad**
  Costo marginal e ingreso marginal.
- **Segunda derivada**
  Concavidad.
- **Derivadas y gráficas**
  Comprender la relación entre el signo de f' y el carácter creciente o decreciente de f. Trazo de una gráfica de f' a partir de la gráfica de f. Análisis marginal.

PROBLEMAS DE REPASO

1. Para $-3 \leq x \leq 7$, utilice una calculadora o una computadora para trazar una gráfica de

$$f(x) = (x^3 - 6x^2 + 8x)(2 - 3^x).$$

   (a) ¿Cuántos ceros tiene f en este intervalo?
   (b) ¿f es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿En $x = 2$? ¿En $x = 4$?
   (c) ¿En qué intervalo es mayor la razón promedio de cambio de f: $-1 \leq x \leq 0$ o $2 \leq x \leq 3$?
   (d) ¿Es mayor la razón de cambio instantánea de f en $x = 0$, o en $x = 2$?

2. (a) La función f se muestra en la figura 2.58. ¿En cuál de los puntos señalados $f'(x)$ es positiva? ¿Negativa? ¿Cero?
   (b) ¿En cuál de los puntos marcados es mayor f'? ¿En cuál de los puntos marcados es más negativa f'?

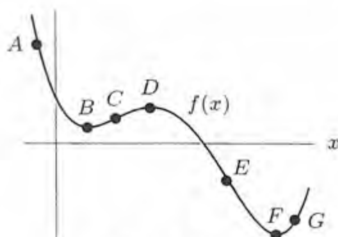


Figura 2.58.

3. La figura 2.59 muestra la gráfica de $f(x)$. Trace rectas tangentes a la gráfica en $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$. Calcule $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$ y $f'(2)$.

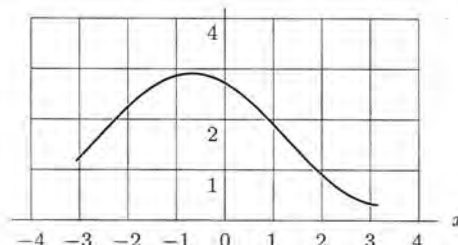


Figura 2.59.

4. La siguiente tabla muestra los valores de $f(t)$.
   (a) ¿Esta función muestra que tiene una primera derivada positiva, o negativa? ¿Una segunda derivada? Explique.
   (b) Evalúe $f'(2)$ y $f'(8)$.

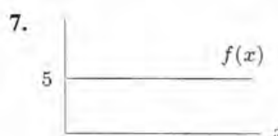
t	0	2	4	6	8	10
$f(t)$	150	145	137	122	98	56

5. Para la función $f(x) = 3^x$, calcule $f'(1)$. A partir de la gráfica de $f(x)$, ¿esperaría usted que su evaluación fuera mayor o menor que el valor verdadero de $f'(1)$?

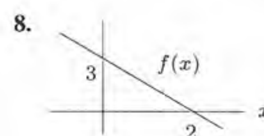
6. Dibuje una gráfica de una función f de tal forma que $f(2) = 5$, $f'(2) = 1/2$, y $f''(2) > 0$.

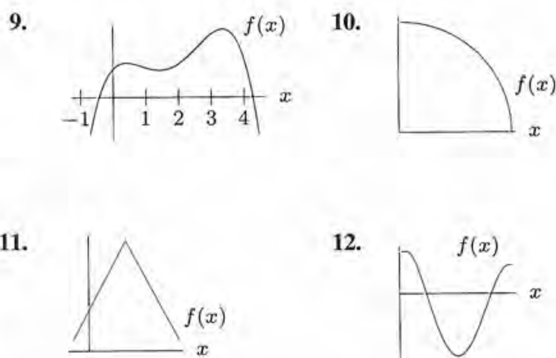
Grafique las derivadas de las funciones que se muestran en los problemas del 7 al 12. Asegúrese de que sus gráficas tengan las principales características de las funciones originales.

7.



8.





13. En una función $f(x)$ sabemos que $f(20) = 68$ y $f'(20) = -3$. Calcule $f(21)$, $f(19)$ y $f(25)$.

14. El costo, $C = f(w)$, en dólares, de compra de un producto químico es una función del peso comprado, w, en libras.

(a) En el enunciado $f(12) = 5$, ¿en qué unidades se mide el 12? ¿Cuáles son las unidades del 5? Explique qué nos dice esto sobre el costo de compra del producto químico.

(b) ¿Considera que la derivada f' es positiva o negativa? ¿Por qué?

(c) En el enunciado $f'(12) = 0.4$, ¿en qué unidades se mide el 12? ¿Cuáles son las unidades del 0.4? Explique qué nos indica esto sobre el costo de compra del producto químico.

15. El porcentaje, P, de hogares en Estados Unidos que tienen una computadora personal es una función del número de años, t, desde 1982 (cuando el porcentaje era esencialmente igual a cero), de forma que $P = f(t)$. Interprete los enunciados $f(12) = 37$ y $f'(12) = 2$.

16. La tabla 2.10 muestra la producción mundial de oro,[12] $G = f(t)$, como una función del año, t.

(a) ¿ $f'(t)$ parece ser positiva o negativa? ¿Qué quiere decir esto en términos de la producción de oro?

(b) ¿En qué intervalo de tiempo parece que $f'(t)$ es máxima?

(c) Calcule $f'(1999)$. Indique las unidades y explique su respuesta en términos de la producción de oro.

(d) Utilice el valor calculado de $f'(1999)$ para evaluar $f(2000)$ y $f(2005)$, y explique sus respuestas.

Tabla 2.10 *Producción mundial de oro*

t (año)	1987	1990	1993	1996	1999
G (millones de onzas troy)	53	70	73	74	81

17. (a) Grafique una función cuya primera y segunda derivadas sean positivas en todos los puntos.

(b) Grafique una función cuya segunda derivada sea en todos los puntos negativa, pero cuya primera derivada sea positiva en todos los puntos.

(c) Grafique una función cuya segunda derivada sea en todos los puntos positiva, pero cuya primera derivada sea negativa en todos los puntos.

(d) Grafique una función cuya primera y segunda derivadas sean negativas en todos los puntos.

18. "Ganar la guerra a la pobreza" se ha descrito cínicamente como la disminución de la razón a la cual la gente cae por debajo de la línea de pobreza. Suponiendo que esto esté pasando:

(a) Trace una gráfica del número total de personas que viven en la pobreza respecto al tiempo.

(b) Si N es el número de personas debajo de la línea de pobreza en el tiempo t, ¿cuáles son los signos de dN/dt y d^2N/dt^2? Explique.

19. Suponga que $f(x)$ es una función con $f(20) = 345$ y $f'(20) = 6$. Calcule $f(22)$.

20. Se pidió a los estudiantes que evaluaran $f'(4)$ a partir de la siguiente tabla, que muestra los valores de la función f:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4.2	4.1	4.2	4.5	5.0	5.7

- El estudiante A calcula la derivada de tal forma que
$$f'(4) \approx \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 0.5.$$
- El estudiante B calcula la derivada de manera que
$$f'(4) \approx \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 0.3.$$
- El estudiante C sugiere que debe dividirse la diferencia y calcular el promedio de estos dos resultados, esto es, $f'(4) \approx \frac{1}{2}(0.5 + 0.3) = 0.4$.

(a) Dibuje una gráfica de f e indique cómo están representadas estas evaluaciones en la gráfica.

(b) Explique cuál respuesta parece ser la mejor.

21. Utilice la figura 2.60 para llenar los espacios en blanco de las siguientes expresiones sobre la función f en el punto A.

(a) $f(__) = __$ **(b)** $f'(__) = __$

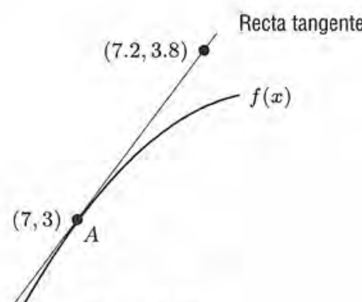


Figura 2.60.

[12]The Worldwatch Institute, *Vital Signs 2001*, W. W. Norton, Nueva York, 2001, p. 150.

22. La figura 2.61 muestra la longitud, L (en cm), de un esturión (un pez) como una función de tiempo, t, en años.[13] Calcule $f'(10)$. Indique las unidades e interprete su respuesta.

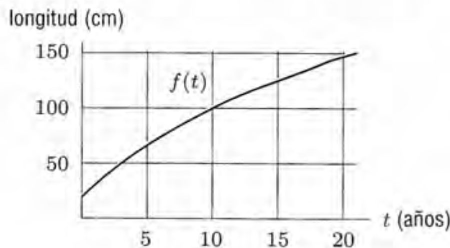


Figura 2.61.

23. Si t indica los años desde 1980, la población de México (en millones) estaba dada por $P(t) = 68.4(1.026)^t$. Encuentre la tasa de natalidad, en personas por año, en 1986.

24. Las funciones de ingreso y de costos de una compañía se muestran en la figura 2.62.
   (a) Evalúe el costo marginal en $q = 400$.
   (b) ¿La compañía debería producir el artículo número 500? ¿Por qué?
   (c) Evalúe la cantidad que maximiza las ganancias.

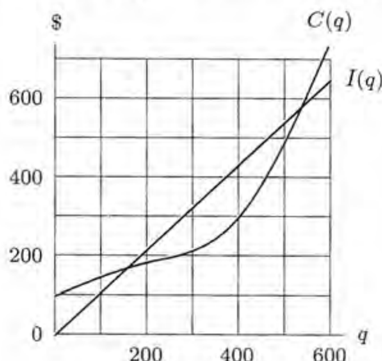


Figura 2.62.

25. Para estudiar el flujo de tránsito una ciudad instala un dispositivo que registra $C(t)$, el número total de automóviles que han pasado t horas después de las 4:00 a. m. La gráfica de $C(t)$ está en la figura 2.63.
   (a) ¿Cuándo es mayor el flujo de tránsito?
   (b) Calcule $C'(2)$.
   (c) ¿Qué significa $C'(2)$ en términos prácticos?

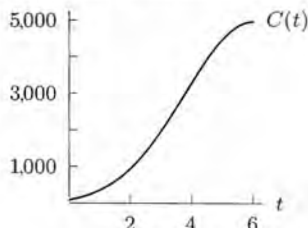


Figura 2.63.

26. Sea $C(q)$ la función que representa el costo, e $I(q)$ la función que representa el ingreso (en dólares) por producir q unidades.
   (a) Si $C(50) = 4{,}300$ y $C'(50) = 24$, calcule $C(52)$.
   (b) Si $C'(50) = 24$ e $I'(50) = 35$, ¿aproximadamente cuál es la ganancia que se obtiene por la unidad número 51?
   (c) Si $C'(100) = 38$ e $I'(100) = 35$, ¿ la compañía debe producir la unidad número 101? ¿Por qué sí, o por qué no?

27. Acaban de sacar del horno un camote y lo dejan enfriar antes de comérselo. La temperatura, T, del camote (medida en grados Fahrenheit) es una función del tiempo, t (medido en minutos), que éste ha estado fuera del horno. Por tanto, tenemos $T = f(t)$.
   (a) ¿$f'(t)$ es positiva o negativa? ¿Por qué?
   (b) ¿Cuáles son las unidades de $f'(t)$?

28. Cada una de las gráficas en la figura 2.64 muestra la posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x como una función del tiempo, $0 \le t \le 5$. Las escalas verticales de las gráficas son las mismas. Durante este intervalo de tiempo, ¿qué partícula tiene
   (a) una velocidad constante?
   (b) la mayor velocidad inicial?
   (c) la mayor velocidad promedio?
   (d) una velocidad promedio igual a cero?
   (e) una aceleración igual a cero?
   (f) una aceleración positiva en todo el trayecto?

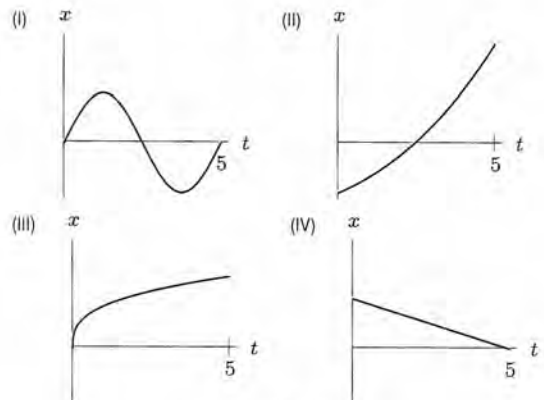


Figura 2.64.

29. La cantidad vendida, q, de cierto producto es una función del precio, p, por lo que $q = f(p)$. Interprete cada una de los siguientes enunciados en términos de la demanda del producto:
   (a) $f(15) = 200$ (b) $f'(5) = -25$.

[13]Datos de Von Bertalanffy, L., *General System Theory*, Braziller, Nueva York, 1968, p. 177.

30. Una persona con cierta enfermedad del hígado presenta al inicio concentraciones cada vez mayores de ciertas enzimas (llamadas SGOT y SGPT) en la sangre. A medida que avanza la enfermedad, la concentración de estas enzimas disminuye, primero al nivel anterior a la enfermedad y finalmente a cero (cuando casi todas las células del hígado han muerto). El monitoreo de los niveles de estas enzimas permite a los doctores llevar el seguimiento del progreso de un paciente con esta enfermedad. Si $C = f(t)$ es la concentración de las enzimas en la sangre como una función del tiempo.

(a) Trace una posible gráfica de $C = f(t)$.
(b) Señale en la gráfica los intervalos donde $f' > 0$, y donde $f' < 0$
(c) ¿Qué representa $f'(t)$ en términos prácticos?

31. Con la siguiente información sobre una función, f, dibuje la gráfica.

- $f(x) = 0$ en $x = -5$, $x = 0$ y $x = 5$
- $f(x) \to \infty$ cuando $x \to -\infty$
- $f(x) \to -3$ cuando $x \to \infty$
- $f'(x) = 0$ en $x = -3$, $x = 2.5$ y $x = 7$

PROYECTOS

1. Estimación de la temperatura de un camote

Suponga que introduce un camote en un horno caliente, a una temperatura constante de 200 °C. A medida que el camote absorbe el calor del horno su temperatura se eleva.[14]

(a) Trace una posible gráfica de la temperatura T del camote respecto al tiempo t (en minutos) desde que puso el camote en el horno. Explique las características más relevantes de la gráfica y, en particular, explique su concavidad.
(b) Suponga que en $t = 30$ la temperatura T del camote es de 120 grados y está aumentando a una razón (instantánea) de 2°/minuto. Con esta información, y por lo que sabe acerca de la forma de la gráfica de T, estime la temperatura en el tiempo $t = 40$.
(c) Además, suponga que le indican que en $t = 60$ la temperatura del camote es de 165°. ¿Puede mejorar su estimación de la temperatura en $t = 40$?
(d) Considerando todos los datos dados hasta aquí, estime el tiempo al cual la temperatura del camote será de 150°.

2. Temperatura e iluminación

Solo en la oscuridad de su cuarto y sin calefacción, usted enciende una vela en vez de quejarse de la oscuridad. Deprimido por la situación, se aleja de la vela, suspirando. La temperatura (°F) y la iluminación (en % de una candela*) disminuyen a medida que su distancia (en pies) desde la vela aumenta. De hecho, tiene dos tablas que muestran esta información.

Distancia (pies)	Temperatura (° F)
0	55
1	54.5
2	53.5
3	52
4	50
5	47
6	43.5

Distancia (pies)	Iluminación (%)
0	100
1	85
2	75
3	67
4	60
5	56
6	53

Tiene frío cuando la temperatura es menor a 40°. Está a oscuras cuando la iluminación es a lo sumo el 50% de una candela.

(a) En las figuras 2.63 y 2.64 se ilustran dos gráficas. Una es la temperatura como función de la distancia, y la otra es de la iluminación como función de la distancia. ¿Cuál es cuál? Explique.

[14]Taylor, Peter D., *Calculus: The Análisis of Functions*, Wall & Emerson, Inc., Toronto, 1992.

*N. del E. Unidad fotométrica internacional, basada en la radiación de un cuerpo negro a la temperatura de solidificación del platino. Dicha radiación por centímetro cuadrado equivale a 60 candelas.

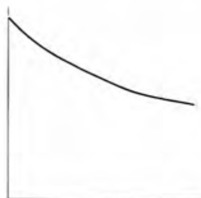


Figura 2.65.

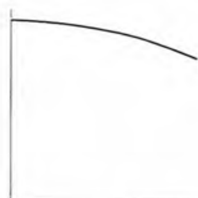


Figura 2.66.

(b) ¿Cuál es la razón promedio de cambio a la cual cambia la temperatura cuando la iluminación baja de 75 a 56 por ciento?

(c) Aún puede ver la hora en su reloj cuando la iluminación es de aproximadamente 65%. ¿Podría ver la hora en su reloj a 3.5 pies de distancia de la vela? Explique.

(d) Suponga que sabe que a seis pies la razón de cambio instantánea de la temperatura es de -4.5 °F/pies, y la razón de cambio instantánea de la iluminación es -3% candela/pies. Calcule la temperatura e iluminación a una distancia a siete pies.

(e) ¿Está en la oscuridad antes de sentir frío, o viceversa?

ENFOQUE TEÓRICO

LÍMITES, CONTINUIDAD Y LA DEFINICIÓN DE LA DERIVADA

Sorprendentemente, es muy difícil definir con precisión la velocidad en un solo instante en el tiempo. Considere la expresión "En el instante en que cruzó la línea de meta, el caballo corría a 42 millas por hora". ¿Cómo puede justificarse esa afirmación? Una fotografía tomada en dicho instante muestra al caballo inmóvil, lo cual no ayuda para nada. Es una paradoja tratar de cuantificar la propiedad del movimiento en un instante específico en el tiempo, ya que al enfocarnos en un solo instante, ¡detenemos la acción!

Una dificultad semejante surge siempre que intentamos medir la razón de cambio de cualquier cosa, por ejemplo, el petróleo que se fuga de un buque-tanque dañado. El enunciado "una hora después que se rompió el casco del barco, el petróleo se fugaba a razón de 200 barriles por segundo" parece que no tiene sentido. Podríamos argumentar que en cualquier instante dado no se fuga *nada* de petróleo.

Los problemas de movimiento fueron la preocupación central de Zenón y otros filósofos a principios del siglo v a. C. El método que aplicamos aquí, hecho famoso por el cálculo de Newton, consiste en dejar de buscar una noción simple de velocidad en un instante y, en lugar de ello, ver la velocidad en intervalos pequeños que contienen el instante. Este método evita los problemas filosóficos antes mencionados, pero trae consigo otros nuevos.

Definición de la derivada usando razones promedio

En la página 96 de la sección 2.1 definimos la derivada como la razón de cambio instantánea de una función. Podemos estimar una derivada al calcular promedios de las razones de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Utilizamos esta idea para dar una definición simbólica de la derivada. Sea h la longitud del intervalo, entonces tenemos

$$\text{Razón promedio de cambio entre } x \text{ y } x+h = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Para encontrar la derivada, o la razón de cambio instantánea en el punto x, uti zamos intervalos cada vez menores. Para hallar exactamente la derivada, tomamos el límite a medida que h, la longitud del intervalo, se acerca a cero, entonces decimos que

$$\text{Derivada} = \text{Límite, a medida que } h \text{ se aproxima a cero, de } \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Finalmente, en vez de escribir la frase "el límite, a medida que h se aproxima a 0", usamos la notación $\lim_{h\to 0}$. Esto lleva a la siguiente definición simbólica:

> Para cualquier función f, definimos la **función derivada**, f', por
>
> $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
>
> siempre que exista el límite. Se dice que la función f es **derivable o diferenciable** en cualquier punto x en el que está definida la función derivada.

Observe que el problema inicial de calcular la velocidad en un punto dado ha sido remplazado por el argumento de que las razones promedio de cambio se aproximan a cierto número a medida que se reduce el tamaño de los intervalos. En cierto sentido, hemos cambiado una pregunta sumamente difícil por otra, ya que aún no sabemos con certeza a qué número las velocidades promedio se aproximan.

Idea del límite

Utilizamos el límite para definir la derivada. Ahora analizaremos un poco más la idea del límite de una función en un punto c. Siempre que el límite exista:

> Escribimos $\lim_{x \to c} f(x)$ para representar el número L al cual se aproxima $f(x)$ a medida que x se aproxima a c.

Ejemplo 1 Investigue $\lim_{x \to 2} x^2$.

Solución Observe que podemos hacer x^2 tan cercana a 4 como queramos si tomamos a x lo suficientemente cerca de 2. (En la tabla 2.11 observe los valores de 1.9^2, 1.99^2, 1.999^2 y 2.1^2, 2.01^2, 2.001^2, los cuales parecen aproximarse a 4.) Escribimos

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4,$$

lo cual se lee "el límite de x^2 a medida que x se aproxima a 2, es 4". Observe que el límite no pregunta qué sucede en $x = 2$, por lo que no es suficiente sustituir 2 para encontrar la respuesta. El límite describe el comportamiento de una función *cerca* de un punto, no *en* un punto.

Tabla 2.11 *Valores de x^2 cerca de $x = 2$*

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
x^2	3.61	3.96	3.996	4.004	4.04	4.41

Ejemplo 2 Utilice una gráfica para calcular $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x}$.

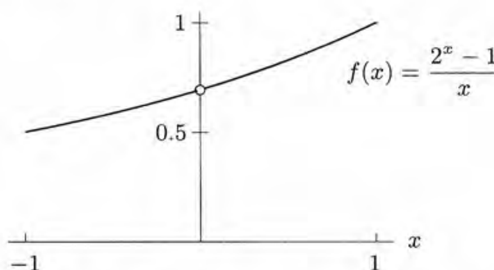


Figura 2.67. Encuentre el límite cuando $x \to 0$ de $\frac{2^x - 1}{x}$.

Solución Observe que la expresión $\frac{2^x - 1}{x}$ no está definida en $x = 0$. Para saber qué le ocurre a esta expresión a medida que x se aproxima a 0, veamos la gráfica de $f(x) = \frac{2^x - 1}{x}$. La figura 2.67 muestra que a medida que x se acerca a 0 por ambos lados, el valor de $\frac{2^x - 1}{x}$ parece aproximarse a 0.7. Si hacemos un acercamiento de la gráfica cerca de $x = 0$, podemos calcular el límite con mayor precisión, y nos da

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} \approx 0.693.$$

Ejemplo 3 Calcule numéricamente $\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h}$.

Solución El límite es el valor al cual se aproxima esta expresión cuando h se aproxima a 0. Los valores en la tabla 2.12 se aproximan a 6 a medida que $h \to 0$. Por tanto, es razonable decir que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h} = 6.$$

Sin embargo, al ver la tabla, no podemos estar seguros de que el límite sea *exactamente* 6. Para calcular con precisión el límite se requiere del álgebra.

Tabla 2.12 *Valores de* $((3+h)^2-9)/h$

h	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$((3+h)^2-9)/h$	5.9	5.99	5.999	6.001	6.01	6.1

Ejemplo 4 Utilice el álgebra para hallar $\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h}$.

Solución Al desarrollar el numerador, tenemos que

$$\frac{(3+h)^2-9}{h} = \frac{9+6h+h^2-9}{h} = \frac{6h+h^2}{h}.$$

Puesto que tomar el límite cuando $h \to 0$ significa considerar valores de h cercanos, pero no iguales, a 0, podemos cancelar el factor común h, lo que da como resultado

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (6+h).$$

A medida que h se aproxima a 0, los valores de $(6+h)$ se aproximan a 6, de modo que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0} (6+h) = 6.$$

Continuidad

En términos generales, se dice que una función es *continua* en un intervalo si su gráfica no tiene interrupciones, saltos o huecos en ese intervalo. La gráfica de una función continua puede trazarse sin despegar el lápiz del papel.

Ejemplo: La función $f(x) = 3x^2 - x^2 + 2x + 1$ es continua en cualquier intervalo (véase la figura 2.68).

Ejemplo: La función $f(x) = 1/x$ no está definida en $x = 0$. Ésta es continua en cualquier intervalo que no contenga el origen (véase la figura 2.69).

Ejemplo: Supongamos que $p(x)$ es el precio de enviar una carta por correo de primera clase, la cual pesa x onzas. El costo es de 34¢ por una onza o menos, de 57¢ entre la primera y la segunda onzas, y así sucesivamente. Por tanto, la gráfica (en la figura 2.70) es una serie de escalones. Esta función no es continua en intervalos como (0, 2) porque la gráfica tiene un salto en $x = 1$.

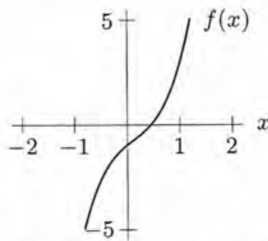


Figura 2.68. La gráfica de $f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 1$.

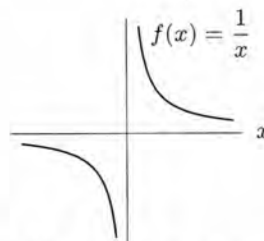


Figura 2.69. La gráfica de $f(x) = 1/x$: no está definida en 0.

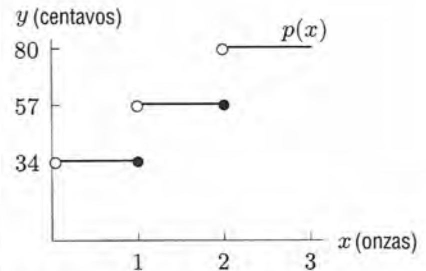


Figura 2.70. Costo de enviar una carta.

¿Qué significa numéricamente la continuidad?

La continuidad es importante en el trabajo práctico porque significa que errores pequeños en la variable independiente llevan a errores pequeños en el valor de la función.

Ejemplo: Supongamos que $f(x) = x^2$ y que deseamos calcular $f(\pi)$. Saber que f es continua nos indica que al tomar $x = 3.14$ tendremos una buena aproximación de $f(\pi)$ y que podemos obtener una mejor aproximación a $f(\pi)$ si usamos más decimales de π.

Ejemplo: Si $p(x)$ es el costo de enviar una carta que pesa x onzas, entonces $p(0.99) = p(1) = 34$ centavos, mientras que $p(1.01) = 57$¢, esto se debe a que cuando el peso es mayor a una onza, el precio salta hasta 57 centavos. Por consiguiente, una diferencia pequeña en el peso de una carta puede llevar a una diferencia importante en el costo de envío. Por tanto, p no es continua en $x = 1$.

Definición de continuidad

Ahora definiremos la continuidad usando límites. La idea de continuidad excluye interrupciones, saltos o huecos al demandar que el comportamiento de una función *cerca* de un punto sea consistente con su comportamiento *en* el punto.

> La función f es **continua** en $x = c$ si f está definida en $x = c$ y
>
> $$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$
>
> La función es **continua en un intervalo** (a, b) si ésta es continua en todos los puntos del intervalo.

¿Cuáles funciones son continuas?

Requerir que una función sea continua en un intervalo no es pedir demasiado, ya que cualquier función cuya gráfica sea una curva ininterrumpida sobre el intervalo es continua. Por ejemplo, las funciones exponenciales, los polinomios y el seno y el coseno son continuos en todo intervalo. Las funciones creadas al sumar, multiplicar, o componer funciones continuas también son continuas.

Uso de la definición para calcular derivadas

Al estimar la derivada de la función $f(x) = x^2$ en varios puntos, conjeturamos en el ejemplo 5 de la sección 2.2 que la derivada de x^2 es $f'(x) = 2x$. Para demostrar que esta fórmula es correcta, tenemos que emplear la definición simbólica de la derivada, la cual se encuentra en la página 129.

Al evaluar la expresión

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

primero simplificamos el cociente de diferencias y después tomamos el límite a medida que h se aproxima a cero.

Ejemplo 5 Demuestre que la derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$.

Solución Usando la definición de la derivada con $f(x) = x^2$, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}. \end{aligned}$$

Para tomar el límite, veamos lo que pasa cuando h está cerca de 0, pero sin ser $h = 0$. Como $h \neq 0$ cancelamos el factor común de h, y tenemos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x,$$

porque a medida que h se aproxima a cero, $2x + h$ se acerca a $2x$. Entonces,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x.$$

Ejemplo 6 Demuestre que si $f(x) = 3x - 2$, entonces $f'(x) = 3$.

Solución Como la pendiente de la función lineal $f(x) = 3x - 2$ es 3 y la derivada es la pendiente, vemos que $f'(x) = 3$. También podemos usar la definición para obtener este resultado:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3(x+h) - 2) - (3x - 2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x + 3h - 2 - 3x + 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h}. \end{aligned}$$

Para hallar el límite, veamos lo que ocurre cuando h está cerca, pero no es igual, a 0. Al simplificar, tenemos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3.$$

Problemas de límites y la definición de la derivada

1. En la figura 2.71 indique las longitudes que representan las cantidades de los incisos del (a) al (e). (Seleccione cualquier a y suponga que $h > 0$.)

(a) $a + h$ **(b)** h **(c)** $f(a)$

(d) $f(a + h)$ **(e)** $f(a + h) - f(a)$

(f) Utilizando sus respuestas de los incisos de la (a) a la (e), muestre en qué forma puede representarse la cantidad $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ como la pendiente de una recta en la gráfica.

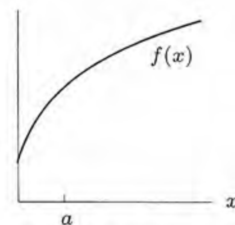


Figura 2.71.

2. En la figura 2.72 indique las longitudes que representan las cantidades de los incisos del (a) al (e). (Elija la a que convenga y suponga que $h > 0$.)
   (a) $a + h$ (b) h (c) $f(a)$
   (d) $f(a + h)$ (e) $f(a + h) - f(a)$
   (f) Utilizando sus respuestas a los incisos de la (a) a la (e), represente la cantidad $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ como la pendiente de una recta sobre la gráfica.

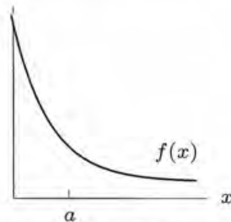


Figura 2.72.

Utilice una gráfica para calcular los límites de los problemas 3 y 4.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ (con x en radianes)

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 1}{x}$

Calcule los límites de los problemas del 5 al 8 sustituyendo valores cada vez más pequeños de h. Para las funciones trigonométricas, emplee radianes. Dé sus respuestas con una cifra decimal.

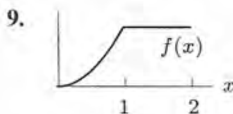
5. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^3 - 27}{h}$

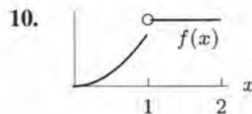
6. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{7^h - 1}{h}$

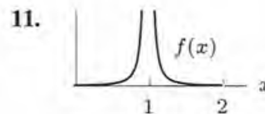
7. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{1+h} - e}{h}$

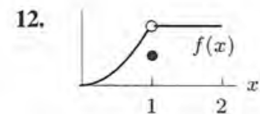
8. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h}$

En los problemas del 9 al 12, ¿la función $f(x)$ es continua en el intervalo $0 \leq x \leq 2$? Si no es así, ¿qué sucede en el intervalo $0 \leq x \leq 0.5$?

9.


10.


11.


12.


¿Son continuas las funciones de los problemas del 13 al 18, en los intervalos dados?

13. $f(x) = x + 2$ en $-3 \leq x \leq 3$
14. $f(x) = 2^x$ en $0 \leq x \leq 10$
15. $f(x) = x^2 + 2$ en $0 \leq x \leq 5$
16. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $2 \leq x \leq 3$
17. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $0 \leq x \leq 2$
18. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ en $0 \leq x \leq 2$

¿Cuáles de las funciones descritas en los problemas del 19 al 23 son continuas?

19. El número de personas de una población como función del tiempo.
20. El peso de un bebé como función del tiempo durante el segundo mes de vida.
21. El número de pares de pantalones como una función del número de yardas de tela de la cual están hechos. Para cada par se necesitan tres yardas.
22. La distancia que recorre un automóvil, que se detiene y avanza en el tráfico, como una función del tiempo.
23. Usted inicia un viaje en Carolina del Norte rumbo al oeste por la carretera interestatal 40 hacia California. Considere la función que da la hora local como función de la distancia recorrida desde su punto de partida.

Utilice la definición de la derivada para demostrar cómo se obtienen las fórmulas en los problemas del 24 al 29.

24. Si $f(x) = 5x$, entonces $f'(x) = 5$.
25. Si $f(x) = 3x - 2$, entonces $f'(x) = 3$.
26. Si $f(x) = x^2 + 4$, entonces $f'(x) = 2x$.
27. Si $f(x) = 3x^2$, entonces $f'(x) = 6x$.
28. Si $f(x) = 5x^2 + 1$, entonces $f'(x) = 10x$.
29. Si $f(x) = 2x^2 + x$, entonces $f'(x) = 4x + 1$.

Capítulo 3

MÉTODOS BREVES DE DERIVACIÓN

En este capítulo calculamos las derivadas de funciones dadas mediante fórmulas. Entre estas funciones están las potenciales, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y periódicas. Este capítulo también contiene reglas generales, tales como las reglas del producto, el cociente y la regla de la cadena, con las cuales es posible derivar las combinaciones de funciones.

3.1 FÓRMULAS DE DERIVACIÓN PARA POTENCIAS Y POLINOMIOS

La derivada de una función en un punto representa una pendiente y una razón de cambio. En el capítulo 2 aprendimos cómo calcular valores de la derivada de una función dada por medio de una gráfica o de una tabla. Ahora, aprenderemos cómo hallar una fórmula para la derivada de una función dada mediante una fórmula.

Derivada de una función constante

La gráfica de una función constante $f(x) = k$ es una recta horizontal, con una pendiente de 0 en todas sus partes. Por consiguiente, su derivada es 0 en todo punto (véase la figura 3.1).

Si $f(x) = k$, entonces $f'(x) = 0$.

Por ejemplo, $\dfrac{d}{dx}(5) = 0$.

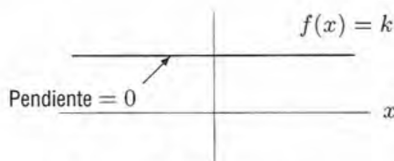


Figura 3.1. Una función constante.

Derivada de una función lineal

Ya sabemos que la pendiente de una recta es constante. Esto indica que la derivada de una función lineal es constante.

Si $f(x) = b + mx$, entonces $f'(x) = \text{pendiente} = m$.

Por ejemplo, $\dfrac{d}{dx}(5 - \dfrac{3}{2}x) = -\dfrac{3}{2}$.

Derivada de una constante por una función

La figura 3.2 muestra la gráfica de $y = f(x)$ y de tres múltiplos: $y = 3f(x)$, $y = \frac{1}{2}f(x)$ y $y = -2f(x)$. ¿Cuál es la relación entre las derivadas de estas funciones? Es decir, para un valor particular de x, ¿cómo están relacionadas las pendientes de estas gráficas?

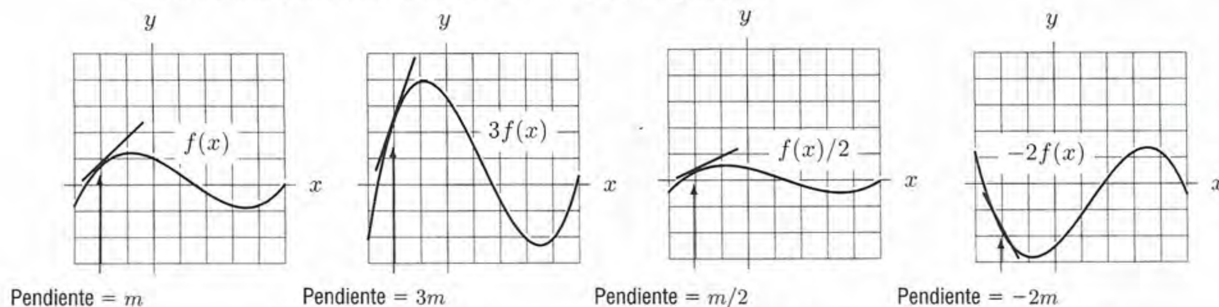


Figura 3.2. Una función y sus múltiplos: la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función.

Al multiplicar por una constante, la gráfica se expande o se contrae (y si la constante es negativa, la refleja sobre el eje x). Esto modifica la pendiente de la curva en cada punto. Si se ha expandido la gráfica, las "ordenadas de los puntos sobre la curva" se incrementan en el mismo factor, mientras que las "distancias en el eje de las x" permanecen igual. Por tanto las pendientes se incrementan en el mismo factor. Si la gráfica se ha contraído, todas las pendientes se reducen por el mismo factor. Si la gráfica se refleja alrededor del eje de las x, las pendientes tendrán los signos invertidos. Por tanto, si se multiplica una función por una constante, c, su derivada también se multiplica por la misma constante:

Derivada del producto por una constante

Si c es una constante,

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x).$$

Derivadas de sumas y diferencias

Los valores de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, y de su suma $f(x) + g(x)$ se muestran en la tabla 3.1.

Tabla 3.1 *Suma de funciones*

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(x) + g(x)$
0	100	0	100
1	110	0.2	110.2
2	130	0.4	130.4
3	160	0.6	160.6
4	200	0.8	200.8

Vemos que al sumar los incrementos de $f(x)$ y los incrementos de $g(x)$ se obtienen los incrementos de $f(x) + g(x)$. Por ejemplo, a medida que x aumenta de 0 a 1, $f(x)$ aumenta en 10 y $g(x)$ se incrementa 0.2, mientras que$f(x) + g(x)$ aumenta $110.2 - 100 = 10.2$. Del mismo modo, conforme x aumenta de 3 a 4, $f(x)$ se incrementa en 40 y $g(x)$ en 0.2, en tanto que$f(x) + g(x)$ aumenta en $200.8 - 160.6 = 40.2$.

A partir de este ejemplo vemos que la razón a la que aumenta $f(x) + g(x)$ es la suma de las razones con las que se incrementan $f(x)$ y $g(x)$. Un razonamiento semejante se aplica en la diferencia, $f(x) - g(x)$. En términos de derivadas:

Derivada de la suma y la diferencia

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$$

Potencias de x

Comencemos analizando$f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$. Al final de este capítulo, en la sección Enfoque teórico, demostramos que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \quad \text{y} \quad g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2.$$

Las figuras 3.3 y 3.4 muestran las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ junto con sus derivadas. Observe que $f'(x) = 2x$ tiene el comportamiento esperado. Ésta es negativa para $x < 0$ (cuando f es decreciente), cero para $x = 0$, y positiva para $x > 0$ (cuando f es creciente). De manera semejante, $g'(x) = 3x^2$ es cero cuando $x = 0$, pero es positiva en todos los demás puntos, puesto que g es creciente en todos los puntos. Estos ejemplos son casos especiales de la regla de las potencias.

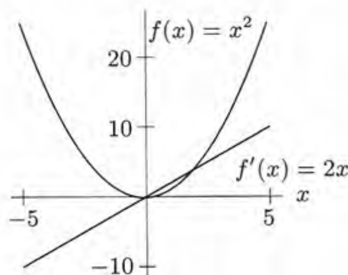


Figura 3.3. Gráficas de $f(x) = x^2$ y su derivada $f'(x) = 2x$.

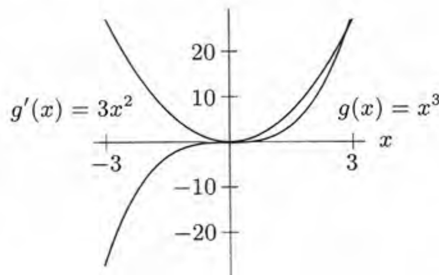


Figura 3.4. Gráficas de $g(x) = x^3$ y su derivada $g'(x) = 3x^2$.

La derivada de una potencia

Para cualquier número real constante, n,

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Ejemplo 1 Encuentre la derivada de **(a)** $h(x) = x^8$ **(b)** $P(t) = t^7$

Solución **(a)** $h'(x) = 8x^7$ **(b)** $P'(t) = 7t^6$.

Derivadas de polinomios

Usando las derivadas de potencias, del producto por una constante, y de sumas, podemos derivar cualquier polinomio.

Ejemplo 2 Derive **(a)** $A(t) = 3t^5$ **(b)** $r(p) = p^5 + p^3$ **(c)** $f(x) = 5x^2 - 7x^3$.

Solución **(a)** Usando la regla para el producto por una constante: $A'(t) = \frac{d}{dt}(3t^5) = 3\frac{d}{dt}(t^5) = 3 \cdot 5t^4 = 15t^4$.

(b) Usando la regla para la suma: $r'(p) = \frac{d}{dp}(p^5 + p^3) = \frac{d}{dp}(p^5) + \frac{d}{dp}(p^3) = 5p^4 + 3p^2$.

(c) Al aplicar ambas reglas a la vez:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(5x^2 - 7x^3) &= \frac{d}{dx}(5x^2) - \frac{d}{dx}(7x^3) && \text{Derivada de una diferencia}\\ &= 5\frac{d}{dx}(x^2) - 7\frac{d}{dx}(x^3) && \text{Derivada del producto por una constante}\\ &= 5(2x) - 7(3x^2) = 10x - 21x^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 3 Determine las derivadas de **(a)** $5x^2 + 3x + 2$ **(b)** $\sqrt{3}x^7 - \frac{x^5}{5} + \pi$.

Solución **(a)** $\frac{d}{dx}(5x^2 + 3x + 2) = 5\frac{d}{dx}(x^2) + 3\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2)$

$= 5 \cdot 2x + 3 \cdot 1 + 0$ (Como la derivada de una constante $\frac{d}{dx}(2)$, es cero)

$= 10x + 3.$

(b) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3}x^7 - \frac{x^5}{5} + \pi\right) = \sqrt{3}\frac{d}{dx}(x^7) - \frac{1}{5}\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(\pi)$

$= \sqrt{3} \cdot 7x^6 - \frac{1}{5} \cdot 5x^4 + 0$ (Considerando que π es una constante, $\frac{d}{dx}(\pi) = 0$.)

$= 7\sqrt{3}x^6 - x^4.$

También podemos emplear la regla de la derivada de una potencia para derivar potencias negativas y fraccionales.

Ejemplo 4 Utilice la regla de la derivada de una potencia para derivar **(a)** $\frac{1}{x^3}$ **(b)** $\sqrt{x}$ **(c)** $2t^{4.5}$.

Solución **(a)** Para $n = -3$: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-3}) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$

(b) Para $n = 1/2$: $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

(c) Para $n = 4.5$: $\frac{d}{dt}\left(2t^{4.5}\right) = 2\left(4.5t^{4.5-1}\right) = 9t^{3.5}.$

Uso de las fórmulas de derivadas

Como la pendiente de una recta tangente a una curva está dada por la derivada, podemos utilizar la derivada para hallar la ecuación de la recta tangente.

Ejemplo 5 Encuentre una ecuación para la recta tangente, en $x = 1$, a la gráfica de

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x + 7.$$

Bosqueje la gráfica de la curva y su recta tangente en un mismo sistema de coordenadas.

Solución Al derivar, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2(2x) - 5(1) + 0 = 3x^2 + 4x - 5,$$

por tanto, la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ es

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 3(1)^2 + 4(1) - 5 = 2.$$

Cuando $x = 1$, tenemos que $y = 1^3 + 2(1^2) - 5(1) + 7 = 5$, por lo que el punto $(1, 5)$ está sobre la recta tangente. Al emplear la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$ tenemos

$$y - 5 = 2(x - 1)$$
$$y = 3 + 2x.$$

La ecuación de la recta tangente es $y = 3 + 2x$. Véase la figura 3.5.

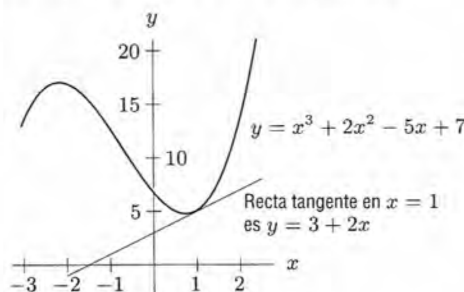


Figura 3.5. Encuentre la ecuación de esta recta tangente.

Ejemplo 6 Encuentre e interprete las segundas derivadas de **(a)** $f(x) = x^2$ **(b)** $g(x) = x^3$.

Solución **(a)** Al derivar $f(x) = x^2$ tenemos que $f'(x) = 2x$, por tanto, $f''(x) = \dfrac{d}{dx}(2x) = 2$. Puesto que f'' siempre es positiva, la gráfica de f es cóncava hacia arriba, como era de esperarse, ya que la parábola se abre hacia arriba (véase la figura 3.6).

(b) Al derivar a $g(x) = x^3$ tenemos que $g'(x) = 3x^2$, por lo que $g''(x) = \dfrac{d}{dx}(3x^2) = 3\dfrac{d}{dx}(x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$. Esto es positivo para $x > 0$ y negativo para $x < 0$, lo que significa que la gráfica de $g(x) = x^3$ es cóncava hacia arriba para $x > 0$ y cóncava hacia abajo para $x < 0$ (véase la figura 3.7).

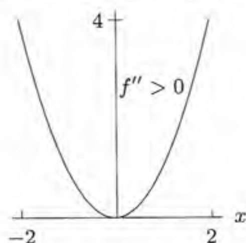


Figura 3.6. Gráfica de $f(x) = x^2$ con $f''(x) = 2$.

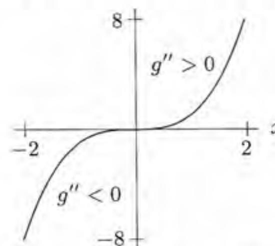


Figura 3.7. Gráfica de $g(x) = x^3$ con $g''(x) = 6x$.

Ejemplo 7 Determine la velocidad de un cuerpo en el tiempo t, si su posición, en metros, está dada como una función del tiempo t, en segundos, por

$$s = -4.9t^2 + 5t + 6.$$

Solución La velocidad, v, es la derivada de la posición

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(-4.9t^2 + 5t + 6) = -9.8t + 5 \text{ metros/segundo.}$$

Ejemplo 8 La figura 3.8 muestra la gráfica de un polinomio cúbico. Describa, gráfica y algebraicamente, el comportamiento de la derivada de este polinomio cúbico.

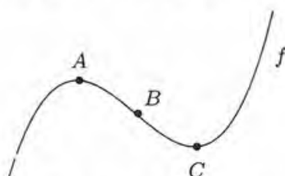


Figura 3.8. El polinomio cúbico del ejemplo 8.

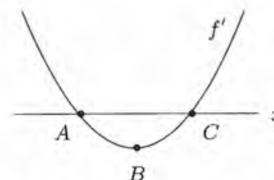


Figura 3.9. La derivada del polinomio cúbico del ejemplo 8.

Solución Enfoque gráfico: suponga que se recorre la curva de izquierda a derecha. A la izquierda de A, la pendiente es positiva; al inicio es muy pronunciada y decrece hasta que la curva alcanza al punto A, en donde la pendiente es 0. Entre A y C la pendiente es negativa. Entre A y B la pendiente es decreciente (se hace cada vez más negativa); en B es lo más negativa posible. Entre B y C la pendiente es negativa, pero creciente; en C la pendiente es cero. A la derecha de C la pendiente es positiva y creciente. La gráfica de la función derivada se muestra en la figura 3.9. Enfoque algebraico: f es un polinomio cúbico que tiende a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$, de ahí que

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

con $a > 0$. Por consiguiente,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$$

cuya gráfica es una parábola que se abre hacia arriba, como se muestra en la figura 3.9.

Problemas para la sección 3.1

En los problemas del 1 al 26, encuentre la derivada. Suponga que a, b, c y k son constantes.

1. $y = 5$

2. $y = 3x$

3. $y = 5x + 13$

4. $y = x^{12}$

5. $y = x^{-12}$

6. $y = x^{4/3}$

7. $y = 8t^3$

8. $y = 3t^4 - 2t^2$

9. $f(q) = q^3 + 10$

10. $y = x^2 + 5x + 9$

11. $y = 6x^3 + 4x^2 - 2x$

12. $y = 3x^2 + 7x - 9$

13. $y = 8t^3 - 4t^2 + 12t - 3$

14. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

15. $y = -3x^4 - 4x^3 - 6x + 2$

16. $y = 4.2q^2 - 0.5q + 11.27$

17. $y = z^2 + \dfrac{1}{2z}$

18. $y = 3t^5 - 5\sqrt{t} + \dfrac{7}{t}$

19. $y = 3t^2 + \dfrac{12}{\sqrt{t}} - \dfrac{1}{t^2}$

20. $f(x) = kx^2$

21. $y = ax^2 + bx + c$

22. $Q = aP^2 + bP^3$

23. $v = at^2 + \dfrac{b}{t^2}$

24. $P = a + b\sqrt{t}$

25. $V = \frac{4}{3}\pi r^2 b$

26. $w = 3ab^2 q$

27. Sea $f(x) = x^2 + 1$. Calcule las derivadas $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(-1)$. Compruebe sus respuestas gráficamente.

28. Sea $f(t) = t^2 - 4t + 5$.
- **(a)** Determine a $f'(t)$.
- **(b)** Encuentre a $f'(1)$ y $f'(2)$.
- **(c)** Utilice una gráfica de $f(t)$ para comprobar que sus respuestas del inciso (b) son acertadas. Explique.

29. Sea $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 11$. Calcule a $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-1)$.

30. Sea $f(x) = x^2 + 3x - 5$. Encuentre a $f'(0)$, $f'(3)$, $f'(-2)$.

31. **(a)** Utilice la gráfica de $P(q) = 6q - q^2$ para determinar si cada una de las siguientes derivadas es positiva, negativa o cero: $P'(1)$, $P'(3)$, $P'(4)$. Explique.
- **(b)** Determine $P'(q)$ y las tres derivadas del inciso (a).

32. **(a)** Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3$ en el punto en el cual $x = 2$.
- **(b)** Grafique la recta tangente y la función en un mismo sistema de coordenadas. Si utilizamos la recta tangente para calcular valores de la función, ¿los resultados serán por exceso o por defecto?

33. La altura de una duna de arena (en centímetros) se representa por $f(t) = 700 - 3t^2$, donde t se mide en años desde 1995. Determine $f(5)$ y $f'(5)$. Explique, con unidades, qué significa cada una en términos de la duna de arena.

34. Determine la razón de cambio de una población de tamaño $P(t) = t^3 + 4t + 1$ en el tiempo $t = 2$.

35. Si $f(t) = 2t^3 - 4t^2 + 3t - 1$, encuentre a $f'(t)$ y $f''(t)$.

36. Si $f(t) = t^4 - 3t^2 + 5t$, encuentre a $f'(t)$ y $f''(t)$.

37. Los mejillones cebra son moluscos de agua dulce que aparecieron por primera vez en el río San Lorenzo a principios de la década de 1980; se han propagado hasta los Grandes Lagos. Supongamos que t meses después de que aparecieron en una bahía pequeña, el número de mejillones cebra está dado por $Z(t) = 300t^2$. ¿Cuántos mejillones cebra hay en la bahía después de cuatro meses? ¿A qué razón está creciendo la población en ese momento? Indique las unidades en sus respuestas.

38. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en (1, 1), donde f está dada por $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 1$.

39. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(t) = 6t - t^2$ en $t = 4$. Dibuje la gráfica de $f(t)$ y la recta tangente en un mismo sistema de coordenadas.

40. Sea $f(x) = x^2 - 4x + 8$. ¿Para qué valores de x es $f'(x) = 0$?

41. El costo de producir q unidades es $C(q) = 1{,}000 + 2q^2$ dólares. Encuentre el costo marginal de producir la 25ava. unidad. Interprete su respuesta en términos del costo.

42. La curva de demanda de un producto está dada por $q = 300 - 3p$, donde p es el precio del producto y q es la cantidad que los consumidores comprarían a ese precio.
   (a) Escriba el ingreso como una función del precio.
   (b) Encuentre el ingreso marginal cuando el precio es de \$10, e interprete su respuesta en términos del ingreso.
   (c) ¿Para cuáles precios el ingreso marginal es positivo? ¿Para cuáles es negativo?

43. La cosecha, Y, de una huerta de manzanas (medida en bushels de manzanas por acre) es una función de la cantidad x de fertilizante en libras que se utiliza por acre. Suponga que

$$Y = f(x) = 320 + 140x - 10x^2.$$

   (a) ¿Cuál es la producción si se utilizan cinco libras de fertilizante por acre?
   (b) Encuentre $f'(5)$. Con su respuesta, indique las unidades e interprétela en términos de manzanas y de fertilizante.
   (c) Considerando su respuesta al inciso (b), ¿se debe utilizar más fertilizante, o menos? Explique.

44. La demanda de un producto está dada, para $p, q \geq 0$, por

$$p = f(q) = 50 - 0.03q^2.$$

   (a) Encuentre las *ordenadas y abscisas en el origen* de esta función, e interprételas en términos de la demanda de este producto.
   (b) Encuentre $f(20)$ e indique las unidades junto con su respuesta. Explique qué le dice esto en términos de la demanda.
   (c) Determine $f'(20)$ y responda indicando las unidades. Explique qué le dice esto en términos de la demanda.

45. El costo (en dólares) de producir q unidades está dado por $C(q) = 0.08q^3 + 75q + 1{,}000$.
   (a) Determine la función del costo marginal.
   (b) Encuentre $C(50)$ y $C'(50)$. Indique las unidades junto con sus respuestas y explique qué le indica esto sobre los costos de producción.

46. Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$. Encuentre $f'(x)$ y todos los valores de x en los cuales $f'(x) = 0$. Describa la relación entre los valores de x y la gráfica de $f(x)$.

47. La gráfica de $y = x^3 - 9x^2 - 16x + 1$ tiene en dos puntos una pendiente de 5. Encuentre las coordenadas de los puntos.

48. Si la curva de demanda es una recta, podemos escribir que $p = b + mq$, donde p es el precio del producto, q es la cantidad vendida a ese precio y b y m son constantes.
   (a) Escriba el ingreso como una función de la cantidad vendida.
   (b) Encuentre la función del ingreso marginal.

49. Se lanza una pelota desde la parte más alta del edificio Empire State. La altura, y, de la pelota sobre el suelo (en pies) está dada como función del tiempo, t, (en segundos) por

$$y = 1{,}250 - 16t^2.$$

   (a) Determine la velocidad de la pelota en el tiempo t. ¿Cuál es el signo de la velocidad? ¿Por qué esto era de esperarse?
   (b) ¿Cuándo toca la pelota el suelo y qué velocidad lleva en ese momento? Responda en pies por segundo y en millas por hora (1 pie/segundo = 15/22 millas por hora).

50. (a) Use la fórmula del área de un círculo de radio, r, $A = \pi r^2$, para determinar dA/dr.
   (b) El resultado del inciso (a) debería parecerle familiar. ¿Qué representa geométricamente dA/dr?
   (c) Utilice el cociente de diferencias para explicar la observación que realizó en el inciso (b).

3.2 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Función exponencial

¿Qué aspecto esperamos que tenga la gráfica de la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$? La gráfica de una función exponencial con $a > 1$ se muestra en la figura 3.10. La función aumenta lentamente para $x < 0$ y con más rapidez para $x > 0$, de modo que los valores de f' son menores para $x < 0$ y mayores para $x > 0$. Como la función es creciente para todos los valores de x, la gráfica de la derivada debe estar arriba del eje x. De hecho, la gráfica de f' se asemeja a la gráfica de f. A continuación veremos cómo esta observación se cumple para $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$.

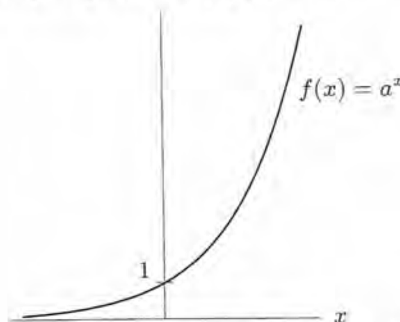


Figura 3.10. $f(x) = a^x$, con $a > 1$.

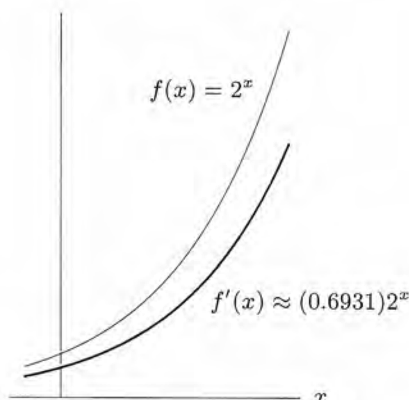


Figura 3.11. Gráfica de $f(x) = 2^x$ y su derivada.

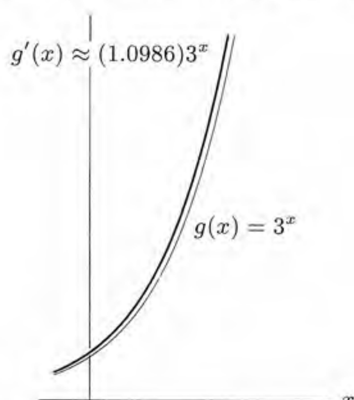


Figura 3.12. Gráfica de $g(x) = 3^x$ y su derivada.

Derivadas de 2^x y 3^x

En la página 97 calculamos la derivada de $f(x) = 2^x$ en $x = 0$:

$$f'(0) \approx 0.693.$$

Al calcular la derivada en otros valores de x, obtenemos la gráfica de la figura 3.11. Puesto que la gráfica de f' se parece a la gráfica de f, pero alargada verticalmente, podemos suponer que f' es un múltiplo de f. Puesto que $f'(0) \approx 0.693 = 0.693 \cdot 1 = 0.693\, f(0)$, el factor es aproximadamente de 0.693, lo cual sugiere que

$$\frac{d}{dx}(2^x) = f'(x) \approx (0.693)2^x$$

De forma similar, en la figura 3.12 la derivada de $g(x) = 3^x$ es un múltiplo de g, con un factor $g'(0) \approx 1.0986$. Por consiguiente,

$$\frac{d}{dx}(3^x) = g'(x) \approx (1.0986)3^x.$$

Derivada de a^x y el número e

El cálculo de la derivada de $f(x) = a^x$, para $a > 0$, es semejante al de 2^x y 3^x. Nuevamente, la derivada es proporcional a la función original. Cuando $a = 2$, la constante de proporcionalidad (0.6931) es menor que 1 y la derivada es menor que la función original. Cuando $a = 3$, la constante de proporcionalidad (1.0986) es mayor que 1, y la derivada es mayor que la función original. ¿Existe algún caso intermedio en el que la derivada y la función sean exactamente iguales? En otras palabras:

¿Hay algún valor de a que haga que $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x$?

La respuesta es afirmativa: el valor es $a \approx 2.718\ldots$, el número e que se presentó en el capítulo 1. Esto significa que la función e^x es su propia derivada:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.}$$

Resulta que las constantes que aparecen en las derivadas de 2^x y 3^x son logaritmos naturales. De hecho, como $0.6931 \approx \ln 2$ y $1.0986 \approx 3$, pensamos (correctamente) que

$$\frac{d}{dx}(2^x) = (\ln 2)2^x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(3^x) = (\ln 3)3^x.$$

Al final del capítulo, en la sección Enfoque teórico, demostramos que, en general:

La derivada de la exponencial

Para cualquier constante positiva a

$$\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x.$$

Puesto que ln a es una constante, la derivada de a^x es proporcional a a^x. Muchas cantidades tienen razones de cambio que son proporcionales a sí mismas, por ejemplo, el modelo de crecimiento poblacional más simple posee esta propiedad. El hecho de que la constante de proporcionalidad sea 1 cuando $a = e$ hace que e sea una base particularmente útil para las funciones exponenciales.

Ejemplo 1 Derive a $2 \cdot 3^x + 5e^x$.

Solución Tenemos que $\frac{d}{dx}(2 \cdot 3^x + 5e^x) = 2\frac{d}{dx}(3^x) + 5\frac{d}{dx}(e^x) = 2\ln 3 \cdot 3^x + 5e^x$.

Derivada de ln x

¿Cómo es la gráfica de la derivada de la función logarítmica $f(x) = \ln x$? La figura 3.13 muestra que ln x es creciente, por tanto, su derivada es positiva. La gráfica de $f(x) = \ln x$ es cóncava hacia abajo, por lo que la derivada es decreciente. Más aún, la pendiente de $f(x) = \ln x$ es muy grande cerca de $x = 0$ y muy pequeña para valores grandes de x, por consiguiente, la derivada tiende a $+\infty$ para las x cercanas a 0, y tiende a 0 para valores muy grandes de x, como en este caso. Véase la figura 3.14. De ahí resulta que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

En la sección Enfoque teórico, en la página 161, damos una justificación algebraica para esta regla.

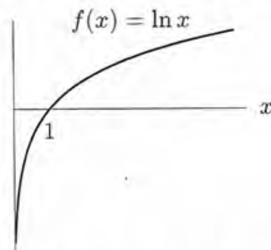


Figura 3.13. Gráfica de $f(x) = \ln x$.

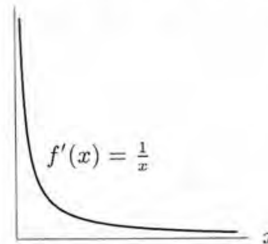


Figura 3.14. Gráfica de la derivada de $f(x) = \ln x$.

Ejemplo 2 Derive a $y = 5\ln t + 7e^t - 4t^2 + 12$.

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(5\ln t + 7e^t - 4t^2 + 12) &= 5\frac{d}{dt}(\ln t) + 7\frac{d}{dt}(e^t) - 4\frac{d}{dt}(t^2) + \frac{d}{dt}(12)\\ &= 5\left(\frac{1}{t}\right) + 7(e^t) - 4(2t) + 0\\ &= \frac{5}{t} + 7e^t - 8t.\end{aligned}$$

Uso de las fórmulas de derivadas

Ejemplo 3 En el capítulo 1 vimos que la población de México, P, se podía modelar por

$$P = 67.39(1.026)^t,$$

donde P son millones de habitantes y t son los años desde el inicio de 1980. ¿A qué razón crecía la población a principios de 1997? En su respuesta indique las unidades.

Solución La razón de crecimiento instantánea es la derivada, por tanto, queremos calcular a dP/dt cuando $t = 17$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(67.39(1.026)^t) &= 67.39(\ln 1.026)(1.026)^t \\ &= 67.39(0.02567)(1.026)^t \\ &= 1.730(1.026)^t.\end{aligned}$$

Al sustituir $t = 17$, obtenemos

$$1.730(1.026)^{17} = 2.676.$$

A principios de 1997 la población de México estaba creciendo a razón de aproximadamente 2.676 millones de habitantes al año.

Ejemplo 4 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \ln x$ en el punto donde $x = 2$. Trace una gráfica con $f(x)$ y la recta tangente en un mismo sistema de coordenadas.

Solución Ya que $f'(x) = 1/x$, la pendiente de la recta tangente en $x = 2$ es $f'(2) = 1/2 = 0.5$. Cuando $x = 2$, $y = \ln 2 = 0.693$, por lo que un punto sobre la recta tangente es (2, 0.693). Al sustituirlo en la ecuación de una recta obtenemos:

$$\begin{aligned} y - 0.693 &= 0.5(x - 2) \\ y &= -0.307 + 0.5x.\end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente es $y = -0.307 + 0.5x$. Véase la figura 3.15.

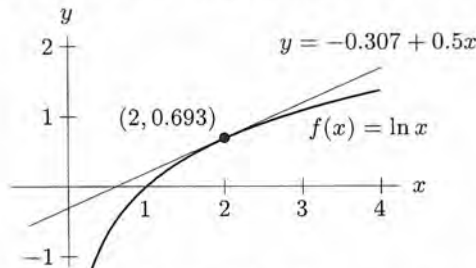


Figura 3.15. Gráfica de $f(x) = \ln x$ y una recta tangente.

Problemas para la sección 3.2

Derive las funciones de los problemas del 1 al 22. Suponga que A, B y C son constantes.

1. $f(x) = 2e^x + x^2$

2. $y = 5t^2 + 4e^t$

3. $P = 3t^3 + 2e^t$

4. $f(x) = x^3 + 3^x$

5. $y = 5 \cdot 5^t + 6 \cdot 6^t$

6. $f(x) = 2^x + 2 \cdot 3^x$

7. $y = 4 \cdot 10^x - x^3$

8. $y = 3x - 2 \cdot 4^x$

9. $y = 5 \cdot 2^x - 5x + 4$

10. $P(t) = 3{,}000(1.02)^t$

11. $P(t) = 12.41(0.94)^t$

12. $P(t) = Ce^t$.

13. $y = B + Ae^t$

14. $f(x) = Ae^x - Bx^2 + C$

15. $y = 10^x + \dfrac{10}{x}$

16. $y = \dfrac{3^x}{3} + \dfrac{33}{\sqrt{x}}$

17. $R = 3\ln q$

18. $D = 10 - \ln p$

19. $y = t^2 + 5\ln t$

20. $R(q) = q^2 - 2\ln q$

21. $y = x^2 + 4x - 3\ln x$

22. $f(t) = Ae^t + B\ln t$

23. Para $f(t) = 4-2e^t$, encuentre $f'(-1)$, $f'(0)$ y $f'(1)$. Trace una gráfica de $f(t)$ y trace las rectas tangentes en $t = -1$, $t = 0$ y en $t = 1$. ¿Las pendientes de las rectas concuerdan con las derivadas que usted encontró?

24. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = 3^x$ en $x = 1$. Compruebe su trabajo trazando una gráfica de la función y de la recta tangente sobre los mismos ejes.

25. Para la función de costo $C = 1{,}000 + 300 \ln q$ (en dólares), encuentre el costo y el costo marginal a un nivel de producción de 500. Interprete sus respuestas en términos económicos.

26. Con una tasa de inflación anual de 5%, los precios están descritos por:

$$P = P_0(1.05)^t,$$

donde P_0 es el precio en dólares cuando $t = 0$ y t es el tiempo en años. Suponga que $P_0 = 1$. ¿Cuánto suben los precios (en centavos/año) cuando $t = 10$?

27. La producción mundial de energía solar, en megavatios, puede modelarse por $f(t) = 50(1.19)^t$, donde t son los años desde 1990. Encuentre $f(0)$, $f'(0)$, $f(10)$ y $f'(10)$. Indique las unidades e interprete sus respuestas en términos de energía solar.

28. Desde el 1o. de enero de 1960, la población de Slim Chance se ha descrito por medio de la fórmula

$$P = 35{,}000(0.98)^t,$$

donde P es la población de la ciudad t años después del inicio de 1960. ¿Con qué tasa estaba cambiando la población el 1o. de enero de 1983?

29. Algunos muebles antiguos aumentaron de precio rápidamente en las décadas de 1970 y 1980. Por ejemplo, el valor de una mecedora se puede calcular muy bien con

$$V = 75(1.35)^t,$$

donde V es en dólares y t es el número de años desde 1975. Encuentre la razón, en dólares por año, a la que aumenta el precio.

30. El *Global 2000 Report* dio la población mundial, P, como 4.1 miles de millones en 1975 con un crecimiento de 2% anual.

(a) Dé una fórmula para hallar P en términos del tiempo, t, medido en años desde 1975.

(b) Encuentre $\frac{dP}{dt}$, $\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0}$ y $\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=15}$. ¿Qué representa cada uno de éstos en términos prácticos?

31. (a) Encuentre la pendiente de la gráfica de $f(x) = 1 - e^x$ en el punto donde intercepta al eje x.

(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en este punto.

32. Durante la década de 1990 la población de Hungría se aproximaba por

$$P = 10.8(0.998)^t,$$

donde P está en millones y t está en años desde 1990.

(a) ¿Qué predice este modelo para la población de Hungría en el año 2000?

(b) ¿Con qué rapidez (en personas/año) predijo este modelo que disminuiría la población de Hungría en el año 2000?

33. (a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \ln x$ en $x = 1$.

(b) Utilícela para calcular los valores aproximados para $\ln(1.1)$ y de $\ln(2)$.

(c) Usando una gráfica, explique si los valores aproximados son menores o mayores que los valores reales. ¿Habría obtenido el mismo resultado si usted hubiera empleado la recta tangente para estimar a $\ln(0.9)$ y $\ln(0.5)$? ¿Por qué?

34. Mediante la ecuación de la recta tangente a la gráfica de e^x en $x = 0$, muestre que

$$e^x \geq 1 + x$$

para todos los valores de x. Una gráfica sería de gran ayuda.

35. Utilice el hecho de que para $a > 0$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x$$

para explicar para qué valores de a la función a^x es creciente, y para qué valores es decreciente.

36. Encuentre el valor de c en la figura 3.16, donde la recta tangente l a la gráfica de $y = 2^x$ en (0, 1) intercepta al eje x.

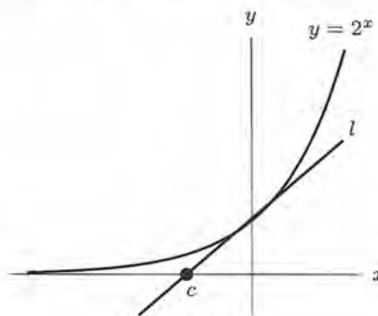


Figura 3.16.

37. Encuentre el polinomio cuadrático $g(x) = ax^2 + bx + c$ que se ajusta mejor a la función $f(x) = e^x$ en $x = 0$, en el sentido de que

$$g(0) = f(0) \text{ y } g'(0) = f'(0) \text{ y } g''(0) = f''(0).$$

Utilizando una computadora o una calculadora, dibuje las gráficas de f y g en un mismo sistema de coordenadas. ¿Qué observa usted?

38. El valor de cierto automóvil, comprado en 1997, puede calcularse mediante la función $V(t) = 25(0.85)^t$, donde t es el tiempo, en años, a partir de la fecha de compra y V es el valor, en miles de dólares.

(a) Evalúe e interprete a $V(4)$.

(b) Encuentre una expresión para $V'(t)$, que incluya a las unidades.

(c) Encuentre e interprete $V'(4)$.

(d) Utilice a $V(t)$, $V'(t)$ y cualesquier otras consideraciones que considere importantes para escribir un párrafo en favor o en contra del siguiente enunciado: "Desde un punto de vista monetario, es mejor conservar este vehículo el mayor tiempo posible".

3.3 REGLA DE LA CADENA

En esta sección analizaremos cómo derivar funciones compuestas como son $f(t) = \ln(3t)$ o $g(x) = e^{-x^2}$.

Derivada de una composición de funciones

Supongamos que $y = f(z)$ con $z = g(t)$ para una función interior g y una función exterior f, donde f y g son derivables. Un pequeño cambio en t, que se denomina Δt, genera un cambio pequeño en z, denominado Δz. A su vez, Δz produce un cambio pequeño en y, denominado Δy. Puesto que Δt y Δz son diferentes de cero, podemos decir que

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Puesto que la derivada $\frac{dy}{dt}$ es el límite del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ cuando Δt se hace cada vez menor, esto sugiere

> **La regla de la cadena**
>
> Si $y = f(z)$ y $z = g(t)$ son derivables, entonces
>
> $$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

El siguiente ejemplo muestra cómo interpretar la regla de la cadena en términos prácticos.

Ejemplo 1 La cantidad de gasolina, G, en galones que consume un automóvil, depende de la distancia que recorre, s, en millas y donde s depende del tiempo, t, en horas. Si se consumen 0.05 galones de gasolina por cada milla recorrida y el automóvil viaja a 30 millas/hora, ¿qué tan rápido se consume la gasolina? Indique las unidades.

Solución Se supone que la razón de consumo de gasolina está en galones/hora. Se nos ha dicho que

Razón a la que se consume la gasolina respecto a la distancia $= \frac{dG}{ds} = 0.05$ galones/milla

Razón a la que aumenta la distancia respecto al tiempo $= \frac{ds}{dt} = 30$ millas/hora

Deseamos calcular la razón a la que se consume la gasolina respecto al tiempo, o dG/dt. Consideremos G como una función de s, y s como una función de t. Por la regla de la cadena sabemos que

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dG}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \left(0.05 \ \frac{\text{galones}}{\text{milla}}\right) \cdot \left(30 \ \frac{\text{millas}}{\text{hora}}\right) = 1.5 \text{ galones/hora.}$$

Por tanto, la gasolina se consume a razón de 1.5 galones/hora.

Regla de la cadena para funciones dadas por medio de fórmulas

Para utilizar la regla de la cadena en una función compuesta, primero escribimos en otra forma la función usando una nueva variable z que represente a la función interior.

$$y = (t+1)^4 \quad \text{es lo mismo que} \quad y = z^4 \quad \text{donde} \quad z = t + 1.$$

Ejemplo 2 Utilice una nueva variable z que represente la función interior para expresar cada una de las siguientes expresiones como una función compuesta:

(a) $y = \ln(3t)$ **(b)** $P = e^{-0.03t}$ **(c)** $w = 5(2r+3)^2$.

Solución **(a)** La función interior es $3t$, de modo que tenemos $y = \ln z$ con $z = 3t$.

(b) La función interior es $-0.03t$, por tanto, tenemos que $P = e^z$ con $z = -0.03t$.

(c) La función interior es $2r + 3$, por tanto, $w = 5z^2$ con $z = 2r + 3$.

Ejemplo 3 Encuentre la derivada de las siguientes funciones: **(a)** $y = (4t^2+1)^7$ **(b)** $P = e^{3t}$.

Solución **(a)** En este caso, $z = 4t^2 + 1$ es la función interior, $y = z^7$ es la función exterior. Como $dy/dz = 7z^6$ y $dz/dt = 8t$, tenemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = (7z^6)(8t) = 7(4t^2+1)^6(8t) = 56t(4t^2+1)^6.$$

(b) Sean $z = 3t$ y $P = e^z$. Entonces $dP/dz = e^z$ y $dz/dt = 3$, por lo que

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = e^z\cdot 3 = e^{3t}\cdot 3 = 3e^{3t}.$$

De las reglas de derivación

$$\frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1} \qquad \frac{d}{dt}(e^t) = e^t \qquad \frac{d}{dt}(\ln t) = \frac{1}{t}.$$

Además, al utilizar la regla de la cadena, obtenemos los siguientes resultados.

Si z es una función derivable de t, entonces

$$\frac{d}{dt}(z^n) = nz^{n-1}\frac{dz}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}(e^z) = e^z\frac{dz}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}(\ln z) = \frac{1}{z}\frac{dz}{dt}$$

Ejemplo 4 Derive **(a)** $(3t^3-t)^5$ **(b)** $\ln(q^2+1)$ **(c)** e^{-x^2}.

Solución **(a)** Sea $z = 3t^3 - t$, entonces

$$\frac{d}{dt}(3t^3-t)^5 = \frac{d}{dt}(z^5) = 5z^4\frac{dz}{dt} = 5(3t^3-t)^4(9t^2-1).$$

(b) Tenemos que $z = q^2 + 1$, por consiguiente

$$\frac{d}{dq}(\ln(q^2+1)) = \frac{d}{dq}(\ln z) = \frac{1}{z}\frac{dz}{dq} = \frac{1}{q^2+1}(2q).$$

(c) Como $z = -x^2$, la derivada es

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = \frac{d}{dx}(e^z) = e^z\frac{dz}{dx} = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}.$$

Puesto que con frecuencia son útiles las funciones de la forma e^{kt}, donde k es una constante, calculemos la derivada de e^{kt}. Tenemos que $z = kt$, y por tanto, $dz/dt = k$. Por consiguiente, si k es una constante,

$$\frac{d}{dt}(e^{kt}) = ke^{kt}.$$

Ejemplo 5 Encuentre la derivada de $P = 5 + 3x^2 - 7e^{-0.2x}$.

Solución La derivada es

$$\frac{dP}{dx} = 0 + 3(2x) - 7(-0.2e^{-0.2x}) = 6x + 1.4e^{-0.2x}.$$

Ejemplo 6 Supongamos que se depositan $1,000 en una cuenta bancaria que paga 8% de interés anual compuesto continuamente.

(a) Encuentre una fórmula $f(t)$ para el saldo t años después del depósito inicial.

(b) Encuentre $f(10)$ y $f'(10)$ e interprete sus respuestas en términos de dinero.

Solución **(a)** El saldo es $f(t) = 1{,}000e^{0.08t}$.

(b) Al sustituir $t = 10$ obtenemos

$$f(10) = 1{,}000e^{(0.08)(10)} = 2{,}225.54.$$

Esto significa que el saldo es de $2,225.54 después de 10 años.

Para encontrar $f'(10)$, calculamos $f'(t) = 1{,}000(0.08e^{0.08t}) = 80e^{0.08t}$. Por tanto,

$$f'(10) = 80e^{(0.08)(10)} = 178.04.$$

Esto significa que después de 10 años el saldo estará creciendo a razón de $178 anuales, aproximadamente.

Problemas para la sección 3.3

Encuentre la derivada de las funciones en los problemas del 1 al 30.

1. $f(x) = (x+1)^{99}$

2. $R = (q^2+1)^4$

3. $w = (t^2+1)^{100}$

4. $w = (t^3+1)^{100}$

5. $w = (5r-6)^3$

6. $y = \sqrt{s^3+1}$

7. $f(t) = e^{3t}$

8. $y = e^{0.7t}$

9. $y = e^{-4t}$

10. $P = e^{-0.2t}$

11. $P = 50e^{-0.6t}$

12. $P = 200e^{0.12t}$

13. $y = 12 - 3x^2 + 2e^{3x}$

14. $C = 12(3q^2-5)^3$

15. $f(x) = 6e^{5x} + e^{-x^2}$

16. $y = 5e^{5t+1}$

17. $w = e^{-3t^2}$

18. $w = e^{\sqrt{s}}$

19. $y = \ln(5t+1)$

20. $f(x) = \ln(1-x)$

21. $f(t) = \ln(t^2+1)$

22. $f(x) = \ln(1-e^{-x})$

23. $f(x) = \ln(e^x+1)$

24. $f(t) = 5\ln(5t+1)$

25. $g(t) = \ln(4t+9)$

26. $y = 5 + \ln(3t+2)$

27. $Q = 100(t^2+5)^{0.5}$

28. $y = 5x + \ln(x+2)$

29. $y = (5+e^x)^2$

30. $P = (1+\ln x)^{0.5}$

31. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = e^{-2t}$ en $t = 0$. Compruebe dibujando las gráficas de $y = e^{-2t}$ y de la recta tangente en un mismo sistema de coordenadas.

32. Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x) = (x-1)^3$ en el punto donde $x = 2$.

33. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 1$, donde $f(x)$ es la función del problema 15.

34. La curva de demanda de un producto está dada por

$$q = f(p) = 10{,}000e^{-0.25p},$$

donde q es la cantidad vendida y p es el precio del producto, en dólares. Determine $f(2)$ y $f'(2)$. Explique en términos económicos la información que le ofrece cada una de estas respuestas.

35. El costo de producir una cantidad, q, de un producto está dado por

$$C(q) = 1{,}000 + 30e^{0.05q} \text{ dólares.}$$

Calcule el costo y el costo marginal cuando $q = 50$. Interprete estas respuestas en términos económicos.

36. El saldo, $\$B$, de una cuenta bancaria t años después de que se realiza un depósito de $5,000 está dado por $B = 5{,}000e^{0.08t}$. ¿A qué razón cambia el saldo de la cuenta en $t = 5$ años? Utilice las unidades para interpretar su respuesta en términos financieros.

37. En un tiempo de t horas después de que se suministra, la concentración de un medicamento en el cuerpo es $f(t) = 27e^{-0.14t}$ mg/ml. ¿Cuál es la concentración cuatro horas después de que se administró la sustancia? ¿Con qué rapidez está cambiando la concentración en el tiempo?

38. La población mundial es aproximadamente de $f(t) = 6e^{0.013t}$ miles de millones de habitantes, donde t es el tiempo, en años desde 1999. Calcule a $f(0)$, $f'(0)$, $f(10)$ y $f'(10)$. Utilizando las unidades, interprete sus respuestas en términos de habitantes.

39. Un gramo de carbono 14 radiactivo se desintegra de acuerdo con la fórmula

$$Q = e^{-0.000121t},$$

donde Q es el número de gramos de carbono 14 que permanecen después de t años.

(a) Encuentre la razón a la cual se desintegra el carbono 14 (en gramos/años).

(b) Trace en una gráfica la razón que usted determinó en el inciso (a) respecto al tiempo.

40. La temperatura, H, en grados Fahrenheit (°F), de una lata de bebida gaseosa que se pone en un refrigerador a enfriar está dada como una función del tiempo, t, en horas, por

$$H = 40 + 30e^{-2t}.$$

(a) Encuentre la razón a la que está cambiando la temperatura de la bebida gaseosa (en °F/hora).

(b) ¿Cuál es el signo de dH/dt? Explique.

(c) Para $t \geq 0$, ¿en qué punto es la magnitud de dH/dt máxima? En términos de la lata de bebida gaseosa, ¿por qué ocurre esto?

41. Si usted invierte P dólares en una cuenta bancaria a una tasa de interés anual de $r\%$, entonces, después de t años usted tendrá B dólares, donde

$$B = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t.$$

(a) Encuentre dB/dt, suponiendo que P y r son constantes. ¿Qué representa dB/dt en términos de dinero?

(b) Encuentre a dB/dr, suponiendo que P y t son constantes. ¿Qué representa dB/dr en términos de dinero?

3.4 REGLAS DEL PRODUCTO Y DEL COCIENTE

Esta sección muestra la forma de hallar las derivadas de productos y cocientes de funciones.

Regla del producto

Suponga que conocemos las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$ y que deseamos calcular la derivada del producto, $f(x)g(x)$. Primero, veamos un ejemplo. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Entonces

$$f(x)g(x) = x \cdot x^2 = x^3,$$

de modo que la derivada del producto es $3x^2$. Observe que la derivada del producto *no* es igual al producto de las derivadas, ya que $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$, por lo que $f'(x)g'(x) = (1)(2x) = 2x$. En general, tenemos la siguiente regla, que se justifica en la sección Enfoque teórico, en la página 162.

La regla del producto

Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

La regla del producto también se puede escribir como

$$\frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Es decir:

La derivada de un producto es la derivada de la primera por la segunda, más la primera por la derivada de la segunda.

Comprobamos que esta regla produce las respuestas correctas para $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. La derivada de $f(x)g(x)$ es

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 1(x^2) + x(2x) = x^2 + 2x^2 = 3x^2.$$

Ésta es la respuesta que esperábamos para la derivada de $f(x)g(x) = x \cdot x^2 = x^3$.

Ejemplo 1 Derive **(a)** x^2e^{2x} **(b)** $t^3 \ln(t+1)$ **(c)** $(3x^2 + 5x)e^x$.

Solución **(a)** Usando la regla del producto, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2e^{2x}) &= \frac{d}{dx}(x^2) \cdot e^{2x} + x^2\frac{d}{dx}(e^{2x}) \\ &= (2x)e^{2x} + x^2(2e^{2x}) \\ &= 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}.\end{aligned}$$

(b) Derivando mediante la regla del producto, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(t^3\ln(t+1)) &= \frac{d}{dt}(t^3)\cdot\ln(t+1) + t^3\frac{d}{dt}(\ln(t+1))\\ &= (3t^2)\ln(t+1) + t^3\left(\frac{1}{t+1}\right)\\ &= 3t^2\ln(t+1) + \frac{t^3}{t+1}.\end{aligned}$$

(c) La regla del producto da

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}((3x^2+5x)e^x) &= \left(\frac{d}{dx}(3x^2+5x)\right)e^x + (3x^2+5x)\frac{d}{dx}(e^x)\\ &= (6x+5)e^x + (3x^2+5x)e^x\\ &= (3x^2+11x+5)e^x.\end{aligned}$$

Ejemplo 2 Encuentre la derivada de $C = \dfrac{e^{2t}}{t}$.

Solución Escribimos $C = e^{2t}t^{-1}$ y usamos la regla del producto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{2t}t^{-1}) &= \frac{d}{dt}(e^{2t})\cdot t^{-1} + e^{2t}\frac{d}{dt}(t^{-1})\\ &= (2e^{2t})\cdot t^{-1} + e^{2t}(-1)t^{-2}\\ &= \frac{2e^{2t}}{t} - \frac{e^{2t}}{t^2}.\end{aligned}$$

Ejemplo 3 La curva de demanda para un producto tiene la ecuación $p = 80e^{-0.003q}$, donde p es el precio y q es la cantidad.

(a) Encuentre el ingreso como función de la cantidad vendida.
(b) Encuentre la función del ingreso marginal.

Solución
(a) Puesto que Ingreso = Precio × Cantidad, tenemos que $I = pq = (80e^{-0.003q})q = 80qe^{-0.003q}$.
(b) La función de ingreso marginal es la derivada del ingreso respecto a la cantidad. La regla del producto da

$$\begin{aligned}\text{Ingreso marginal} &= \frac{d}{dq}(80qe^{-0.003q})\\ &= \left(\frac{d}{dq}(80q)\right)e^{-0.003q} + 80q\left(\frac{d}{dq}(e^{-0.003q})\right)\\ &= (80)e^{-0.003q} + 80q(-0.003e^{-0.003q})\\ &= (80-0.24q)e^{-0.003q}.\end{aligned}$$

Regla del cociente

Suponga que queremos derivar una función de la forma $Q(x) = f(x)/g(x)$. (Por supuesto, debemos evitar los puntos donde $g(x) = 0$.) Buscamos una fórmula para Q' (en términos de f' y g'). Tenemos la siguiente regla, que se justifica en la página 162 de la sección Enfoque teórico.

La regla del cociente

Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

o bien, lo que es equivalente,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\dfrac{du}{dx}\cdot v - u \cdot \dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Es decir:

La derivada de un cociente es la derivada del numerador por el denominador, menos el numerador por la derivada del denominador, todo sobre el cuadrado del denominador.

Ejemplo 4 Derive **(a)** $\dfrac{5x^2}{x^3+1}$ **(b)** $\dfrac{1}{1+e^x}$ **(c)** $\dfrac{e^x}{x^2}$.

Solución **(a)** Utilizando la regla del cociente

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5x^2}{x^3+1}\right) = \frac{\left(\dfrac{d}{dx}(5x^2)\right)(x^3+1) - 5x^2\dfrac{d}{dx}(x^3+1)}{(x^3+1)^2} = \frac{10x(x^3+1) - 5x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{-5x^4+10x}{(x^3+1)^2}.$$

(b) Derivando con la regla del cociente resulta

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^x}\right) = \frac{\left(\dfrac{d}{dx}(1)\right)(1+e^x) - 1\dfrac{d}{dx}(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{0(1+e^x) - 1(0+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}.$$

(c) La regla del cociente da

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = \frac{\left(\dfrac{d}{dx}(e^x)\right)x^2 - e^x\left(\dfrac{d}{dx}(x^2)\right)}{(x^2)^2} = \frac{e^x x^2 - e^x(2x)}{x^4}$$

$$= e^x\left(\frac{x^2-2x}{x^4}\right) = e^x\left(\frac{x-2}{x^3}\right).$$

Problemas para la sección 3.4

1. Si $f(x) = x^2(x^3 + 5)$, encuentre a f' en dos formas: empleando la regla del producto y multiplicando antes de tomar la derivada. ¿Obtiene el mismo resultado? ¿Debe obtenerlo?

2. Si $f(x) = (2x + 1)(3x - 2)$, encuentre a $f'(x)$ en dos formas: empleando la regla del producto y multiplicando antes de tomar la derivada. ¿Obtiene el mismo resultado?

Para los problemas del 3 al 31, encuentre la derivada. Suponga que a, b, c y k son constantes.

3. $f(x) = xe^x$

4. $f(t) = te^{-2t}$

5. $y = x \cdot 2^x$

6. $y = 5xe^{x^2}$

7. $y = t^2(3t+1)^3$

8. $y = x \ln x$

9. $y = (t^2+3)e^t$

10. $z = (3t+1)(5t+2)$

11. $y = (t^3 - 7t^2 + 1)e^t$

12. $P = t^2 \ln t$

13. $f(t) = \dfrac{5}{t} + \dfrac{6}{t^2}$

14. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x}$

15. $R = 3qe^{-q}$

16. $y = te^{-t^2}$

17. $f(z) = \sqrt{z}e^{-z}$

18. $g(p) = p\ln(2p+1)$

19. $f(t) = te^{5-2t}$

20. $f(w) = (5w^2+3)e^{w^2}$

21. $w = (t^3+5t)(t^2-7t+2)$

22. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

23. $w = \dfrac{3z}{1+2z}$

24. $z = \dfrac{1-t}{1+t}$

25. $y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

26. $w = \dfrac{3y+y^2}{5+y}$

27. $y = \dfrac{1+z}{\ln z}$

28. $f(t) = ae^{bt}$

29. $f(x) = (ax^2+b)^3$

30. $f(x) = axe^{-bx}$

31. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+k}$

32. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2e^{-x}$ en $x = 0$. Compruebe su resultado graficando esta función y la recta tangente en un mismo sistema de coordenadas.

33. Si $f(x) = (3x+8)(2x-5)$, encuentre $f'(x)$ y $f''(x)$.

34. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+1}$ en el punto en el que $x = 0$.

35. La cantidad demandada de cierto producto, q, está dada en términos de p, el precio, por

$$q = 1{,}000e^{-0.02p}$$

(a) Escriba al ingreso, I, como función del precio.
(b) Encuentre la razón de cambio del ingreso respecto al precio.
(c) Encuentre el ingreso y la razón de cambio del ingreso respecto al precio cuando el precio es de \$10. Interprete sus respuestas en términos económicos.

36. La curva de concentración de un medicamento está dada por $C = f(t) = 20te^{-0.04t}$, con C en mg/ml y t en minutos.

(a) Trace una gráfica de C como función de t. ¿$f'(15)$ es positiva o negativa? ¿$f'(45)$ es positiva o negativa? Explique.
(b) Analíticamente encuentre $f(30)$ y $f'(30)$. Interprételas en términos de la concentración del medicamento en el cuerpo.

37. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $P(t) = t\ln t$ en $t = 2$. Trace la gráfica de la función $P(t)$ y de la recta tangente $Q(t)$ en un mismo sistema de coordenadas.

38. La cantidad, q, de ciertas patinetas vendidas depende del precio de venta, p, en dólares, por lo que escribimos $q = f(p)$. A usted se le informa que $f(140) = 15{,}000$ y $f'(140) = -100$.

(a) ¿Qué le dicen $f(140) = 15{,}000$ y $f'(140) = -100$ acerca de las ventas de patinetas?
(b) El ingreso total, I, generado por la venta de las patinetas está dado por $I = pq$. Encuentre $\left.\dfrac{dR}{dp}\right|_{p=140}$.
(c) ¿Cuál es el signo de $\left.\dfrac{dR}{dp}\right|_{p=140}$? Si las patinetas se venden actualmente en \$140, ¿qué le pasa al ingreso si el precio sube a \$141?

39. Sea $f(v)$ la función que representa el consumo de gasolina (en litros/kilómetro) de un auto que viaja a una velocidad v (en kilómetros/hora). Es decir, $f(v)$ le señala cuántos litros de gasolina consume el auto para avanzar un kilómetro a una velocidad v. Explique qué le indican las siguientes afirmaciones sobre el consumo de gasolina:

$$f(80) = 0.05 \quad \text{y} \quad f'(80) = 0.0005.$$

3.5 DERIVADAS DE FUNCIONES PERIÓDICAS

Debido a que las funciones seno y coseno son periódicas, sus derivadas también deben ser periódicas (¿por qué?). Observe la gráfica de $f(x) = \text{sen}\, x$ en la figura 3.17 y calcule gráficamente la función derivada.

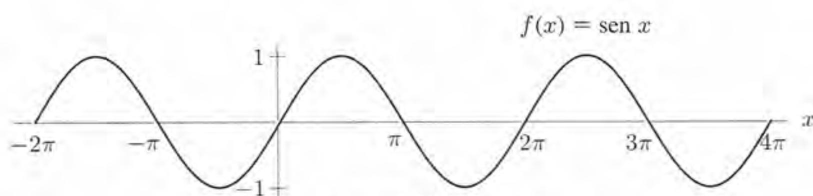


Figura 3.17. La función seno.

Primero, podríamos preguntarnos dónde es cero la derivada. (En $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$, etc.) Después, nos preguntamos en dónde es positiva la derivada y en dónde es negativa. (Positiva en $-\pi/2 < x < \pi/2$, y negativa en $\pi/2 < x < 3\pi/2$, etc.) Debido a que las máximas pendientes positivas están en $x = 0, 2\pi$, y así sucesivamente, y las máximas pendientes negativas están en $x = \pi, 3\pi$, y sucesivamente, se obtiene una gráfica como la de la figura 3.18.

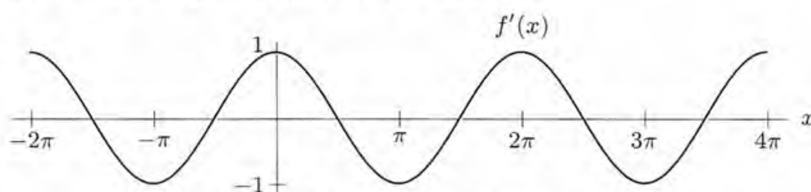


Figura 3.18. Derivada de $f(x) = \text{sen } x$.

La gráfica de la derivada de la figura 3.18 se asemeja, sospechosamente, a la gráfica de la función coseno. Esto puede llevarnos a conjeturar, acertadamente, que la derivada del seno es el coseno.

Desde luego no podemos estar seguros, a partir sólo de las gráficas, que la derivada del seno sea en realidad el coseno, pero éste en sí es un hecho verdadero.

Una cosa podemos hacer para que la función derivada en la figura 3.18 tenga una amplitud de 1 (como debe ser si es el coseno). Esto significa que tenemos que convencernos que la derivada de $f(x) = \text{sen } x$ es 1 cuando $x = 0$. El siguiente ejemplo sugiere que esto es cierto cuando x está medido en radianes.

Ejemplo 1 Utilizando una calculadora, estime la derivada de $f(x) = \text{sen } x$ en $x = 0$. Asegúrese de que su calculadora esté puesta en radianes.

Solución Utilizamos la razón promedio de cambio de sen x en un pequeño intervalo $0 \le x \le 0.01$ para calcular

$$f'(0) \approx \frac{\text{sen}(0.01) - \text{sen}(0)}{0.01 - 0} = \frac{0.0099998 - 0}{0.01} = 0.99998 \approx 1.0.$$

La derivada de $f(x) = \text{sen } x$ en $x = 0$ es aproximadamente 1.0.

Atención: Es importante observar que en el ejemplo anterior x estuvo en *radianes*; cualquier conclusión a que podamos sacar acerca de la derivada de sen x *sólo* es válida cuando x esté en radianes.

Ejemplo 2 Comenzando con la gráfica de la función coseno, trace una gráfica de su derivada.

Solución La gráfica de $g(x) = \cos x$ está en la figura 3.19(a). Su derivada es igual a 0 cuando $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$, y así sucesivamente; es positiva en $-\pi < x < 0$, $\pi < x < 2\pi$, etcétera, y es negativa para $0 < x < \pi$, $2\pi < x < 3\pi$, etcétera. La derivada se muestra en la figura 3.19(b).

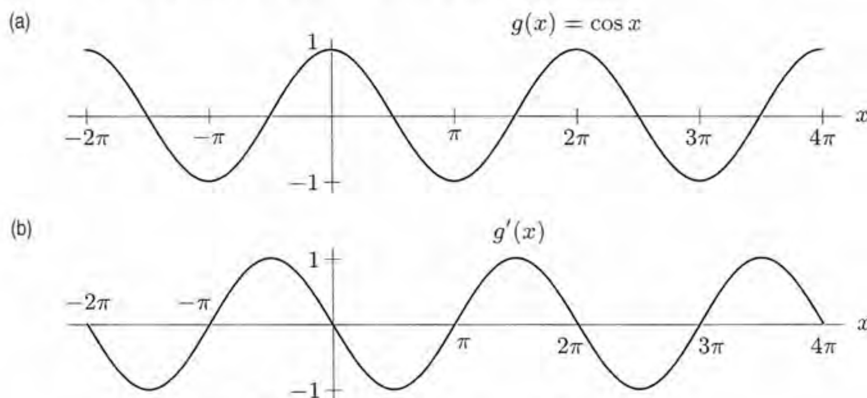


Figura 3.19. $g(x) = \cos x$ y su derivada, $g'(x)$.

Como hicimos con la función seno, utilizaremos las gráficas para sacar una conjetura. La derivada del coseno, de la figura 3.19(b), parece ser exactamente igual a la gráfica del seno, excepto que está reflejada respecto al eje x. Resulta, entonces, que la derivada de cos x es $-$sen x.

Para x en radianes,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 3 Derive **(a)** $5\operatorname{sen} t - 8\cos t$ **(b)** $5 - 3\operatorname{sen} x + x^3$

Solución **(a)** Al derivar obtenemos

$$\frac{d}{dt}(5\operatorname{sen} t - 8\cos t) = 5\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) - 8\frac{d}{dt}(\cos t) = 5(\cos t) - 8(-\operatorname{sen} t) = 5\cos t + 8\operatorname{sen} t$$

(b)

$$\frac{d}{dx}(5 - 3\operatorname{sen} x + x^3) = \frac{d}{dx}(5) - 3\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \frac{d}{dx}(x^3) = 0 - 3(\cos x) + 3x^2 = -3\cos x + 3x^2.$$

La regla de la cadena nos indica cómo derivar funciones compuestas donde aparezcan seno y coseno. Supongamos que $y = \operatorname{sen}(3t)$, de forma que, $y = \operatorname{sen} z$ y $z = 3t$, por tanto

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = \cos z\frac{dz}{dt} = \cos(3t)\cdot 3 = 3\cos(3t).$$

En general,

Si z es una función derivable de t, entonces

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} z) = \cos z\frac{dz}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}(\cos z) = -\operatorname{sen} z\frac{dz}{dt}$$

En muchas aplicaciones, $z = kt$ para alguna constante k. Entonces tenemos que

Si k es una constante, entonces

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} kt) = k\cos kt \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}(\cos kt) = -k\operatorname{sen} kt$$

Ejemplo 4 Derive:

(a) $\operatorname{sen}(t^2)$ **(b)** $5\cos(2t)$ **(c)** $t\operatorname{sen} t$.

Solución **(a)** Tenemos $y = \operatorname{sen} z$ con $z = t^2$, por lo que

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{sen}(t^2)) = \frac{d}{dt}(\operatorname{sen} z) = \cos z\frac{dz}{dt} = \cos(t^2)\cdot 2t = 2t\cos(t^2).$$

(b) Tenemos que $y = 5\cos z$ con $z = 2t$, entonces

$$\frac{d}{dt}(5\cos(2t)) = 5\frac{d}{dt}(\cos(2t)) = 5(-2\operatorname{sen}(2t)) = -10\operatorname{sen}(2t).$$

(c) Empleamos la regla del producto:

$$\frac{d}{dt}(t\,\text{sen}\,t) = \frac{d}{dt}(t) \cdot \text{sen}\,t + t\frac{d}{dt}(\text{sen}\,t) = 1 \cdot \text{sen}\,t + t(\cos t) = \text{sen}\,t + t\cos t.$$

Problemas para la sección 3.5

Derive las funciones en los problemas del 1 al 18. Suponga que A, B y C son constantes.

1. $y = 5\,\text{sen}\,x$
2. $P = 3 + \cos t$
3. $y = t^2 + 5\cos t$
4. $y = B + A\,\text{sen}\,t$
5. $y = 5\,\text{sen}\,x - 5x + 4$
6. $R(q) = q^2 - 2\cos q$
7. $R = \text{sen}(5t)$
8. $W = 4\cos(t^2)$
9. $y = A\,\text{sen}(Bt)$
10. $y = \text{sen}(x^2)$
11. $f(x) = \text{sen}(3x)$
12. $y = 2\cos(5t)$
13. $y = 6\text{sen}(2t) + \cos(4t)$
14. $z = \cos(4\theta)$
15. $f(x) = x^2\cos x$
16. $f(x) = 2x\,\text{sen}(3x)$
17. $f(t) = \dfrac{t^2}{\cos t}$
18. $f(\theta) = \dfrac{\text{sen}\theta}{\theta}$

19. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \text{sen}\,x$ en $x = \pi$. Trace una gráfica de la función y la recta tangente en un mismo sistema de coordenadas.
20. Las ventas mensuales de una compañía, $S(t)$, dependen de la temporada y se dan como una función del tiempo, t, en meses, con

$$S(t) = 2{,}000 + 600\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

(a) Trace una gráfica de $S(t)$ desde $t = 0$ a $t = 12$. ¿Cuáles son las ventas mensuales máximas? ¿Cuáles son las ventas mensuales mínimas? Si $t = 0$ es el 1° de enero, ¿en qué día del año las ventas son mayores?
(b) Encuentre $S(2)$ y $S'(2)$. Interprételas en términos de ventas.

21. ¿Es la gráfica de $y = \text{sen}\,(x^4)$ creciente o decreciente cuando $x = 10$? ¿Es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?
22. Si t es el número de meses desde junio, el número de especies de aves, N, descubiertas en el bosque de Ohio oscila de acuerdo con la fórmula

$$N = f(t) = 19 + 9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

(a) Grafique a $f(t)$ para $0 \le t \le 24$ y diga qué le indica esto. Utilice la gráfica para decidir si $f'(1)$ y $f'(10)$ son positivas o negativas.
(b) Encuentre $f'(t)$.
(c) Encuentre e interprete a $f(1)$, $f'(1)$, $f(10)$ y $f'(10)$.

23. Un bote anclado sube y baja en la superficie del mar. La distancia vertical y en pies, entre el lecho del mar y el bote, está dada como una función del tiempo, t, en minutos, por

$$y = 15 + \text{sen}(2\pi t).$$

(a) Encuentre la velocidad vertical, v, del bote en el tiempo t.
(b) Haga un dibujo aproximado de y y v respecto a t.

24. En la página 66 de la sección 1.10, la profundidad, y, en pies, del agua en el puerto de Boston está dada en términos de t, el número de horas desde la medianoche, por

$$y = 5 + 4.9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

(a) Encuentre dy/dt. ¿Qué representa dy/dt en términos de nivel del agua?
(b) Para $0 \le t \le 24$, ¿en qué punto dy/dt es igual a cero? (La figura 1.104, en la página 67, puede ser de gran ayuda.) Explique qué significa (en términos de nivel del agua) que dy/dt sea cero.

25. Para las constantes positivas c y k, la *curva de crecimiento de Monod*,

$$P = \frac{cr}{k + r},$$

describa el crecimiento de una población, P, como función de la cantidad disponible de cierta materia prima, r. Si la materia prima varía periódicamente a lo largo del tiempo, $r = 10\,\text{sen}(\pi t/6) + 10$, encuentre dP/dt.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

- **Derivadas de funciones elementales**
  Potencias, polinomios, exponenciales, funciones logarítmicas, periódicas.
- **Derivadas de sumas, diferencias y productos por constantes**
- **Regla de la cadena**
- **Reglas del producto y del cociente**
- **Aproximación según la recta tangente**

PROBLEMAS DE REPASO

Encuentre las derivadas para las funciones de los problemas del 1 al 36.

1. $f(t) = 6t^4$

2. $P(t) = e^{2t}$

3. $W = r^3 + 5r - 12$

4. $C = e^{0.08q}$

5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$

6. $y = 5e^{-0.2t}$

7. $s(t) = (t^2 + 4)(5t - 1)$

8. $g(t) = e^{(1+3t)^2}$

9. $f(x) = x^2 + 3\ln x$

10. $Q(t) = 5t + 3e^{1.2t}$

11. $g(z) = (z^2 + 5)^3$

12. $f(x) = 6(5x - 1)^3$

13. $f(z) = \ln(z^2 + 1)$

14. $y = xe^{3x}$

15. $q = 100e^{-0.05p}$

16. $y = x^2 \ln x$

17. $s(t) = t^2 + 2\ln t$

18. $P = 4t^2 + 7\text{sen}t$

19. $R(t) = (\text{sen}t)^5$

20. $h(t) = \ln\left(e^{-t} - t\right)$

21. $f(x) = \text{sen}(2x)$

22. $y = x^2 \cos x$

23. $g(x) = \dfrac{25x^2}{e^x}$

24. $h(t) = \dfrac{t+4}{t-4}$

25. $\ln(1 + e^x)$

26. $e^{\ln w + 1}$

27. $(1 + e^x)^{10}$

28. $\ln(x^3 + x)$

29. $q(x) = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^{-x}}$

30. $q(x) = \dfrac{x}{1+x}$

31. $f(x) = xe^x$

32. $\text{sen}(e^x)$

33. $\cos(x^3)$

34. $z = \dfrac{3t+1}{5t+2}$

35. $z = \dfrac{t^2 + 5t + 2}{t+3}$

36. $h(p) = \dfrac{1 + p^2}{3 + 2p^2}$

37. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ en $x = 1$.

38. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x) = 10e^{-0.2x}$ en $x = 4$.

39. La distancia, s, de un móvil desde un punto fijo está dada como función del tiempo por $s = 20e^{t/2}$. Determine la velocidad, v, del móvil como función de t.

40. Si p es el precio en dólares y q es la cantidad, la demanda de un producto está dada por

$$q = 5{,}000e^{-0.08p}.$$

(a) ¿Qué cantidad se vende a un precio de $10?
(b) Encuentre la derivada de la demanda respecto al precio cuando éste es de $10, e interprete su respuesta en términos de la demanda para el producto.

41. La demanda para un producto se muestra en el problema 40. Encuentre el ingreso y la derivada del ingreso respecto al precio si éste es de $10. Explique sus respuestas en términos económicos.

42. Una población de peces es pronosticada mediante $P(t) = 10e^{0.6t}$, donde t está en meses. Calcule y utilice unidades para explicar qué le dice cada uno de los siguientes enunciados acerca de la población:

(a) $P(12)$ **(b)** $P'(12)$

43. En 1990 la población de México era de aproximadamente 84 millones de habitantes y aumentaba a razón de 2.6% anual, mientras que la población de Estados Unidos era cercana a los 250 millones y crecía anualmente 0.7%. ¿Qué población crecía con más rapidez, si medimos las tasas de crecimiento en habitantes/año? Explique su respuesta.

44. La cantidad de un medicamento, Q mg, que está presente en el cuerpo t horas después de que se aplica una inyección es

$$Q = f(t) = 100te^{-0.5t}.$$

Encuentre $f(1)$, $f'(1)$, $f(5)$ y $f'(5)$. Indique las unidades e interprete las respuestas.

45. Considerando que $r(2) = 4$, $s(2) = 1$, $s(4) = 2$, $r'(2) = -1$, $s'(2) = 3$, y $s'(4) = 3$, calcule las siguientes derivadas, o diga qué información adicional necesita para calcular la derivada.

(a) $H'(2)$ si $H(x) = r(x) + s(x)$
(b) $H'(2)$ si $H(x) = 5s(x)$
(c) $H'(2)$ si $H(x) = r(x) \cdot s(x)$
(d) $H'(2)$ si $H(x) = \sqrt{r(x)}$

46. Tomando en cuenta que $F(2) = 1$, $F'(2) = 5$, $F(4) = 3$, $F'(4) = 7$ y $G(4) = 2$, $G'(4) = 6$, $G(3) = 4$, $G'(3) = 8$, encuentre:

(a) $H(4)$ si $H(x) = F(G(x))$
(b) $H'(4)$ si $H(x) = F(G(x))$
(c) $H(4)$ si $H(x) = G(F(x))$
(d) $H'(4)$ si $H(x) = G(F(x))$
(e) $H'(4)$ si $H(x) = F(x)/G(x)$

47. La profundidad del agua, en metros, en la Bahía de Fundy, en Canadá, está dada como una función de tiempo, t, en horas después de medianoche, por la función

$$y = 10 + 7.5\cos(0.507t).$$

¿A qué velocidad (en metros/hora) sube o baja la marea en cada uno de los siguientes momentos?

(a) 6:00 a. m. **(b)** 9:00 a. m.
(c) Mediodía. **(d)** 6:00 p. m.

48. La temperatura, Y, en grados Fahrenheit, de un camote en un horno caliente t minutos después de que alguien lo introdujo está dada por

$$Y(t) = 350(1 - 0.7e^{-0.008t}).$$

(a) ¿Cuál era la temperatura del camote cuando estaba dentro del horno?
(b) ¿Cuál es la temperatura del horno?
(c) ¿Cuándo llega a 175 °F la temperatura del camote?
(d) Evalúe la razón a la cual aumenta la temperatura del camote cuando $t = 20$.

49. ¿En qué intervalos la función $f(x) = x^4 - 4x^3$ es decreciente y cóncava hacia arriba?

50. Considerando $p(x) = x^n - x$, determine los intervalos en los cuales p es una función decreciente cuando:

(a) $n = 2$ **(b)** $n = \frac{1}{2}$ **(c)** $n = -1$

51. Con ayuda de una gráfica determine las ecuaciones de todas las rectas que pasan por el origen y son tangentes a la parábola

$$y = x^2 - 2x + 4.$$

Trace las rectas en la gráfica.

52. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$ y en $x = \pi/3$. Utilice cada recta tangente para aproximar $\operatorname{sen}(\pi/6)$. ¿Esperaría usted que estos resultados fueran igualmente precisos, ya que se toman alejados por igual de $x = \pi/6$, pero en lados opuestos? Si la precisión es diferente, ¿puede explicar la diferencia?

53. Suponga que W es proporcional a r^3. ¿A qué potencia de r es proporcional la derivada dW/dr?

54. La derivada f' indica la razón de cambio (absoluta) de una cantidad, f y f'/f señala la razón de cambio relativa de la cantidad. En este problema, se demuestra que la regla del producto es equivalente a una regla aditiva de las razones de cambio relativas. Suponga que $h = f \cdot g$ con $f \neq 0$ y $g \neq 0$.

(a) Demuestre que la regla aditiva

$$\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} = \frac{h'}{h}$$

implica la regla del producto, multiplicando por h y utilizando el hecho de que $h = f \cdot g$.

(b) Demuestre que la regla del producto implica la regla aditiva del inciso (a), comenzando con la regla del producto y dividiendo entre $h = f \cdot g$.

55. Un museo ha decidido vender una de sus pinturas e invertir las ganancias. Si la venden entre los años 2000 y 2020 e invierten el dinero de la venta en una cuenta bancaria que genera un interés de 5% al año compuesto anualmente, entonces $B(t)$, el saldo en el año 2020, depende del año, t, en el que se vendió la pintura y del precio de venta $P(t)$. Si se mide a t a partir del año 2000, de forma que $0 < t < 20$, entonces

$$B(t) = P(t)(1.05)^{20-t}.$$

(a) Explique por qué $B(t)$ se obtiene con esta fórmula.
(b) Demuestre que la fórmula para $B(t)$ es equivalente a

$$B(t) = (1.05)^{20}\frac{P(t)}{(1.05)^t}.$$

(c) Encuentre $B'(10)$, si $P(10) = 150{,}000$ y $P'(10) = 5{,}000$.

56. Imagine que se hace un acercamiento (*zoom*) sobre la gráfica de cada una de las siguientes funciones cerca del origen:

$y = x$ $\quad y = \sqrt{x}$ $\quad y = x^2$
$y = x^3 + \frac{1}{2}x^2$ $\quad y = x^3$ $\quad y = \ln(x+1)$
$y = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ $\quad y = \sqrt{2x - x^2}$

¿Cuáles son semejantes? Agrupe aquellas funciones que parecen ser similares alrededor del origen, y dé las ecuaciones de las rectas a las que se asemejan.

57. Demuestre que para cualquier función potencial $f(x) = x^n$, tenemos $f'(1) = n$.

58. Dada la función potencial de la forma $f(x) = ax^n$, con $f'(2) = 3$ y $f'(4) = 24$, encuentre n y a.

59. Un camote se pone en un horno caliente, a una temperatura constante de 200 °C. En el tiempo de $t = 30$ minutos, la temperatura, T, del camote es de 120 °C y aumenta a una razón (instantánea) de 2°/min. La ley de Newton del enfriamiento (o bien, en este caso, de calentamiento) implica que la temperatura en el tiempo t está dada por la fórmula

$$T(t) = 200 - ae^{-bt}.$$

Encuentre a y b.

60. Dado un número $a > 1$, la ecuación

$$a^x = 1 + x$$

tiene una solución $x = 0$. ¿Hay alguna otra solución? ¿Cómo depende su respuesta del valor de a? [*Sugerencia:* grafique las funciones en ambos lados de la ecuación.]

PROYECTOS

1. **La regla del juez de primera instancia**

Los jueces de primera instancia, de acuerdo con el método empírico, estiman que el cuerpo se enfría 2 °F durante la primera hora de la muerte, y cerca de 1 °F por cada hora adicional. Suponiendo que la temperatura del aire sea de 68 °F y la temperatura de un cuerpo vivo sea de 98.6 °F, la temperatura $T(t)$ en °F de un cuerpo en un tiempo de t horas después de la muerte está dada por

$$T(t) = 68 + 30.6e^{-kt}.$$

(a) ¿Para qué valor de k el cuerpo se enfriará 2 °F en la primera hora?

(b) Utilizando el valor de k que se calculó en el inciso (a), ¿después de cuántas horas la temperatura del cuerpo disminuirá a una razón de 1 °F por hora?

(c) Utilizando el valor de k, calculado en el inciso (a), demuestre que 24 horas después de la muerte el modo empírico del juez de primera instancia calcula aproximadamente la misma temperatura que la fórmula.

2. **Presión del aire y altitud**

La presión del aire al nivel del mar es de 30 pulgadas de mercurio. A una altitud de h pies sobre el nivel del mar, la presión del aire, P, en pulgadas de mercurio, se obtiene con

$$P = 30e^{-3.23\times 10^{-5}h}$$

(a) Trace una gráfica de P contra h.

(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica en $h = 0$.

(c) Una regla práctica que usan los viajeros es que la presión del aire baja alrededor de una pulgada por cada 1,000 pies de aumento en altitud sobre el nivel del mar. Escriba una fórmula para hallar la presión del aire, dada por esta regla práctica.

(d) ¿Cuál es la relación entre sus respuestas a los incisos (b) y (c)? Explique por qué funciona esta regla práctica.

(e) ¿Las predicciones hechas por el método del juez de primera instancia son demasiado grandes o demasiado pequeñas? ¿Por qué?

ENFOQUE TEÓRICO

DETERMINACIÓN DE LAS FÓRMULAS DE DERIVADAS

La gráfica de $f(x) = x^2$ sugiere que la derivada de x^2 es $f'(x) = 2x$. Sin embargo, como vimos en la sección Enfoque teórico del capítulo 2, para asegurarnos de que esta fórmula es correcta tenemos que usar la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Como en el capítulo 2, primero simplificamos el cociente de diferencias y después tomamos el límite cuando h se aproxima a cero.

Ejemplo 1 Confirme que la derivada de $g(x) = x^3$ es $g'(x) = 3x^2$.

Solución Empleando la definición, calculamos a $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ \text{Multiplicando} \longrightarrow &= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ \text{Simplificando} \longrightarrow &= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

$\nwarrow$ Vea lo que pasa cuando $h \to 0$

Por tanto, $g'(x) = \dfrac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$.

Ejemplo 2 Dé una justificación informal de que la derivada de $f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$.

Solución Con $f(x) = e^x$, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \left(\frac{e^h - 1}{h} \right). \end{aligned}$$

¿Cuál es el límite de $\dfrac{e^h - 1}{h}$ cuando $h \to 0$? La gráfica de $\dfrac{e^h - 1}{h}$ de la figura 3.20 indica que $\dfrac{e^h - 1}{h}$ se aproxima a 1 cuando $h \to 0$. De hecho, se puede demostrar que el límite es igual a 1 y

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} e^x \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) = e^x \cdot 1 = e^x.$$

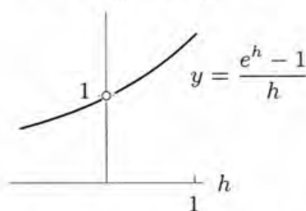


Figura 3.20. ¿A qué es igual $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$?

Ejemplo 3 Demuestre que si $f(x) = 2x^2 + 1$, entonces $f'(x) = 4x$.

Solución Empleamos la definición de la derivada con $f(x) = 2x^2 + 1$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2(x+h)^2 + 1) - (2x^2 + 1)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) + 1 - 2x^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 1 - 2x^2 - 1}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4x + 2h)}{h}$$

Para determinar el límite, vea lo que pasa cuando h se aproxima a 0, pero con $h \neq 0$. Al simplificar, tenemos que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(4x + 2h)}{h} = \lim_{h \to 0} (4x + 2h) = 4x$$

debido a que h tiende a 0, sabemos que $4x + 2h$ se aproxima a $4x$.

Uso de la regla de la cadena para determinar fórmulas de la derivada

Empleamos la regla de la cadena para justificar las fórmulas para derivadas de $\ln x$ y de a^x.

Derivada de $\ln x$

Derivaremos una identidad en donde aparece $\ln x$. En la página 40 tenemos $e^{\ln x} = x$. Al derivar obtenemos

$$\frac{d}{dx}(e^{\ln x}) = \frac{d}{dx}(x) = 1.$$

En el lado izquierdo, puesto que e^x es la función exterior y $\ln x$ es la función interior, por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{dx}(e^{\ln x}) = e^{\ln x} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x).$$

Por tanto, tal como dijimos en la página 144

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Derivada de a^x

Los argumentos gráficos sugieren que la derivada de a^x es proporcional a a^x. Ahora, demostramos que la constante de proporcionalidad es $\ln a$. Para $a > 0$, usamos la identidad de la página 40

$$\ln(a^x) = x \ln a.$$

En el lado izquierdo, usamos $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ y por la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln a^x) = \frac{1}{a^x} \cdot \frac{d}{dx}(a^x).$$

Puesto que $\ln a$ es una constante, al derivar el lado derecho obtenemos

$$\frac{d}{dx}(x \ln a) = \ln a.$$

Puesto que ambos lados son iguales, tenemos

$$\frac{1}{a^x}\frac{d}{dx}(a^x) = \ln a.$$

Al despejar $\frac{d}{dx}(a^x)$ nos da el resultado de la sección 3.2. Para $a > 0$,

$$\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x.$$

Regla del producto

Suponga que deseamos calcular la derivada del producto de funciones derivables, $f(x)g(x)$, empleando la definición de la derivada. Observe que en el segundo paso, que aparece a continuación, estamos sumando y restando la misma cantidad: $f(x)g(x+h)$.

$$\begin{aligned}\frac{d[f(x)g(x)]}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\end{aligned}$$

Al tomar el límite a medida que $h \to 0$ obtenemos la regla del producto:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Regla del cociente

Sea $Q(x) = f(x)/g(x)$ el cociente de funciones derivables. Si se supone que $Q(x)$ es derivable, podemos usar la regla del producto para $f(x) = Q(x)g(x)$:

$$f'(x) = Q'(x)g(x) + Q(x)g'(x).$$

Al sustituir a $Q(x)$ obtenemos

$$f'(x) = Q'(x)g(x) + \frac{f(x)}{g(x)}g'(x).$$

Al despejar a $Q'(x)$ tenemos

$$Q'(x) = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)}{g(x)}g'(x)}{g(x)}.$$

Al multiplicar el numerador y el denominador por $g(x)$ para simplificar se obtiene la regla del cociente

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Problemas para determinar las fórmulas de derivadas

Para los problemas del 1 al 7, utilice la definición de la derivada para obtener los siguientes resultados.

1. Si $f(x) = 2x + 1$, entonces $f'(x) = 2$.
2. Si $f(x) = 5x^2$, entonces $f'(x) = 10x$.
3. Si $f(x) = 2x^2 + 3$, entonces $f'(x) = 4x$.
4. Si $f(x) = x^2 + x$, entonces $f'(x) = 2x + 1$.
5. Si $f(x) = 4x^2 + 1$, entonces $f'(x) = 8x$.
6. Si $f(x) = x^4$, entonces $f'(x) = 4x^3$. [Sugerencia: $(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$.]
7. Si $f(x) = x^5$, entonces $f'(x) = 5x^4$. [Sugerencia: $(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5$.]
8. (a) Utilice una gráfica de $g(h) = \dfrac{2^h - 1}{h}$ para explicar por qué se cree que $\lim_{h\to 0}\dfrac{2^h-1}{h} \approx 0.6931$.

   (b) Utilice la definición de la derivada y el resultado del inciso (a) para explicar por qué, si $f(x) = 2^x$, pensamos que $f'(x) \approx (0.6931)2^x$.
9. Utilice la definición de la derivada para demostrar que si $f(x) = C$, donde C es una constante, entonces $f'(x) = 0$.
10. Utilice la definición de la derivada para demostrar que si $f(x) = b + mx$, para las constantes m y b, entonces $f'(x) = m$.
11. Use la definición de la derivada para demostrar que si $f(x) = k\cdot u(x)$, donde k es una constante y $u(x)$ es una función, entonces $f'(x) = k\cdot u'(x)$.
12. Use la definición de la derivada para demostrar que si $f(x) = u(x) + v(x)$, para las funciones $u(x)$ y $v(x)$, entonces $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

ENFOQUE PRÁCTICO

DIFERENCIACIÓN

Encuentre las derivadas para las funciones de los problemas del 1 al 63. Suponga que a, b, c y k son constantes.

1. $f(t) = t^2 + t^4$

2. $g(x) = 5x^4$

3. $y = 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1$

4. $s(t) = 6t^{-2} + 3t^3 - 4t^{1/2}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 5\sqrt{x} - 7$

6. $P(t) = 100e^{0.05t}$

7. $f(x) = 5e^{2x} - 2 \cdot 3^x$

8. $P(t) = 1{,}000(1.07)^t$

9. $D(p) = e^{p^2} + 5p^2$

10. $y = t^2 e^{5t}$

11. $y = x^2\sqrt{x^2+1}$

12. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$

13. $s(t) = 8\ln(2t+1)$

14. $g(w) = w^2 \ln(w)$

15. $f(x) = 2^x + x^2 + 1$

16. $P(t) = \sqrt{t^2+4}$

17. $C(q) = (2q+1)^3$

18. $g(x) = 5x(x+3)^2$

19. $P(t) = be^{kt}$

20. $f(x) = ax^2 + bx + c$

21. $y = x^2\ln(2x+1)$

22. $f(t) = \left(e^t + 4\right)^3$

23. $f(x) = 5\,\mathrm{sen}(2x)$

24. $W(r) = r^2\cos r$

25. $g(t) = 3\,\mathrm{sen}(5t) + 4$

26. $y = e^{3t}\,\mathrm{sen}(2t)$

27. $y = 2e^x + 3\,\mathrm{sen}\,x + 5$

28. $f(t) = 3t^2 - 4t + 1$

29. $y = 17x + 24x^{1/2}$

30. $g(x) = -\frac{1}{2}(x^5 + 2x - 9)$

31. $f(x) = 5x^4 + \dfrac{1}{x^2}$

32. $y = \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$

33. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$

34. $y = \left(\dfrac{x^2+2}{3}\right)^2$

35. $g(x) = \mathrm{sen}(2-3x)$

36. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{3z}$

37. $q(r) = \dfrac{3r}{5r+2}$

38. $y = x\ln x - x + 2$

39. $j(x) = \ln(e^{ax} + b)$

40. $g(t) = \dfrac{t-4}{t+4}$

41. $h(w) = (w^4 - 2w)^5$

42. $h(w) = w^3\ln(10w)$

43. $f(x) = \ln(\mathrm{sen}\,x + \cos x)$

44. $w(r) = \sqrt{r^4+1}$

45. $h(w) = -2w^{-3} + 3\sqrt{w}$

46. $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+9}{x+3}}$

47. $v(t) = t^2e^{-ct}$

48. $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln x}$

49. $g(\theta) = e^{\mathrm{sen}\,\theta}$

50. $p(t) = e^{4t+2}$

51. $j(x) = \dfrac{x^3}{a} + \dfrac{a}{b}x^2 - cx$

52. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{\sqrt{z}}$

53. $h(r) = \dfrac{r^2}{2r+1}$

54. $g(x) = 2x - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3^x - e$

55. $f(t) = 2te^t - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

56. $w = \dfrac{5-3z}{5+3z}$

57. $f(x) = \dfrac{x^3}{9}(3\ln x - 1)$

58. $g(x) = \dfrac{x^2+\sqrt{x}+1}{x^{3/2}}$

59. $y = \left(x^2+5\right)^3\left(3x^3-2\right)^2$

60. $f(x) = \dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$

61. $w(r) = \dfrac{ar^2}{b+r^3}$

62. $H(t) = (at^2+b)e^{-ct}$

63. $g(w) = \dfrac{5}{(a^2-w^2)^2}$

Capítulo 4

USO DE LA DERIVADA

En este capítulo se utiliza la derivada para comprender el comportamiento de una función. Analizaremos cómo localizar sus valores máximo y mínimo, así como sus puntos de inflexión; de igual forma, veremos cómo analizar la relación entre los costos promedio y marginal.

Tal como mencionamos en el capítulo 2, las derivadas de una función y la propia función se relacionan entre sí de la siguiente manera:

- **Si $f' > 0$ en un intervalo, entonces f es creciente en dicho intervalo.**
- **Si $f' < 0$ en un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.**
- **Si $f'' > 0$ en un intervalo, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en dicho intervalo.**
- **Si $f'' < 0$ en un intervalo, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en ese intervalo.**

Con estos principios podremos hacer más cosas de las que realizamos en el capítulo 2, ya que ahora tenemos las fórmulas para las derivadas de las funciones elementales.

4.1 MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES

¿Qué nos indican las derivadas acerca de una función y su gráfica?

Cuando graficamos una función en una computadora o calculadora, con frecuencia sólo se aprecia una parte de la imagen. La información proporcionada por la primera y la segunda derivadas pueden ayudar a identificar las regiones que reflejan comportamientos interesantes.

Ejemplo 1 Utilice una computadora para dibujar una gráfica útil de la función

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52.$$

Solución Puesto que f es un polinomio cúbico, se espera una gráfica que tenga aproximadamente una forma de S. Al graficar esta función en $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$, tenemos las dos rectas casi verticales que se muestran en la figura 4.1. Sabemos que se puede obtener mucho más que esto, pero, ¿cómo determinar en dónde buscar?

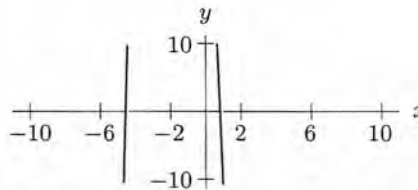
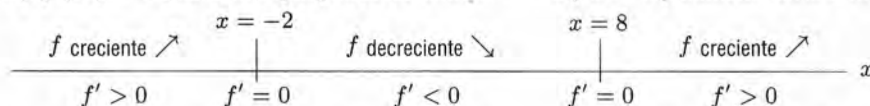


Figura 4.1. Gráfica poco útil de $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$.

Empleamos la derivada para determinar los puntos en los que la función es creciente y en los que es decreciente. La derivada de f es

$$f'(x) = 3x^2 - 18x - 48.$$

Para hallar en dónde $f' > 0$ o $f' < 0$, primero localizamos los puntos para los que $f' = 0$, es decir, donde $3x^2 - 18x - 48 = 0$. Al factorizar, obtenemos $3(x - 8)(x + 2) = 0$, por lo que $x = -2$ o $x = 8$. Debido a que $f' = 0$ *sólo* en $x = -2$ y $x = 8$ y ya que f' es continua, f' no puede cambiar de signo en alguno de los tres intervalos $x < -2$, o $-2 < x < 8$, u $8 < x$. ¿Cómo podemos decir cuál es el signo de f' en cada uno de estos intervalos? La forma más fácil es escoger un punto y sustituirlo en f'. Por ejemplo, puesto que $f'(-3) = 33 > 0$, sabemos que f' es positiva en $x < -2$, por tanto, f es creciente en $x < -2$. De manera similar, puesto que $f'(0) = -48$ y $f'(10) = 72$, sabemos que f decrece entre $x = -2$ y $x = 8$ y aumenta en $x > 8$. En resumen:



Encontramos que $f(-2) = 104$ y $f(8) = -396$. En consecuencia, en el intervalo $-2 < x < 8$, la función decrece de 104 a un mínimo de -396. (Ahora vemos por qué no apareció gran parte de la gráfica en la calculadora.) Es fácil obtener un punto más sobre la gráfica: la ordenada y en el origen, $f(0) = 52$. Con sólo estos tres puntos podemos tener una gráfica de mayor utilidad. Si ajustamos la ventana de la calculadora a $-10 \leq x \leq 20$ y $-400 \leq y \leq 400$, obtenemos la figura 4.2, que arroja más luz sobre el comportamiento de $f(x)$ que la gráfica de la figura 4.1.

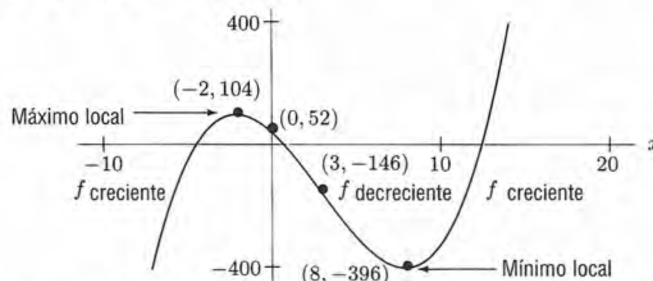


Figura 4.2. Gráfica útil de $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$. Observe que las escalas en los ejes x y y son distintas.

Máximos y mínimos locales

Es frecuente que nos interesen puntos tales como el máximo local y el mínimo local, que se indican en la figura 4.2. Tenemos la siguiente definición:

> Supongamos que p es un punto en el dominio de f:
> - f tiene un **mínimo local** en p si $f(p)$ es menor o igual que los valores de f para los puntos cerca de p.
> - f tiene un **máximo local** en p si $f(p)$ es mayor o igual que los valores de f para los puntos cerca de p.

Empleamos el adjetivo "local" porque describimos sólo lo que ocurre cerca de p.

¿Cómo detectamos un máximo local o un mínimo local?

En el ejemplo anterior, los puntos $x = -2$ y $x = 8$, donde $f'(x) = 0$, desempeñaron un papel clave para guiarnos en la búsqueda de máximos y mínimos locales. Damos un nombre a estos puntos:

> Para cualquier función f, un punto p en el dominio de f donde $f'(p) = 0$ o $f'(p)$ esté indefinida se llama **punto crítico** de la función. Además, el punto $(p, f(p))$ en la gráfica de f también se denomina punto crítico. Un **valor crítico** de f es el valor, $f(p)$, de la función en un punto crítico, p.

Observe que el "punto crítico de f" puede referirse ya sea a puntos en el dominio de f o a puntos sobre la gráfica de f. Por el contexto, usted identificará el significado.

Geométricamente, en un punto crítico donde $f'(p) = 0$, la recta tangente a la gráfica de f en p es horizontal. En un punto crítico en donde $f'(p)$ no esté definida, no hay tangente horizontal a la gráfica; hay una tangente vertical o ninguna tangente en absoluto. (Por ejemplo, $x = 0$ es un punto crítico para la función de valor absoluto $f(x) = x$.) Sin embargo, la mayoría de las funciones con las que trabajaremos serán derivables en todas partes y, por tanto, la mayor parte de los puntos críticos serán de la forma $f'(p) = 0$.

Los puntos críticos dividen el dominio de f en intervalos en los cuales el signo de la derivada permanece igual, ya sea positivo o negativo. Entonces, si f está definida en el intervalo entre dos puntos críticos sucesivos, su gráfica no puede cambiar de dirección en ese intervalo; o asciende o desciende. Tenemos el siguiente resultado:

> Si una función continua en un intervalo (su dominio) tiene un máximo o mínimo local en p, entonces p es un punto crítico o un punto extremo del intervalo.

Una función puede tener cualquier número de puntos críticos o ninguno (véanse las figuras 4.3 a 4.5).

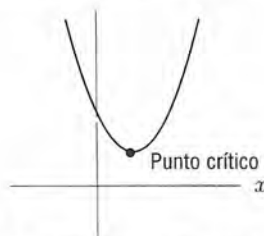


Figura 4.3. Una función cuadrática: un punto crítico.

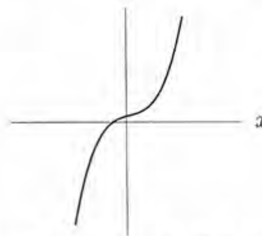


Figura 4.4. $f(x) = x^3 + x + 1$: no hay puntos críticos.



Figura 4.5. Muchos puntos críticos.

Criterio para la determinación de máximos y mínimos locales

Si f' tiene signos diferentes en cualquier lado de un punto crítico p con $f'(p) = 0$, entonces la gráfica cambia de dirección en p y se parece a las ilustradas en la figura 4.6. Tenemos los siguientes criterios:

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos locales

Supongamos que p es un punto crítico de una función continua f.
- Si f cambia de decreciente a creciente en p, entonces f tiene un mínimo local en p.
- Si f cambia de creciente a decreciente en p, entonces f tiene un máximo local en p.

En forma alternativa, la concavidad de la gráfica de f ofrece otra manera de distinguir entre los máximos y mínimos locales:

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos locales

Supongamos que p es un punto crítico de una función continua f y $f'(p) = 0$.
- Si f es cóncava hacia arriba en p, entonces tiene un mínimo local en p.
- Si f es cóncava hacia abajo en p, entonces tiene un máximo local en p.

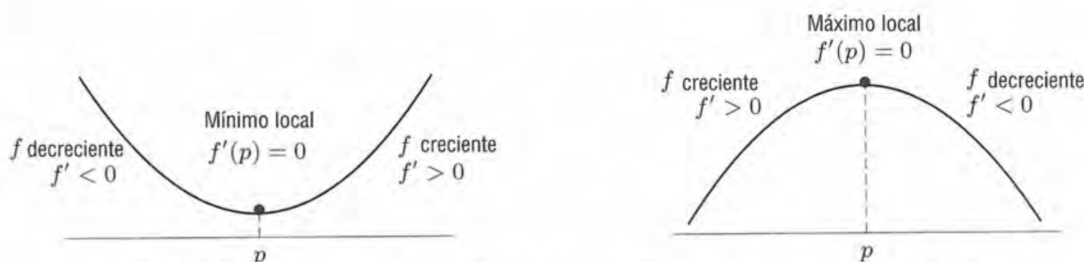


Figura 4.6. Cambios en la dirección en un punto crítico, p. Máximos y mínimos locales.

Ejemplo 2 Utilice la prueba de la segunda derivada para comprobar que $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$ tiene un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 8$.

Solución En el ejemplo 1, calculamos $f'(x) = 3x^2 - 18x - 48 = 3(x - 8)(x + 2)$, por tanto $f'(8) = f'(-2) = 0$. Al derivar nuevamente tenemos $f''(x) = 6x - 18$. Puesto que $f''(8) = 6 \cdot 8 - 18 = 30$ y $f''(-2) = 6(-2) - 18 = -30$, la prueba de la segunda derivada confirma que $x = 8$ es un mínimo local y $x = -2$ es un máximo local.

Ejemplo 3 (a) Grafique una función f con las siguientes propiedades:
- $f(x)$ tiene un punto crítico en $x = 2$ y en $x = 5$.
- $f'(x)$ es positiva a la izquierda de 2 y positiva a la derecha de 5.
- $f(x)$ es negativa entre 2 y 5.

(b) Identifique los puntos críticos como máximos locales, mínimos locales, o ninguno de los dos.

Solución (a) Sabemos que $f(x)$ es creciente cuando $f'(x)$ es positiva, y $f(x)$ es decreciente cuando $f'(x)$ es negativa. La función es creciente a la izquierda de 2 y creciente a la derecha de 5 y es decreciente entre 2 y 5. En la figura 4.7 se muestra una posible gráfica.

(b) Se ve que la función tiene un máximo local en $x = 2$ y un mínimo local en $x = 5$.

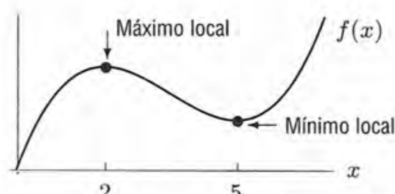


Figura 4.7. Función con puntos críticos en $x = 2$ y en $x = 5$.

¡Atención!

No todos los puntos críticos de una función son máximos o mínimos locales. Por ejemplo, considere $f(x) = x^3$ cuya gráfica aparece en la figura 4.8. La derivada es $f'(x) = 3x^2$, por lo que $x = 0$ es un punto crítico. Pero, $f'(x) = 3x^2$ es positiva a ambos lados de $x = 0$, por tanto, f es creciente a ambos lados de $x = 0$. No hay máximo local ni mínimo local para $f(x)$ en $x = 0$.

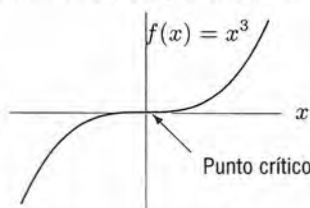


Figura 4.8. Un punto crítico en el que no hay máximo ni mínimo locales.

Ejemplo 4 El valor de una inversión en el tiempo t está dada por $S(t)$. La razón de cambio, $S'(t)$, del valor de la inversión se muestra en la figura 4.9.

(a) ¿Cuáles son los puntos críticos de la función $S(t)$?

(b) Identifique cada punto crítico como un máximo local, un mínimo local, o ninguno de los dos.

(c) Explique el significado financiero de cada punto crítico.

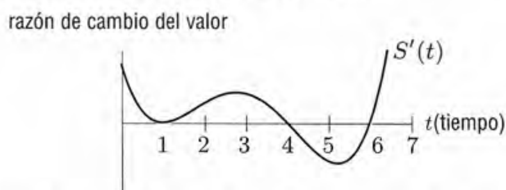


Figura 4.9. Gráfica de $S'(t)$, la razón de cambio del valor de la inversión.

Solución **(a)** Los puntos críticos de S se presentan en los tiempos t, para los cuales $S'(t) = 0$. En la figura 4.9 se observa que $S'(t) = 0$ en $t = 1$, 4 y 6, por lo que los puntos críticos están en $t = 1$, 4 y 6.

(b) En la figura 4.9 se aprecia que $S'(t)$ es positiva a la izquierda de 1 y entre 1 y 4, que es negativa entre 4 y 6 y que $S'(t)$ es positiva a la derecha de 6. Por consiguiente, $S(t)$ es creciente a la izquierda de 1 y entre 1 y 4 (con una pendiente igual a cero en 1), creciente entre 4 y 6 y de nuevo creciente a la derecha de 6. En la figura 4.10 se muestra una posible gráfica de $S(t)$. Observe que S no tiene ningún máximo local o mínimo local en el punto crítico $t = 1$, pero tiene un máximo local en $t = 4$ y un mínimo local en $t = 6$.

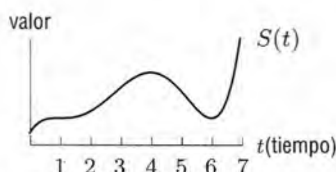


Figura 4.10. Posible gráfica de la función que representa el valor de la inversión en el tiempo t.

(c) En el tiempo $t = 1$, la inversión momentáneamente dejó de incrementar su valor, aunque, después de este punto, comenzó a aumentar de inmediato. En $t = 4$, el valor alcanzó un máximo y comenzó a disminuir. En $t = 6$ empezó a aumentar de nuevo.

Ejemplo 5 Encuentre el punto crítico de la función $f(x) = x^2 + bx + c$. ¿Cuál es su importancia gráfica?

Solución Como $f'(x) = 2x + b$, el punto crítico x satisface la ecuación: $2x + b = 0$. Por tanto, el punto crítico se encuentra en $x = -b/2$. La gráfica de f es una parábola y el punto crítico es su vértice. Véase la figura 4.11.

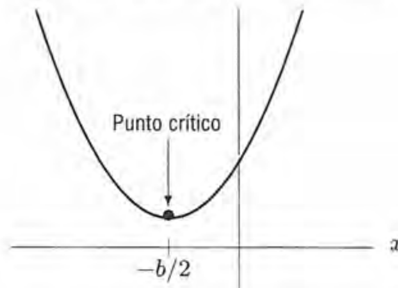
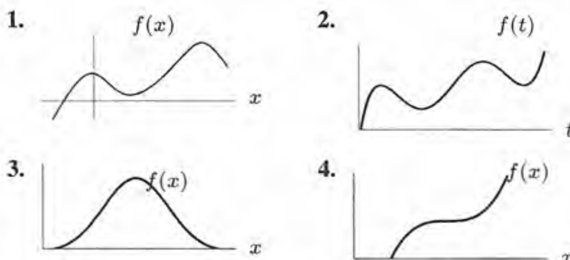


Figura 4.11. Punto crítico de la parábola $f(x) = x^2 + bx + c$. (Graficado con $b, c > 0$.)

Problemas para la sección 4.1

Para los problemas del 1 al 4, indique todos los puntos críticos de la función f. ¿Cuántos puntos críticos hay? Identifique cada uno como un máximo local, un mínimo local, o ninguno de los dos.



5. La función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$ tiene un punto crítico en $x = 1$. Utilice la prueba de la segunda derivada para identificarlo como máximo local o mínimo local.

6. Durante una enfermedad una persona tiene fiebre. Su temperatura aumentó en forma constante durante 18 horas, y luego bajó de manera constante durante 20 horas. ¿En qué momento tuvo lugar un punto crítico para su temperatura como una función del tiempo?

7. El primero de julio el precio de una acción alcanzó un punto crítico. ¿Cómo podría haber cambiado el precio alrededor del primero de julio?

8. La demanda de los consumidores para cierto producto cambia a través del tiempo. En la siguiente tabla se muestra la razón de cambio de esta demanda, $f'(t)$, en unidades/semana, con t dado en semanas.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f'(t)$	12	10	4	−2	−3	−1	3	7	11	15	10

(a) ¿Cuándo es creciente la demanda de este producto? ¿Cuándo es decreciente?

(b) Aproximadamente, ¿en qué punto la demanda tiene un máximo local? ¿Un mínimo local?

Utilizando una calculadora o una computadora, grafique las funciones de los problemas 9 al 14. Describa brevemente, con palabras, las características interesantes de la gráfica, incluyendo la localización de los puntos críticos y los puntos en los que la función es creciente/decreciente. Después utilice las derivadas y el álgebra para explicar la forma de la gráfica.

9. $f(x) = x^3 - 6x + 1$

10. $f(x) = x^3 + 6x + 1$

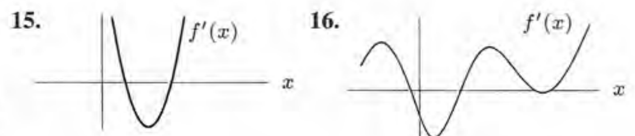
11. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

12. $f(x) = e^x - 10x$

13. $f(x) = x \ln x, \quad x > 0$

14. $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$

Los problemas 15 y 16 muestran la gráfica de una función derivada, f'. Indique en cada gráfica los valores de x que sean puntos críticos de la función f. Identifique cada punto crítico como un máximo local, un mínimo local, o como ninguno de ellos.



17. (a) Trace la gráfica de una función con dos mínimos locales y sólo un máximo local.

(b) Grafique una función con dos puntos críticos. Uno de estos puntos críticos debe ser un mínimo local y el otro no debe ser ni un máximo local ni un mínimo local.

En los problemas 18 y 19 determine las constantes a y b de tal modo que el mínimo de la parábola $f(x) = x^2 + ax + b$ esté en el punto dado. [*Sugerencia*: Comience por encontrar el punto crítico en términos de a.]

18. $(3, 5)$ **19.** $(-2, -3)$

20. Encuentre el valor de a de forma que la función $f(x) = xe^{ax}$ tenga un punto crítico en $x = 3$.

21. Determine las constantes a y b en la función $f(x) = axe^{bx}$ de tal manera que $f(\frac{1}{3}) = 1$ y la función tenga un máximo local en $x = \frac{1}{3}$.

22. Grafique dos funciones continuas f y g, cada una de las cuales tiene exactamente cinco punto críticos, los puntos del A al E en la figura 4.12 y que satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to -\infty$ y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$

(b) $g(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$

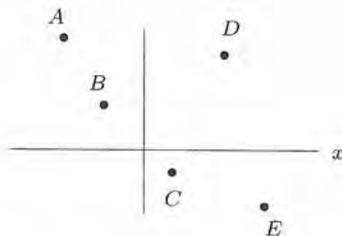


Figura 4.12.

23. Suponga que f tiene una derivada continua cuyos valores están dados en la siguiente tabla.

(a) Encuentre las abscisas x de los puntos críticos de f para $0 \le x \le 10$.

(b) Para cada uno de los puntos críticos, indique si es un máximo local de f, un mínimo local, o ninguno de ellos.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f'(x)$	5	2	1	−2	−5	−3	−1	2	3	1	−1

24. Suponga que f tiene una derivada continua. A partir de los valores de $f'(\theta)$ en la siguiente tabla, calcule los valores de θ con $1 < \theta < 2.1$ en los que $f(\theta)$ tiene un máximo o un mínimo locales. Identifique cuál es cuál.

θ	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f'(\theta)$	2.4	0.3	−2.0	−3.5	−3.3	−1.7
θ	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1
$f'(\theta)$	0.8	2.8	3.6	2.8	0.7	−1.6

25. (a) Con una computadora o una calculadora grafique $f(\theta) = \theta - \operatorname{sen}\theta$. ¿Puede decir si la función tiene algún cero en el intervalo $0 \le \theta \le 1$?

(b) Calcule f'. ¿Qué le indica el signo de f' sobre los ceros de f en el intervalo $0 \le \theta \le 1$?

26. La función f tiene derivada en todos los puntos y sólo un punto crítico en $x = 3$. En los incisos del (a) al (d) se indican condiciones adicionales. En cada caso, decida si $x = 3$ es un máximo local, un mínimo local, o ninguno. Explique su razonamiento. Trace las gráficas posibles para los cuatro casos.

(a) $f'(1) = 3$ y $f'(5) = -1$.

(b) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$

(c) $f(1) = 1, f(2) = 2, f(4) = 4, f(5) = 5$

(d) $f'(2) = -1, f(3) = 1, f(x) \to 3$ cuando $x \to \infty$

27. ¿Cuántos ceros reales tiene la ecuación $x^5 + x + 7 = 0$? ¿Cómo lo sabe?
[*Sugerencia*: ¿Cuántos puntos críticos tiene esta función?]

4.2 PUNTOS DE INFLEXIÓN

Concavidad y puntos de inflexión

El análisis de los puntos de la gráfica de una función en los que la pendiente cambia de signo nos conduce a los puntos críticos. Ahora estudiaremos los puntos de la gráfica en los que cambia la concavidad, ya sea de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

> Un punto en el que la gráfica de una función f cambia de concavidad se llama **punto de inflexión** de f.

Las palabras "punto de inflexión de f" pueden referirse ya sea a un punto del dominio de f o a un punto de la gráfica de f. El contexto del problema dirá a cuál se refiere.

¿Cómo localizar un punto de inflexión?

Como la concavidad de la gráfica de f cambia en un punto de inflexión, el signo de f'' cambia en ese punto: es positivo en un lado del punto de inflexión y negativo en el otro. Por consiguiente, en el punto de inflexión, f'' es igual a cero o no está definida (véase la figura 4.13).

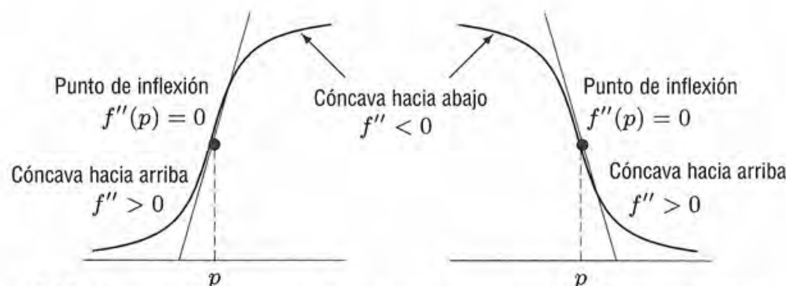


Figura 4.13. Cambio en la concavidad (de positiva a negativa o viceversa) en el punto p.

Ejemplo 1 Encuentre los puntos de inflexión de $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$.

Solución En la figura 4.14 parte de la gráfica de f es cóncava hacia arriba y parte es cóncava hacia abajo, de modo que la función debe tener un punto de inflexión. Sin embargo, al observar la gráfica es difícil localizar exactamente al punto de inflexión. Para encontrar exactamente el punto de inflexión, calculamos el punto en el que la segunda derivada es igual a cero.[1] Puesto que $f'(x) = 3x^2 - 18x - 48$,

$$f''(x) = 6x - 18 \quad \text{por tanto} \quad f''(x) = 0 \quad \text{cuando} \quad x = 3.$$

La gráfica de $f(x)$ cambia de concavidad en $x = 3$, de modo que $x = 3$ es un punto de inflexión.

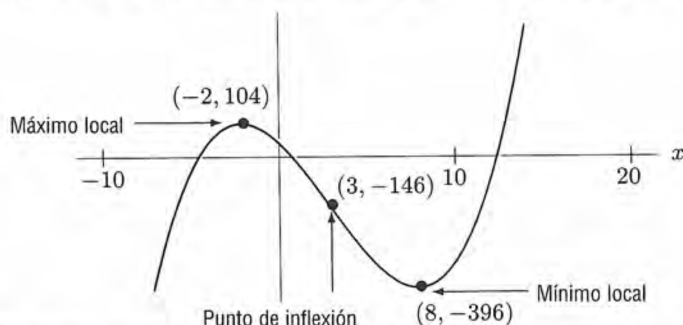


Figura 4.14. Gráfica de $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$ que muestra el punto de inflexión en $x = 3$.

Ejemplo 2 Trace la gráfica de una función f con las siguientes propiedades: f tiene un punto crítico en $x = 4$ y un punto de inflexión en $x = 8$; el valor de f' es negativo a la izquierda de 4 y positivo a la derecha de 4; el valor de f'' es positivo a la izquierda de 8 y negativo a la derecha de 8.

Solución Debido a que f' es negativa a la izquierda de 4 y positiva a la derecha de 4, el valor de $f(x)$ es decreciente a la izquierda de 4 y creciente a la derecha de 4. Los valores de f'' nos dicen que la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba a la izquierda de 8 y cóncava hacia abajo a la derecha de 8. En la figura 4.15 se da una posible gráfica.



Figura 4.15. Función con un punto crítico en $x = 4$ y un punto de inflexión en $x = 8$.

---

[1]Para un polinomio, la segunda derivada no puede estar indefinida.

Ejemplo 3 La figura 4.16 muestra una población que crece hacia una población límite, L. Hay un punto de inflexión en la gráfica en el punto donde la población alcanza $L/2$. ¿Cuál es la importancia del punto de inflexión para la población?

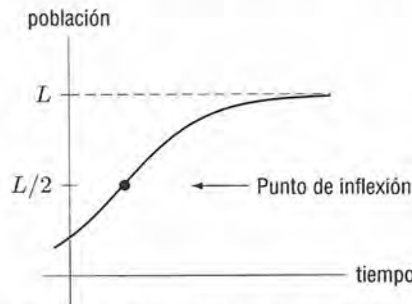


Figura 4.16. Punto de inflexión de la gráfica de una población que crece hacia una población limite, L.

Solución En los años anteriores al punto de inflexión, la población aumenta cada vez más rápido en cada año. En los años posteriores al punto de inflexión, la población aumenta cada vez más lentamente cada año. En el punto de inflexión, la población aumenta lo más rápido posible.

Ejemplo 4 **(a)** ¿Cuántos puntos críticos y cuántos puntos de inflexión tiene la función $f(x) = xe^{-x}$?
(b) Utilice derivadas para localizar con exactitud los puntos críticos y los puntos de inflexión.



Figura 4.17. Gráfica de $f(x) = xe^{-x}$.

Solución **(a)** La figura 4.17 muestra la gráfica de $f(x) = xe^{-x}$. Parece tener un punto crítico, que es un máximo local. ¿Existe algún punto de inflexión? Como la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en el punto crítico y cóncava hacia arriba para x grande, la gráfica de la función cambia de concavidad, de modo que debe haber un punto de inflexión a la derecha del punto crítico.

(b) Para hallar el punto crítico, encuentre al punto donde la primera derivada de f es cero o esté indefinida. La regla del producto da

$$f'(x) = x(-e^{-x}) + (1)(e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}.$$

Tenemos que $f'(x) = 0$ cuando $x = 1$, por lo que el punto crítico está en $x = 1$. Para localizar al punto de inflexión, se determina el punto en el que la segunda derivada de f cambia de signo. Al emplear la regla del producto en la primera derivada, tenemos

$$f''(x) = (1 - x)(-e^{-x}) + (-1)(e^{-x}) = (x - 2)e^{-x}.$$

Tenemos que $f''(x) = 0$ cuando $x = 2$. Puesto que $f''(x) > 0$ para $x > 2$ y $f''(x) < 0$ para $x < 2$, la concavidad cambia de signo en $x = 2$. Por tanto, el punto de inflexión está en $x = 2$.

¡Atención!

No todos los puntos x en los que $f''(x) = 0$ (o f'' no esté definida) son puntos de inflexión (así como no todos los puntos en los que $f' = 0$ son máximos o mínimos locales). Por ejemplo, $f(x) = x^4$ tiene a

$f''(x) = 12x^2$ por lo que $f''(0) = 0$, pero $f'' > 0$ cuando $x > 0$ y cuando $x < 0$, de ahí que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en ambos lados de $x = 0$. No hay *ningún* cambio de concavidad en $x = 0$ (véase la figura 4.18).



Figura 4.18. Gráfica de $f(x) = x^4$.

Ejemplo 5 Supongamos que se vierte agua en el florero de la figura 4.19 a una razón constante medida en litros por minuto. Trace una gráfica de $y = f(t)$, la profundidad del agua respecto al tiempo, t. Explique la concavidad e indique los puntos de inflexión.

Solución Observe que el volumen de agua en el florero aumenta a una razón constante.

Al principio, el nivel del agua, y, aumenta muy lentamente debido a que la base del florero es amplia y por ello se necesita mucha agua para aumentar la profundidad, pero a medida que el florero se hace angosto aumenta la razón a la que sube el nivel del agua. Esto significa que de inicio y aumenta a una razón creciente y la gráfica es cóncava hacia arriba. El nivel del agua aumenta lo más rápido posible, por lo que la razón de cambio de la profundidad y está a un punto máximo cuando el agua llega a la mitad del florero, donde el diámetro es más pequeño; éste es el punto de inflexión (véase la figura 4.20). Después de eso, la razón a la que cambia el nivel del agua comienza a decrecer y, por tanto, la gráfica es cóncava hacia abajo.



Figura 4.19. Un florero.

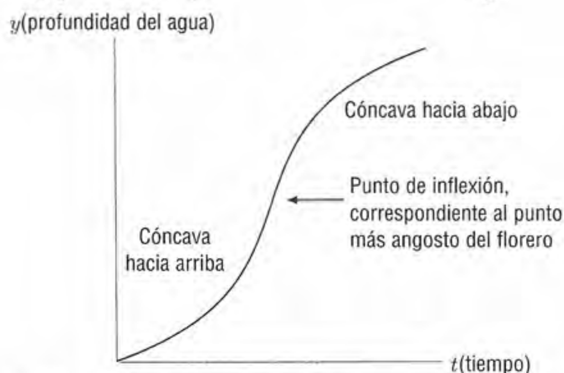


Figura 4.20. Gráfica de la profundidad del agua en el florero, y, respecto al tiempo, t.

Ejemplo 6 ¿Cuál es la concavidad de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$?

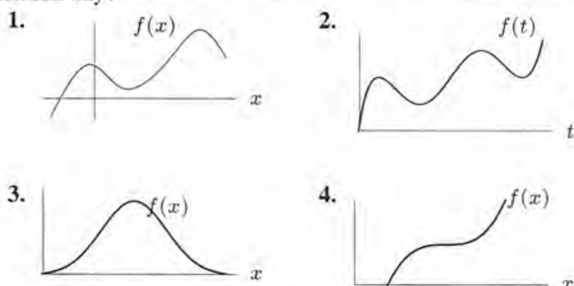
Solución Tenemos $f'(x) = 2ax + b$ y $f''(x) = 2a$. La segunda derivada de f tiene el mismo signo que a. Si $a > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba en todos los puntos, una parábola que se abre hacia arriba. Si $a < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo en todos los puntos, una parábola que se abre hacia abajo. (Véase la figura 4.21.)



Figura 4.21. Concavidad de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Problemas para la sección 4.2

En los problemas del 1 al 4, indique las localizaciones aproximadas de todos los puntos de inflexión. ¿Cuántos puntos de inflexión hay?



5. Encuentre los puntos de inflexión de $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 2$.

En cada uno de los problemas del 6 al 11, utilice la primera derivada para hallar todos los puntos críticos y la segunda derivada para identificar todos los puntos de inflexión. Utilice una gráfica para identificar cada uno de los puntos críticos como uno máximo local, un mínimo local, o ninguno de éstos.

6. $f(x) = x^2 - 5x + 3$
7. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$
8. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6$
9. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$
10. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$
11. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$
12. Grafique una función con sólo un punto crítico (en $x = 5$) y un punto de inflexión (en $x = 10$). Marque el punto crítico y el punto de inflexión en su gráfica.
13. **(a)** Grafique una función con dos máximos locales y dos mínimos locales.
    (b) ¿Cuál es el mínimo número de puntos de inflexión que debe tener esta función? Indique los puntos de inflexión.
14. En 1774, el capitán James Cook dejó 10 conejos en una pequeña isla del Pacífico. La población de conejos se aproxima mediante
$$P(t) = \frac{2{,}000}{1 + e^{5.3 - 0.4t}}$$
con t medida en años desde 1774. Usando una calculadora o computadora:
    (a) Trace una gráfica de P. ¿El nivel de la población disminuye?
    (b) Calcule cuándo la población de conejos creció más rápido. ¿Qué tan grande era la población en ese tiempo?
    (c) Encuentre el punto de inflexión en la gráfica y explique su importancia para la población de conejos.
    (d) ¿Qué causas naturales podrían llevar a la forma de la gráfica de P?
15. Indique, en la figura 4.22, aproximadamente dónde están los puntos de inflexión de $f(x)$ si la grafica muestra
    (a) la función $f(x)$. **(b)** la derivada $f'(x)$.
    (c) la segunda derivada $f''(x)$.

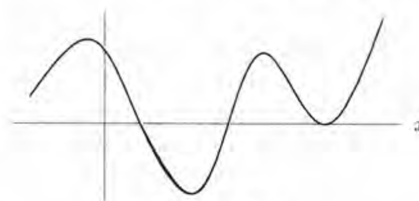


Figura 4.22.

16. Trace la gráfica de una función que tenga un punto crítico y un punto de inflexión en el mismo lugar.
17. Para $f(x) = x^3 - 18x^2 - 10x + 6$, encuentre algebraicamente el punto de inflexión. Grafique la función con una calculadora o computadora y confirme su respuesta.
18. Durante una inundación, el nivel del agua de un río primero subió muy rápido, luego subió cada vez más lentamente hasta que llegó a su punto máximo; después, bajó al nivel que tenía antes de la inundación. Considere la profundidad del agua como una función del tiempo.
    (a) El tiempo para el cual se alcanza el máximo nivel de agua, ¿es un punto crítico o un punto de inflexión?
    (b) ¿El momento en que el agua empezó a subir con más lentitud, ¿es un punto crítico o un punto de inflexión?
19. Cuando me levanté en la mañana me puse sólo una chamarra ligera porque, a pesar de que la temperatura estaba bajando, me pareció que no bajaría demasiado. Sin embargo, me equivoqué. Hacia el mediodía empezó a soplar viento del norte y la temperatura comenzó a bajar cada vez más rápido. Lo peor fue como a las 6:00 p. m., pero, afortunadamente, la temperatura comenzó a subir.
    (a) ¿Cuándo existió un punto crítico en la gráfica de la temperatura como una función del tiempo?
    (b) ¿Cuándo existió un punto de inflexión en la gráfica de la temperatura como una función del tiempo?
20. **(a)** El agua fluye a velocidad constante hacia un recipiente cilíndrico que está parado verticalmente. Trace una gráfica que muestre la profundidad del agua respecto al tiempo.
    (b) El agua fluye a una razón constante hacia un recipiente en forma cónica que está apoyado sobre su vértice. Dibuje una gráfica que muestre la profundidad del agua respecto al tiempo.
21. Si el agua fluye a una razón constante (es decir, volumen constante por unidad de tiempo) en una urna griega, como la de la figura 4.23, dibuje una gráfica de la profundidad del agua respecto al tiempo. Marque en la gráfica el tiempo en que el agua alcanza el punto más ancho de la urna.



Figura 4.23.



Figura 4.24.

22. Si el agua fluye a una razón constante (es decir, volumen constante por unidad de tiempo), en el florero de la figura 4.24 de la página 175, dibuje una gráfica de la profundidad del agua respecto al tiempo. Marque en la gráfica el tiempo en que el agua llega a la esquina del florero.

23. Suponga que el polinomio f tiene exactamente dos máximos locales y un mínimo local, y que éstos son los únicos puntos críticos de f.

(a) Trace una posible gráfica de f.

(b) ¿Cuál es el número máximo de ceros que f puede tener?

(c) ¿Cuál es el número mínimo de ceros que f puede tener?

(d) ¿Cuál es el número mínimo de puntos de inflexión que f puede tener?

(e) ¿Cuál es el menor grado que f puede tener?

(f) Encuentre una fórmula posible para $f(x)$.

24. Para la función, f, dada en la gráfica de la figura 4.25:

(a) Trace $f'(x)$.

(b) ¿Dónde cambia de signo $f'(x)$?

(c) ¿Dónde tiene $f'(x)$ máximos o mínimos locales?

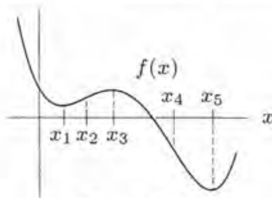


Figura 4.25.

25. Con su respuesta al problema 24 como guía, escriba un párrafo breve (empleando enunciados completos) que describa las relaciones entre las siguientes características de una función f:

(a) Los máximos y mínimos locales de f.

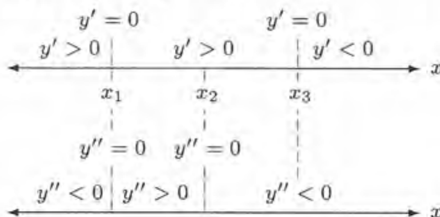
(b) Los puntos en que la gráfica de f cambia de concavidad.

(c) Los cambios de signo de f'.

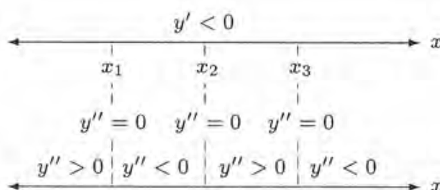
(d) Los máximos y mínimos locales de f'.

Para los problemas del 26 al 29 trace una posible gráfica de $y = f(x)$, utilizando la información que se ofrece sobre las derivadas $y' = f'(x)$ y $y'' = f''(x)$. Suponga que la función está definida y es continua para toda x real.

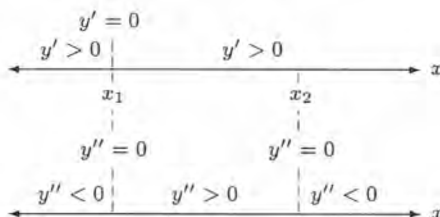
26.



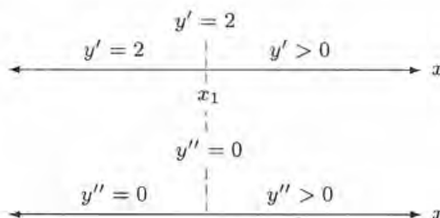
27.



28.



29.



4.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS GLOBALES

Máximos y mínimos globales

Las técnicas para la búsqueda de los valores máximos y mínimos constituyen el campo llamado *optimización*. Los máximos y mínimos locales se presentan donde una función toma valores mayores o menores que en los puntos vecinos. Sin embargo, con frecuencia tenemos interés en puntos en que la función es mayor o menor que en todos los puntos restantes. Por ejemplo, una compañía que trata de maximizar sus ganancias puede hacer esto al minimizar sus costos. Demos la siguiente definición:

> Para cualquier función f:
> - f tiene un **mínimo global** en p si $f(p)$ es menor que o igual que todos los valores de f.
> - f tiene un **máximo global** en p si $f(p)$ es mayor que o igual que todos los valores de f.

¿Cómo encontramos máximos y mínimos globales?

Si f es una función continua definida en un intervalo $a \leq x \leq b$ (incluyendo sus puntos extremos), la figura 4.26 muestra que el máximo o mínimo global de f se presenta en un máximo o en un mínimo local, respectivamente, o en uno de los puntos extremos del intervalo, $x = a$ o $x = b$.

> **Para hallar el mínimo y el máximo globales de una función continua en un intervalo que incluya los puntos extremos:** compare los valores de la función en todos los puntos críticos en el intervalo y en los puntos extremos.

¿Qué pasa si la función continua está definida en un intervalo $a < x < b$ (excluyendo sus puntos extremos), o en toda la recta real que no tiene puntos extremos? La función graficada en la figura 4.27 no tiene ningún máximo global debido a que la función no tiene un valor máximo. El mínimo global de esta función coincide con uno de los mínimos locales y se indica en la gráfica. Una función definida en toda la recta real o en un intervalo que excluya los puntos extremos puede o no tener un máximo global o un mínimo global.

> **Para hallar el máximo y el mínimo globales de una función en un intervalo que excluye puntos extremos o en toda la recta real:** encuentre los valores de la función en todos los puntos críticos y trace una gráfica.

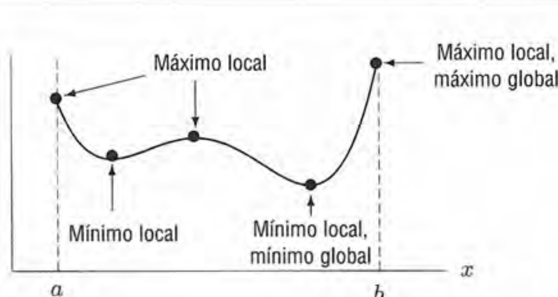


Figura 4.26. Máximo y mínimo globales en el dominio de un intervalo, $a \leq x \leq b$.

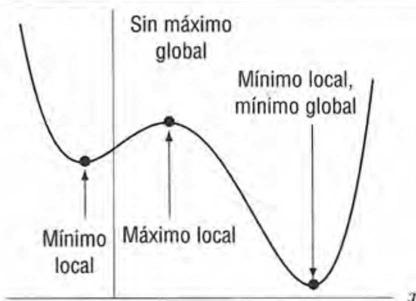


Figura 4.27. Máximo y mínimo globales en toda la recta real.

Ejemplo 1 Encuentre los máximos y mínimos globales de $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$ en el intervalo $-5 \leq x \leq 14$.

Solución Anteriormente calculamos los puntos críticos de esta función usando

$$f'(x) = 3x^2 - 18x - 48 = 3(x+2)(x-8),$$

de modo que $x = -2$ y $x = 8$ son puntos críticos. Como los máximos y mínimos globales se presentan en un punto crítico o en un punto extremo del intervalo, evaluamos f en estos cuatro puntos:

$$f(-5) = -58, \qquad f(-2) = 104, \qquad f(8) = -396, \qquad f(14) = 360.$$

Si comparamos estos cuatro valores, vemos que el máximo global es 360 y se presenta en $x = 14$, y que el mínimo global es -396 y ocurre en $x = 8$. Véase la figura 4.28.

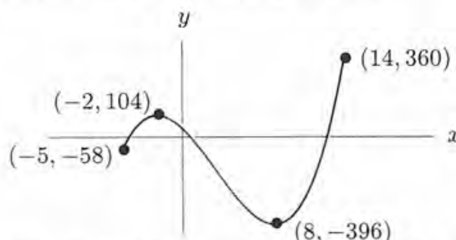


Figura 4.28. Máximo y mínimo globales en el intervalo $-5 \leq x \leq 14$.

Ejemplo 2 Para el tiempo, $t \geq 0$, en días, la razón a la que se realiza la fotosíntesis en la hoja de una planta, representada por la razón a la que se produce el oxígeno, se aproxima por medio de[2]

$$p(t) = 100(e^{-0.02t} - e^{-0.1t}).$$

¿En qué punto se realiza más rápidamente la fotosíntesis? ¿Por qué?

Solución Para determinar el valor del máximo global de $p(t)$, primero localizamos los puntos críticos. Se deriva, se iguala a cero y se despeja a t:

$$\begin{aligned} p'(t) = 100(-0.02e^{-0.02t} + 0.1e^{-0.1t}) &= 0 \\ -0.02e^{-0.02t} &= -0.1e^{-0.1t} \\ \frac{e^{-0.02t}}{e^{-0.1t}} &= \frac{0.1}{0.02} \\ e^{-0.02t+0.1t} &= 5 \\ e^{0.08t} &= 5 \\ 0.08t &= \ln 5 \\ t &= \frac{\ln 5}{0.08} = 20.12 \text{ días.} \end{aligned}$$

Al derivar de nuevo, obtenemos

$$p''(t) = 100(0.0004e^{-0.02t} - 0.01e^{-0.1t})$$

y al sustituir $t = 20.12$ obtenemos $p''(20.12) = -0.107$, por tanto, $t = 20.12$ es un máximo local. Sin embargo, sólo hay un punto crítico, por lo que este máximo local es el máximo global. Véase la figura 4.29. Cuando $t = 20.12$ días, la razón, en unidades de oxígeno por unidad de tiempo, es

$$p(20.12) = 100\left(e^{-0.02(20.12)} - e^{-0.1(20.12)}\right) = 53.50.$$

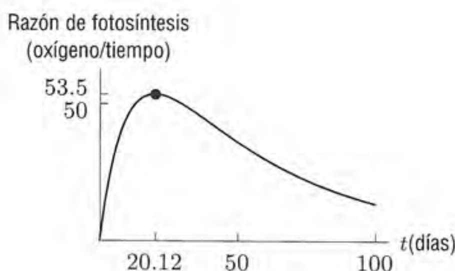


Figura 4.29.

Un ejemplo gráfico: reducción del consumo de gasolina

A continuación presentaremos un ejemplo en el que la función está dada gráficamente y los valores óptimos se obtienen a partir de la gráfica. Usted ya sabe cómo evaluar los valores óptimos de $f(x)$ a partir de una gráfica de $f(x)$, es decir, leer los valores máximos y mínimos. En este ejemplo veremos cómo evaluar el valor óptimo de la cantidad $f(x)/x$ a partir de una gráfica de $f(x)$ respecto a x.

[2]Ejemplos adaptados de Gentry, Rodney, *Introduction to Calculus for the Biological and Health Sciences*, Addison Wesley, 1978.

La cuestión que queremos investigar es cómo ajustar la velocidad de manejo para maximizar la eficiencia del combustible.[3] Se supone que el consumo de gasolina, g (en galones/hora), como función de la velocidad, v (en millas por hora), es similar a la que se muestra en la figura 4.30. Deseamos minimizar el consumo de gasolina por *milla*, no el consumo de gasolina por hora. Digamos que $G = g/v$ representa el consumo promedio de gasolina por milla. (Las unidades de G son galones/milla.)

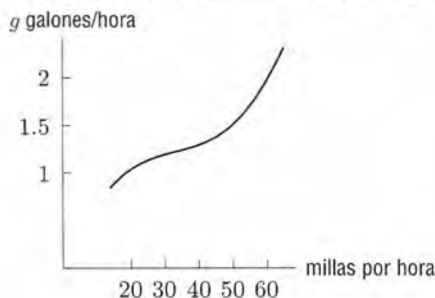


Figura 4.30. Consumo de gasolina respecto a la velocidad.

Ejemplo 3 Utilizando a la figura 4.30 calcule la velocidad que minimiza a G.

Solución Queremos encontrar el valor mínimo de $G = g/v$ cuando g y v se relacionan por medio de la gráfica en la figura 4.30. Podemos utilizar la figura 4.30 para trazar una gráfica de G respecto a v y calcular un punto crítico. No obstante, hay una forma más fácil de hacer esto. La figura 4.31 muestra que g/v es la pendiente de la recta que va del origen al punto P. ¿En qué parte de la curva P se debe minimizar la pendiente? Con base en las posiciones posibles de la recta que se muestra en la figura 4.31, se puede apreciar que la pendiente de la recta es tanto un mínimo local como global cuando la recta es tangente a la curva. En la figura 4.32 se puede ver que la velocidad en este punto es de aproximadamente 50 millas por hora. Por consiguiente, para minimizar el consumo de gasolina por milla se debe manejar a una velocidad aproximada de 50 millas por hora.

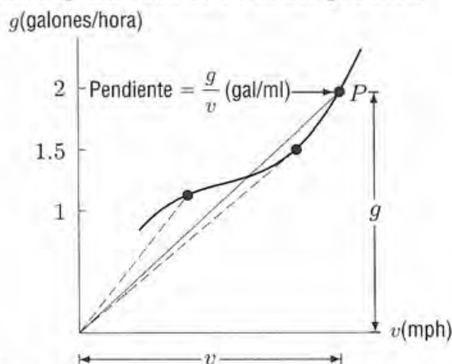


Figura 4.31. Representación gráfica del consumo de gasolina por milla, $G = g/v$.

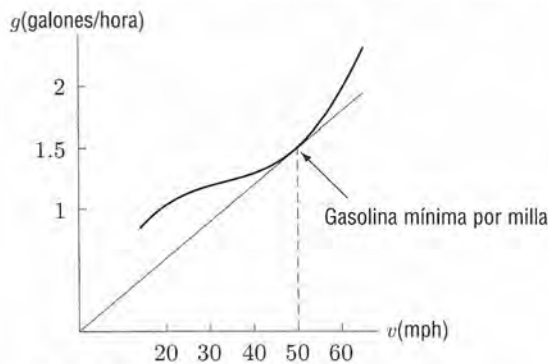
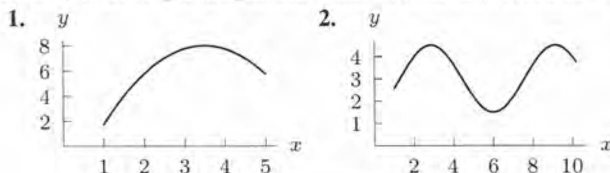


Figura 4.32. Velocidad de la eficiencia máxima del combustible.

Problemas para la sección 4.3

Para los problemas 1 y 2 marque los puntos críticos de las gráficas dadas. Determine cuál corresponde a un mínimo local, máximo local, mínimo global, máximo global, o a ninguno de éstos. (Observe que las gráficas están en intervalos cerrados).



En los problemas del 3 al 6 grafique una función que satisfaga las propiedades dadas.

3. Tiene un mínimo local y un mínimo global en $x = 3$, pero no tiene máximos locales o globales.
4. Tiene un mínimo local en $x = 3$, un máximo local en $x = 8$, pero ningún máximo o mínimo global.
5. Tiene un mínimo local y global en $x = 3$ y un máximo local y global en $x = 8$.
6. No tiene mínimo o máximo local o global

[3] Adaptado de Taylor, Peter D., *Calculus: The Analysis of Functions*, Wall & Emerson, Toronto, 1992.

Para los problemas del 7 al 10 trace la gráfica de una función en el intervalo $0 \leq x \leq 10$ que satisfaga las propiedades dadas

7. Tiene un mínimo local en $x = 3$, un máximo local en $x = 8$ y un máximo global y un mínimo global en los puntos extremos del intervalo.

8. Tiene un máximo local y global en $x = 3$, un mínimo local y global en $x = 10$.

9. Tiene un mínimo local y global en $x = 3$, un máximo local y global en $x = 8$.

10. Tiene un máximo global en $x = 0$, mínimo global en $x = 10$ y ningún otro máximo o mínimo local.

11. Trace la gráfica de $f(x) = x^3 - e^x$ utilizando una calculadora gráfica o una computadora para determinar los máximos y mínimos locales y globales para: **(a)** $-1 \leq x \leq 4$ **(b)** $-3 \leq x \leq 2$

12. Para $y = f(x) = x^{10} - 10x$, y $0 \leq x \leq 2$, encuentre el (los) valor(es) de x para los que:

(a) $f(x)$ tiene un máximo local o mínimo local. Indique cuáles son máximos y cuáles son mínimos.

(b) $f(x)$ tiene un máximo global o un mínimo global.

13. Para $f(x) = x - \ln x$, y $0.1 \leq x \leq 2$, encuentre el (los) valor(es) de x para lo cual:

(a) $f(x)$ tiene un máximo local o mínimo local. Indique cuáles son máximos y cuáles son mínimos.

(b) $f(x)$ tiene un máximo global o un mínimo global.

14. La función $y = t(x)$ es positiva y continua con un máximo global en el punto (3, 3). Trace la gráfica de $t(x)$ si $t'(x)$ y $t''(x)$ tienen el mismo signo en $x < 3$, pero signos contrarios en $x > 3$.

15. Para cierta constante positiva C, el cambio T, en la temperatura de un paciente, debido a una dosis, D, de un medicamento está determinado por

$$T = \left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right) D^2.$$

(a) ¿Qué dosis maximiza el cambio de la temperatura?

(b) La sensibilidad del cuerpo a la sustancia está definida como dT/dD. ¿Qué dosis maximiza la sensibilidad?

16. Cuando usted tose, su tráquea se contrae. La velocidad, v, a la cual el aire sale depende del radio, r, de su tráquea. Si R es el radio normal (de descanso) de su tráquea, entonces para $r \leq R$, la velocidad está dada por

$$v = a(R - r)r^2 \quad \text{donde } a \text{ es una constante positiva.}$$

¿Qué valor de r maximiza la velocidad?

17. La energía que consume un pájaro al día, E, depende del tiempo que gasta en buscar comida al día, F horas. Para buscar la comida en un tiempo más corto necesita un mejor territorio, pero a su vez requiere más energía para su defensa.[4] Determine el tiempo de la búsqueda de comida que minimice el consumo de energía si

$$E = 0.25F + \frac{1.7}{F^2}.$$

18. En la costa oeste de Canadá los cuervos comen buccinos (caracol marino de concha pequeña y abocinada). Para abrir los buccinos, los cuervos los dejan caer contra una roca. Si la concha no se rompe la primera vez, arrojan nuevamente al buccino.[5] El número de lanzamientos promedio, n, que se necesita cuando arrojan al buccino desde una altura de x metros se calcula mediante

$$n(x) = 1 + \frac{27}{x^2}.$$

(a) Determine la distancia vertical total que el cuervo recorre en ascenso para abrir a un buccino como una función de la altura de lanzamiento, x.

(b) Se observa que los cuervos lanzan los buccinos desde una altura que minimiza la distancia total vertical que tiene que ascender por buccino. ¿A qué altitud?

19. Durante un brote de gripe en una escuela en la que hay 763 niños, el número de niños infectados, I, se expresó en términos del número de niños susceptibles (pero aún saludables), S, por medio de[6]

$$I = 192 \ln\left(\frac{S}{762}\right) - S + 763.$$

¿Cuál es el número máximo posible de niños infectados?

20. La figura 4.33 muestra la tasa a la que se realiza la fotosíntesis en una hoja.

(a) ¿En qué tiempo, aproximadamente, se está realizando la fotosíntesis a la mayor velocidad posible para $t \geq 0$?

(b) Si la hoja crece en forma proporcional a la velocidad de la fotosíntesis, ¿en qué parte del intervalo $0 \leq t \leq 200$ está creciendo la hoja? ¿Cuándo crece lo más rápido posible?

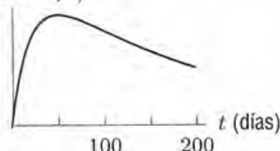


Figura 4.33.

[4] Adaptado de Pyke, Graham, citado por J. R. Krebs y N. B. Davis en *An Introduction to Behavioural Ecology*, Blackwell, Oxford, 1987.

[5] Adaptado de Reto, Zach, citado por J. R. Krebs y N. B. Davis en *An Introduction to Behavioural Ecology*, Blackwell, Oxford, 1987.

[6] Datos del Centro de Vigilancia de Enfermedades Transmisibles (Reino Unido), citado en "Influenza in a Boarding School", *British Medical Journal*, 4 de marzo de 1978.

21. La cantidad de un medicamento en el torrente sanguíneo t horas después de que se ingiere una tableta está dada, en mg, por

$$q(t) = 20(e^{-t} - e^{-2t}).$$

(a) ¿Cuánto hay del medicamento en el torrente sanguíneo en el tiempo $t = 0$?

(b) ¿Cuándo es máxima la cantidad de medicamento en el torrente sanguíneo? ¿Cuál es el máximo?

(c) A largo plazo, ¿qué sucede con la cantidad?

22. La distancia, s, recorrida por un ciclista, que comienza a la 1 p. m., está en la figura 4.34. El tiempo, t, se mide en horas desde el mediodía.

(a) Explique por qué la cantidad, s/t, se representa por la pendiente de una recta desde el origen al punto (t, s) en la gráfica.

(b) Calcule el tiempo para que la cantidad s/t sea un máximo.

(c) ¿Cuál es la relación entre la cantidad s/t y la rapidez instantánea del ciclista para el tiempo que se encuentra en el inciso (b)?

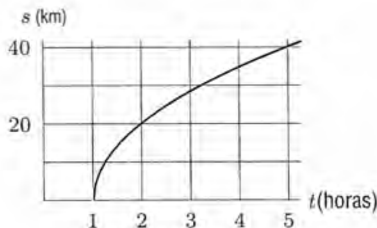


Figura 4.34.

23. Sea $f(v)$ la cantidad de energía que consume un ave voladora, medida en joules por segundo (un joule es una unidad de energía), como una función de su rapidez v (en metros/segundo). Sea $a(v)$ la cantidad de energía que consume la misma ave, medida en joules por metro.

(a) Dé una razón (en términos del modo en que vuelan las aves) de la forma de la gráfica de $f(v)$ en la figura 4.35.

(b) ¿Cuál es la relación entre $f(v)$ y $a(v)$?

(c) ¿En qué punto $a(v)$ alcanza un mínimo?

(d) ¿El ave debe tratar de minimizar a $f(v)$ o a $a(v)$ cuando está volando? ¿Por qué?

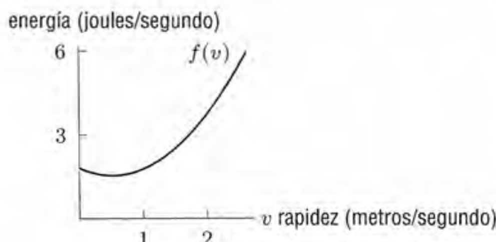


Figura 4.35.

24. Un ave como el estornino alimenta con gusanos a sus hijuelos. Para recolectar gusanos, el ave vuela hacia un lugar donde éstos están; recoge algunos con su pico y vuela de regreso hacia su nido. La *curva de carga* de la figura 4.36 muestra cómo el número de gusanos (la carga) que recolecta un estornino depende del tiempo que ha empleado buscándolos.[7] La curva es cóncava hacia abajo porque el ave puede recoger gusanos en forma más eficiente cuando su pico está vacío; cuando su pico está parcialmente lleno, el ave es menos eficiente. El tiempo de recorrido (del nido al lugar donde están los gusanos y luego de regreso) está representado por la distancia PO en la figura 4.36. Supongamos que el ave desea elevar al máximo la razón con la que lleva los gusanos al nido, donde

$$\text{Razón a la que llegan los gusanos} = \frac{\text{Carga}}{\text{Tiempo del recorrido} + \text{Tiempo de búsqueda}}$$

(a) Trace una recta en la figura 4.36 cuya pendiente sea igual a esta razón.

(b) Usando la gráfica, calcule la carga que maximiza a esta razón.

(c) Si el tiempo del recorrido se incrementa, ¿la carga óptima aumenta o disminuye? ¿Por qué?

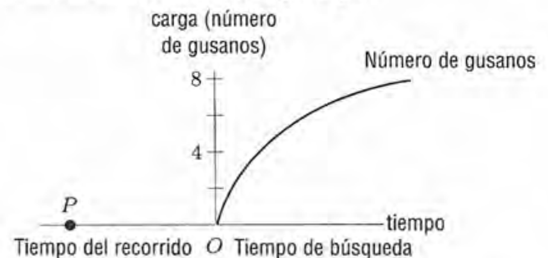


Figura 4.36.

25. El suministro de oxígeno, S, en la sangre depende del hematocrito, H, el porcentaje de glóbulos rojos en la sangre:

$$S = aHe^{-bh} \quad \text{para las constantes positivas, } a, b.$$

(a) ¿Qué valor de H maximiza el suministro de oxígeno? ¿Cuál es el suministro máximo de oxígeno?

(b) ¿Cómo cambia el valor máximo de S si aumenta el valor de las constantes a y b?

26. La tabla 4.1 muestra el número total de automóviles en un lote de estacionamiento de la Universidad de Arizona (UA) en intervalos de 30 minutos.[8]

Tabla 4.1 *Número total de automóviles, C, en el tiempo t*

t	5:00	5:30	6:00	6:30	7:00	7:30	8:00	8:30	9:00
C	4	5	8	18	50	110	170	200	200

(a) Grafique el número total de automóviles en el lote de estacionamiento de la UA como una función del tiempo. Calcule la capacidad del lote de estacionamiento y cuando éste se llenó.

[7]Kacelnick, Alex, citado por J. R. Krebs y N. B. Davis, *An Introduction to Behavioural Ecology*, Blackwell, Oxford, 1987.
[8]Adaptado de Roberts, Nancy, *et al.*, *Introduction to Computer Simulation*, Addison-Wesley, 1983, p. 93.

(b) Construya una tabla y después trace una gráfica de la tasa de ingreso de automóviles como una función del tiempo.

(c) Con la gráfica del inciso (b), calcule en qué momento se presenta la hora pico en la UA.

(d) Explique la relación que hay entre los puntos de las gráficas de los incisos (a) y (b) cuando es la hora pico.

27. Una reacción química convierte a una sustancia A en sustancia Y; la presencia de Y cataliza la reacción. Al inicio de la reacción, la cantidad de A que está presente es de a gramos. t segundos después, la cantidad de Y que está presente es de y gramos. La razón de la reacción, en gramos/segundo, está dada por

$$\text{Tasa} = ky(a - y), \qquad k \text{ es una constante positiva.}$$

(a) ¿Para qué valores de y la razón es no negativa? Dibuje una gráfica de la razón respecto a y.

(b) ¿Para cuáles valores de y la razón es un máximo?

28. En una reacción química se combinan las sustancias A y B para formar la sustancia Y. Al inicio de la reacción la cantidad presente de A es de a gramos y la cantidad presente de B es de b gramos. Suponga que $a < b$. t segundos después del inicio de la reacción, la cantidad presente de Y es de y gramos. Para ciertos tipos de reacciones, la razón de la reacción, en gramos/segundo, está dada por

$$\text{Tasa} = k(a - y)(b - y), \qquad k \text{ es una constante positiva.}$$

(a) ¿Para cuáles valores de y la razón no es negativa? Trace una gráfica de la razón respecto a y.

(b) Con su gráfica determine el valor de y al que la razón de la reacción es la más rápida.

29. Un manzano produce, en promedio, 400 kilogramos de fruta en cada temporada. Sin embargo, si se plantan más de 200 árboles por km^2, la concentración reduce la producción un kilogramo por cada árbol arriba de 200.

(a) Exprese la producción total de un kilómetro cuadrado como una función del número de árboles que hay en él. Grafique esta función.

(b) ¿Cuántos árboles debe plantar el agricultor en cada kilómetro cuadrado para maximizar la producción?

30. La presión sanguínea de una persona, p, en milímetros de mercurio (mm Hg) está dada, para t en segundos, por

$$p = 100 + 20\,\text{sen}(2.5\pi t).$$

(a) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la presión sanguínea?

(b) ¿Cuál es el intervalo entre máximos sucesivos?

(c) Muestre sus respuestas en una gráfica de la presión sanguínea respecto al tiempo.

31. Una celda simple de un panal de abejas tiene la forma que se muestra en la figura 4.37. El área de la superficie de esta celda está dada por

$$A = 6hs + \frac{3}{2}s^2\left(\frac{-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} + \frac{\sqrt{3}}{\text{sen}\,\theta}\right)$$

donde h, s, θ se muestran en la figura.

(a) Manteniendo constantes a h y s, ¿para qué ángulo, θ, el área de la superficie es mínima?

(b) Ciertas mediciones de celdas de abejas han mostrado que el ángulo que realmente utilizan es aproximadamente $\theta = 55°$. Comente esto.

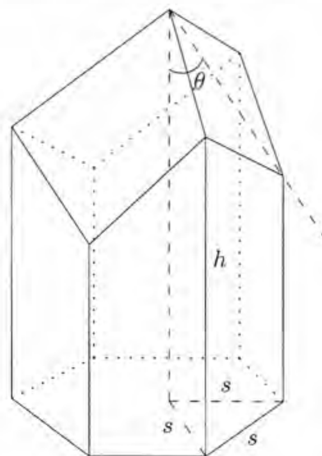


Figura 4.37.

32. Se libera a una paloma desde un barco (punto B de la figura 4.38) que navega en un lago. Debido al aire que bate sobre el agua fría, la energía necesaria para volar un metro sobre el lago es el doble de la energía correspondiente e que se requiere para volar sobre la orilla del lago ($e = 3$ joules/metro). Para minimizar la energía necesaria para volar de B al palomar, L, la paloma se dirige al punto P de la orilla del lago y después vuela a lo largo de la orilla del lago con dirección a L. La distancia $\overline{AL}$ es de 2,000 m y $\overline{AB}$ es de 500 m. El ángulo en A es un ángulo recto.

(a) Exprese la energía que se requiere para volar de B a L a través de P como una función del ángulo θ (el ángulo BPA).

(b) ¿Cuál es el ángulo θ óptimo?

(c) ¿Su respuesta cambia si $\overline{AL}$, $\overline{AB}$ y e tienen valores numéricos distintos a los señalados?

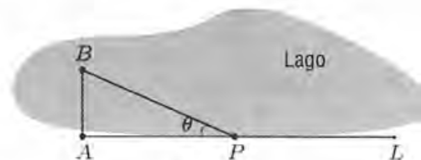


Figura 4.38.

33. La curva en forma de campana de la estadística tiene la fórmula

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

donde μ es la media y σ es la desviación estándar.

(a) ¿En qué punto $p(x)$ alcanza un máximo?

(b) ¿$p(x)$ tiene un punto de inflexión? Si es así, ¿dónde?

4.4 GANANCIA, COSTO E INGRESO

Maximización de la ganancia

Una cuestión fundamental para un productor de bienes es la maximización de la ganancia. Para una cantidad, q, la ganancia $\pi(q)$ es la diferencia entre el ingreso, $I(q)$ y el costo, $C(q)$, de producir dicha cantidad. Por consiguiente, $\pi(q) = I(q) - C(q)$. El costo marginal, $MC = C'$, es la derivada; el ingreso marginal es $IM = I'$.

Los máximos y los mínimos globales de una función sólo pueden ocurrir en los puntos críticos de la función o en los puntos extremos del intervalo. Para localizar los puntos críticos de π, buscamos los ceros de la derivada:

$$\pi'(q) = I'(q) - C'(q) = 0.$$

Por tanto,

$$I'(q) = C'(q),$$

es decir, las pendientes de las gráficas de $I(q)$ y $C(q)$ son iguales en q. En términos económicos,

> La ganancia máxima (o mínima) puede darse cuando
>
> Ingreso marginal = Costo marginal

Ya en el capítulo 2 analizamos gráficamente este resultado. El ejemplo 1 de este capítulo también es gráfico; el ejemplo 2 es analítico, y nos muestra lo que es posible hacer con las fórmulas de la derivada en el capítulo 3. Por supuesto, la ganancia máxima o mínima no necesariamente *tiene* que ocurrir cuando $IM = CM$; cualquiera de las dos puede suceder en un punto extremo.

Ejemplo 1 En la figura 4.39 se muestran las gráficas del ingreso total y del costo total de cierto producto.

(a) Trace las curvas para el ingreso marginal y el costo marginal en un mismo sistema de coordenadas. Indique sobre esta gráfica las dos cantidades donde el ingreso marginal es igual al costo marginal. ¿Cuál es la importancia de estas dos cantidades? ¿Para qué cantidad se alcanza la máxima ganancia?

(b) Trace una gráfica de la función de ganancia $\pi(p)$.

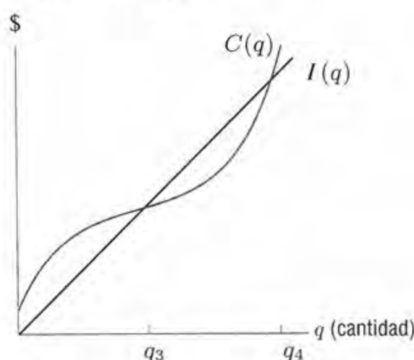


Figura 4.39. Ingreso total y costo total.

Solución **(a)** Las gráficas del ingreso total $I(q)$ y del costo total $C(q)$ se encuentran en la figura 4.39. Para graficar el ingreso marginal y el costo marginal, trace las gráficas de las derivadas de $I(q)$ y $C(q)$. Puesto que $I(q)$ es una línea recta con una pendiente positiva, la gráfica del ingreso marginal, IM, es una recta horizontal (véase la figura 4.40). Debido a que $C(q)$ siempre es creciente, el costo marginal, CM, es siempre positivo. A medida que q aumenta, la curva de costos cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba, por lo que la derivada de la función de costos, CM, cambia de decreciente a creciente (véase la figura 4.40). El mínimo local de la curva de costos marginal corresponde al punto de inflexión de $C(q)$.

¿Dónde se maximiza la ganancia? Sabemos que la ganancia máxima se puede presentar cuando Ingreso marginal = Costo marginal. Las curvas de la figura 4.40 se cruzan en dos puntos, q_1 y q_2, donde $IM = CM$. ¿Cuál de estos puntos produce la máxima ganancia?

Primero consideremos q_1. A la izquierda de q_1, tenemos que $IM < CM$, por tanto, $\pi' = IM - CM$ es negativa y la función de ganancia es decreciente en esta parte. A la derecha de q_1, tenemos que $IM > CM$, por lo que π' es positiva y la función de ganancia es creciente. Este comportamiento, decreciente y después creciente, significa que la función ganancia tiene un mínimo local en q_1. Ciertamente, éste no es el nivel de producción que deseamos.

¿Qué ocurre en q_2? A la izquierda de q_2, tenemos que $IM > CM$, por tanto, π' es positiva y la función ganancia es creciente. A la derecha de q_2, tenemos que $IM < CM$, por lo que π' es negativa y la función ganancia es decreciente. Este comportamiento, creciente y después decreciente, significa que la función ganancia tiene un máximo local en q_2. La ganancia máxima global ocurre en un punto extremo (los niveles de producción mayor y menor posibles) o en el nivel de producción q_2.

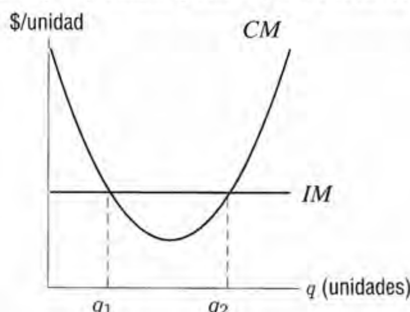


Figura 4.40. Ingreso marginal y costo marginal.

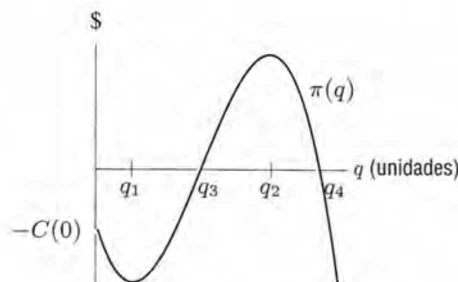


Figura 4.41. Función de ganancia.

Observe que los niveles de producción q_1 y q_2 corresponden a los dos puntos de la figura 4.39, donde la pendiente de $C(q)$ es igual a la pendiente de $I(q)$. Uno de estos puntos está a la izquierda de q_3 y el otro está a la derecha. El nivel de producción que se desea alcanzar es q_2, cuando $IM = CM$ y el ingreso es mayor que el costo. La ganancia máxima se presenta en un nivel de producción de q_2 unidades.

(b) La función de ganancia es decreciente a la izquierda de q_1, crece entre q_1 y q_2 y decrece a la derecha de q_2. La ganancia es igual cero en q_3 y q_4, donde las curvas de costos y de ingreso se interceptan. Puesto que $I(0) = 0$ y $C(0)$ representan los costos fijos de la producción, que se muestran en la figura 4.39 como positivos, tenemos que

$$\pi(0) = I(0) - C(0) = -C(0).$$

Por tanto, la ordenada en el origen de la función ganancia es un número negativo, de magnitud igual al tamaño del costo fijo. La gráfica de la función ganancia tiene la forma que se muestra en la figura 4.41.

Ejemplo 2 Encuentre la cantidad que lleva al máximo la ganancia si el ingreso total y el costo total (en dólares) están dados por

$$I(q) = 5q - 0.003q^2$$
$$C(q) = 300 + 1.1q$$

donde q es la cantidad y $0 \le q \le 1{,}000$ unidades. ¿Qué nivel de producción da la mínima ganancia?

Solución Comencemos buscando los niveles de producción que hacen que Ingreso marginal = Costo marginal. Puesto que

$$IM = I'(q)\,5 - 0.006q$$
$$CM = C'(q) = 1.1,$$

$IM = CM$ lo cual hace que

$$5 - 0.006q = 1.1$$
$$q = \frac{3.9}{0.006} = 650 \text{ unidades}.$$

¿Esto representa un máximo o mínimo local de la ganancia π? Para decidir esto, observe los niveles de producción de 649 unidades y 651 unidades. Cuando $q = 649$, tenemos que $IM = \$1.106$ por unidad, que es mayor que el costo marginal (constante) de \$1.10 por unidad. Esto quiere decir que producir una unidad adicional genera más ingresos que costos, por lo que la ganancia aumenta. Cuando $q = 651$, $IM = \$1.094$ por unidad, lo cual es *menor* que CM, por tanto, no es rentable producir la unidad número 651. Concluimos que $q = 650$ es un máximo local para la función ganancia π. La ganancia generada por producir y vender esta cantidad es $\pi(650) = I(650) - C(650) = \$1,982.50 - \$1,015 = \$967.50$.

Para encontrar los máximos globales, preste atención a los puntos extremos. Si $q = 0$, el único costo es de \$300 (los costos fijos) y no hay ningún ingreso, por lo que $\pi(0) = -\$300$. En el límite superior de $q = 1{,}000$, tenemos que $I(1{,}000) = \$2{,}000$ y $C(1{,}000) = \$1{,}400$, por lo que $\pi\,(1{,}000) = \$600$. En consecuencia, la máxima ganancia se obtiene cuando $IM = CM$, que ocurre a un nivel de producción de $q = 650$ unidades. La mínima ganancia (una pérdida) se obtiene cuando $q = 0$ y no hay producción en absoluto.

Maximización del ingreso

Supongamos que usted es propietario de una compañía de autobuses de transporte urbano con una ruta fija. Sus costos son los mismos, no importa cuánta gente suba a los autobuses, por lo que usted maximiza la ganancia al maximizar su ingreso. ¿Qué precio debe cobrar por un pasaje para obtener el máximo ingreso?

El ingreso es igual al precio por la cantidad. Como la cantidad de un artículo vendido depende muchas veces del precio que se cobra, con frecuencia se expresa al ingreso como una función del precio. (Para esto empleamos la ecuación de la demanda.) Del mismo modo, a veces escribimos el ingreso como una función de la cantidad. En cualquier caso, podemos hablar del precio (o la cantidad) que lleve al máximo el ingreso.

Ejemplo 3 La demanda de boletos de entrada a un parque de diversiones está dada por la ecuación $p = 70 - 0.02q$, donde p es el precio de un boleto en dólares y q es el número de personas que asisten a dicho precio.

(a) ¿Cuál es el precio que genera una asistencia de 3,000 personas? ¿Cuál es el ingreso total a ese precio? ¿Cuál es el ingreso total si el precio es de \$20?

(b) Escriba la función de ingreso como una función de la asistencia, q, al parque de diversiones.

(c) ¿Qué asistencia maximiza el ingreso?

(d) ¿Qué precio debe cobrarse para maximizar el ingreso?

(e) ¿Cuál es el ingreso máximo? ¿Cuál es la ganancia correspondiente?

Solución **(a)** Si $q = 3{,}000$, la ecuación de la demanda arroja $p = 70 - 0.02 \cdot 3{,}000 = 10$. Es decir, a un precio de \$10, asisten 3,000 personas. A este precio,

$$\text{Ingreso} = 3{,}000 \text{ personas} \cdot 10 \text{ dólares/persona} = \$30{,}000.$$

Para calcular el ingreso total a un precio de \$20, primero determine la asistencia a este precio. Al sustituir $p = 20$ en la ecuación de la demanda, $p = 70 - 0.02q$ tenemos

$$20 = 70 - 0.02q.$$

Despejando q, obtenemos

$$-50 = -0.02q$$
$$2{,}500 = q.$$

Es decir, a un precio de \$20, la asistencia es de 2,500 personas, e

$$\text{Ingreso} = 2{,}500 \cdot 20 = \$50{,}000.$$

Observe que, aunque la demanda disminuyó, el ingreso es mayor al precio de \$20 que al precio de \$10.

(b) Puesto que Ingreso = Precio × Cantidad = $p \cdot q$ y $p = 70 - 0.002q$, tenemos que

$$\begin{aligned} I(q) &= (70 - 0.02q)q \\ &= 70q - 0.02q^2. \end{aligned}$$

(c) Para maximizar al ingreso, encuentre los puntos críticos de la función de ingreso $I(q) = 70q - 0.02q^2$:

$$\begin{aligned} I'(q) &= 70 - 0.02 \cdot 2q \\ 0 &= 70 - 0.04q \\ 70 &= 0.04q \\ 1{,}750 &= q. \end{aligned}$$

El ingreso máximo lo obtenemos cuando la asistencia al parque de diversiones es de 1,750 personas.

(d) Determine el precio correspondiente a una asistencia de 1,750, usando la ecuación de la demanda:

$$p = 70 - 0.02 \cdot 1{,}750 = 70 - 35 = 35.$$

El precio óptimo de un boleto al parque de diversiones es de \$35.

(e) Cuando se cobra el precio óptimo de \$35, la asistencia al parque es de 1,750 personas. Por tanto, el ingreso máximo es $I = pq = 35 \cdot 1{,}750 = \$61{,}250$. La ganancia correspondiente no se puede determinar sin conocer los costos.

Ejemplo 4 Una compañía que renta lanchas para ríos turbulentos sabe que, a un precio de \$80 por un viaje de medio día, atrae a 300 clientes. Por cada rebaja de \$5 en el precio, atrae a 30 clientes más. ¿Qué precio debe cobrar la empresa para maximizar su ingreso?

Solución Primero encontramos la ecuación que relaciona al precio con la demanda. Si el precio, p, en dólares, es 80, el número de paseos vendidos, q, es 300. Si p es 75, entonces q es 330, y así sucesivamente. Véase la tabla 4.2.

Observe que la demanda, q, es una función lineal del precio, p. La pendiente es $-30/5 = -6$, por lo que la función de la demanda es $q = -6p + b$, donde b es la ordenada en el origen. Ya que $p = 80$, $q = 300$ satisface la ecuación $q = -6p + b$ y tenemos

$$\begin{aligned} 300 &= -6 \cdot 80 + b \\ 300 &= -480 + b \\ 780 &= b \end{aligned}$$

La ecuación de la demanda es $q = -6p + 780$. Como el ingreso $I = p \cdot q$, el ingreso como una función del precio es

$$I(p) = p(-6p + 780) = -6p^2 + 780p.$$

La figura 4.42 muestra el máximo de esta función de ingreso. Para determinar analíticamente el máximo, derivamos la función de ingreso y hallamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} I'(q) &= -12p + 780 = 0 \\ p &= \frac{780}{12} = 65. \end{aligned}$$

El ingreso máximo se logra cuando el precio es \$65.

Tabla 4.2 *Demanda de paseos en lancha*

Precio, p	Número de paseos vendidos, q
80	300
75	330
70	360
65	390
...	...

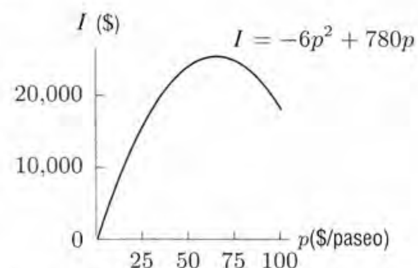


Figura 4.42. Ingreso de la compañía que renta lanchas como una función del precio.

Problemas para la sección 4.4

1. La tabla 4.3 muestra el costo, $C(q)$ y el ingreso, $I(q)$.

(a) ¿Aproximadamente en qué nivel de producción, q, se maximiza la ganancia? Explique su razonamiento.

(b) ¿Cuál es el precio del producto?

(c) ¿Cuáles son los costos fijos?

Tabla 4.3

q	0	500	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000
$I(q)$	0	1,500	3,000	4,500	6,000	7,500	9,000
$C(q)$	3,000	3,800	4,200	4,500	4,800	5,500	7,400

2. La tabla 4.4 muestra el costo marginal, *CM*, y el ingreso marginal, *IM*.

(a) Utilice el costo marginal y el ingreso marginal en un nivel de producción de $q = 5{,}000$ para determinar si debe incrementarse o disminuirse la producción de 5,000 unidades. Explique.

(b) Calcule el nivel de producción que maximice la ganancia. Justifique su respuesta.

Tabla 4.4

q	5,000	6,000	7,000	8,000	9,000	10,000
IM	60	58	56	55	54	53
MC	48	52	54	55	58	63

3. El ingreso está dado por $I(q) = 450q$ y el costo está dado por $C(q) = 10{,}000 + 3q^2$. ¿En qué cantidad se maximiza la ganancia? ¿Cuál es la ganancia total en este nivel de producción?

4. El costo total de producir q unidades de un producto se da por $C(q) = q^3 - 60q^2 + 1{,}400q + 1{,}000$ para $0 \leq q \leq 50$. Si el producto se vende a $788 por unidad, ¿a qué nivel de producción es máxima la ganancia? Determine el costo total, el ingreso total, y la ganancia total para este nivel de producción. Trace una gráfica de las funciones de costos e ingreso en un mismo sistema de coordenadas, y marque el nivel de producción en el cual la ganancia es máxima y el correspondiente costo, ingreso y utilidad. [*Sugerencia*: los costos pueden ser de hasta $46,000.]

5. La figura 4.43 muestra el costo y el ingreso. ¿Para qué niveles de producción la función ganancia es positiva? ¿Negativa? Calcule la producción a la que se maximiza la ganancia.

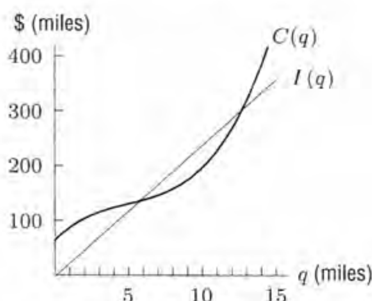


Figura 4.43.

6. La figura 4.40 de la página 184 muestra los puntos, q_1 y q_2, donde el ingreso marginal es igual al costo marginal.

(a) En la gráfica de las correspondientes funciones del costo total y del ingreso total de la figura 4.44, marque los puntos q_1 y q_2. Explique, en términos de pendientes, la importancia de estos puntos.

(b) Explique, en términos de ganancia, por qué un punto es un mínimo local y otro es un máximo local.

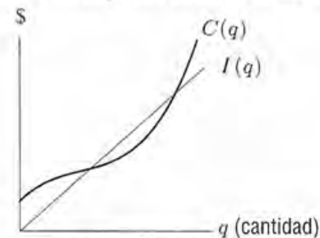


Figura 4.44.

7. Cuando la producción es de 2,000 unidades, el ingreso marginal es de $4 por unidad y el costo marginal es de $3.25 por unidad. ¿Espera usted que la ganancia máxima se alcance para un nivel de producción superior o inferior a las 2,000 unidades? Explique.

8. El costo total $C(q)$ de producir q artículos está dado por:

$$C(q) = 0.01q^3 - 0.6q^2 + 13q.$$

(a) ¿Cuál es el costo fijo?

(b) ¿Cuál es la ganancia máxima si cada artículo se vende a $7? (Suponga que usted vende todo lo que produce.)

(c) Suponga que se producen exactamente 34 artículos. Todos se venden cuando el precio es de $7 por cada uno, pero por cada aumento de $1 en el precio, se venden 2 artículos menos. ¿Debe aumentarse el precio? Si es así, ¿en cuánto?

9. La ecuación de la demanda de un producto es $p = 45 - 0.01q$. Escriba el ingreso como una función de q y determine la cantidad que lleva al máximo la ganancia. ¿A qué precio corresponde esta cantidad? ¿Cuál es la ganancia total a este precio?

10. La ecuación de la demanda de un artículo es $p = b_1 - a_1q$ y la función de costos es $C(q) = b_2 + a_2q$, donde p es el precio del artículo y q es la cantidad vendida. Determine el valor de q, en términos de las constantes positivas b_1, a_1, b_2, a_2, que maximizan la ganancia.

11. Un almacén que vende cemento tiene que decir cuándo y qué cantidades ordenar nuevamente. Es más barato, en promedio, colocar órdenes grandes porque esto reduce el costo unitario. Por otra parte, las órdenes grandes implican costos de almacenamiento más altos. El almacén siempre solicita órdenes de cemento en la misma cantidad, q. El costo total semanal, C, de ordenar y almacenar está dado por

$$C = \frac{a}{q} + bq, \text{ donde } a, b \text{ son constantes positivas.}$$

(a) ¿Cuál de los términos, a/q y bq, representa el costo de ordenar y cuál representa el costo de almacenar?

(b) ¿Cuál valor de q genera el costo total mínimo?

12. Un negocio vende un artículo a una razón constante de r unidades por mes. Ordena nuevamente en tandas de q unidades, a un costo de $a + bq$ dólares por orden. Los costos de almacenamiento están en k dólares por unidad al mes, y en promedio, $q/2$ unidades están en el almacén, hasta que son vendidas. (Suponga que r, a, b, k son constantes positivas.)

(a) ¿Con qué frecuencia el negocio vuelve a ordenar?

(b) ¿Cuál es el costo promedio mensual de ordenar nuevamente?

(c) ¿Cuál es el costo total mensual, C, de ordenar y almacenar?

(d) Obtenga la fórmula del tamaño del lote de Wilson, que indica el tamaño de la tanda óptima que minimiza el costo.

13. A un precio de \$8 por boleto, un grupo de teatro musical puede llenar todos los asientos de un teatro que tiene una capacidad para 1,500. Por cada dólar adicional que se cobre, el número de personas que compran boleto disminuye en 75. ¿Qué precio del boleto maximiza el ingreso?

14. Supongamos que usted maneja una pequeña mueblería. Firma un contrato con un cliente para entregarle hasta 400 sillas, y el número exacto lo determina más tarde el cliente. El precio será de \$90 por silla hasta 300 sillas y, arriba de 300, el precio se reduce \$0.25 por silla (sobre todo el pedido) por cada silla adicional después de 300. ¿Cuáles son los ingresos máximo y mínimo que su compañía puede recibir bajo este convenio?

15. Una empresa fabrica solamente un producto. La cantidad, q, de este artículo producido por mes depende de la cantidad de capital, K, invertido (es decir, el número de máquinas que posee la compañía, el tamaño de su edificio, entre otras cosas) y la cantidad de mano de obra, L, disponible cada mes. Suponga que q puede expresarse mediante una *función de producción Cobb-Douglas*:

$$q = cK^{\alpha}L^{\beta}$$

donde c, α, β son constantes positivas, con $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$. En este problema veremos cómo el gobierno ruso podría utilizar una función Cobb-Douglas para calcular cuántas personas podría emplear una nueva industria privatizada. Una compañía en dicha industria tendrá sólo una pequeña cantidad de capital disponible y necesitará utilizarlo todo, por lo que K es fijo. Supongamos que L se mide en horas-hombre al mes y que cada hora-hombre tiene un costo para la compañía de w rublos (el rublo es la unidad monetaria de Rusia). Suponga que la compañía no tiene otros costos además de la mano de obra y cada unidad del artículo se puede vender a un precio fijo de p rublos. ¿Cuántas horas-hombre de mano de obra por mes debe emplear la compañía para maximizar sus ganancias?

16. El costo de producción del fabricante de un producto se muestra en la figura 4.45. El fabricante puede vender el artículo a un precio de p cada uno (sin importar la cantidad vendida), de tal forma que el ingreso total por vender una cantidad q es $I(q) = pq$.

(a) La diferencia $\pi(q) = I(q) - C(q)$ es la ganancia total. ¿En qué cantidad q_0 la ganancia es máxima? Marque su respuesta en un dibujo de la gráfica.

(b) ¿Cuál es la relación entre p y $C'(q_0)$? Explique su resultado tanto gráfica como analíticamente. ¿Qué significa esto en términos económicos? (Observe que p es la pendiente de la recta $I(q) = pq$. Observe también que $\pi(q)$ tiene un máximo en $q = q_0$, por lo que $\pi'(q_0) = 0$.)

(c) Trace una gráfica de $C'(q)$ y de p (como recta horizontal) en un mismo sistema de coordenadas. Marque q_0 sobre el eje q.

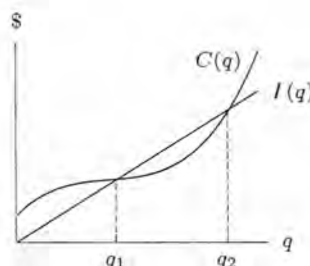


Figura 4.45.

17. El ingreso marginal y el costo marginal de cierta mercancía aparecen en la gráfica de la figura 4.46. ¿Las siguientes cantidades maximizan el ingreso de la compañía? Explique su respuesta.

(a) $q = a$ (b) $q = b$

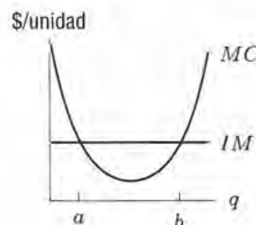


Figura 4.46.

4.5 COSTO PROMEDIO

Una compañía individual de una industria grande suele buscar que su ganancia sea máxima. Sin embargo, por sí sola la compañía no puede afectar la demanda del producto que vende porque otras compañías fuera de su control también producen y venden el mismo producto. El mecanismo del mercado tiende a llevar la oferta del producto para toda la industria al nivel en que el *costo promedio* de cada empresa se minimiza, aun cuando esto no lleva al máximo la ganancia de la industria en su conjunto. (Por esta razón, las compañías tienen el incentivo para coludir y aumentar así sus ganancias.)

¿Qué es el costo promedio?

El costo promedio es el costo por unidad de producir cierta cantidad; es el costo total dividido entre el número producido.

> Si el costo de producir una cantidad q es $C(q)$, entonces el **costo promedio**, $a(q)$, de producir una cantidad q está dado por
> $$a(q) = \frac{C(q)}{q}$$

Tenga cuidado de no confundir el costo promedio (el costo por unidad de producir cierta cantidad) con el costo marginal (el costo de producir la siguiente unidad).

Ejemplo 1 Una compañía que fabrica salsas tiene una función de costos $C(q) = 0.01q^3 - 0.6q^2 + 13q + 1{,}000$ (en dólares), donde q es el número producido de cajas de salsa. Si se producen 100 cajas, encuentre el costo promedio por caja.

Solución El costo total de producir las 100 cajas está dado por

$$C(100) = 0.01(100^3) - 0.6(100^2) + 13(100) + 1{,}000 = \$6{,}300.$$

El costo promedio por caja se determina al dividir entre 100 el costo total del número de cajas producidas.

$$\text{Costo promedio} = \frac{6{,}300}{100} = 63 \text{ dólares/caja.}$$

Si se producen 100 cajas de salsa, el costo promedio es de \$63 por caja.

Ejemplo 2 Una función de costos, en dólares, es $C(q) = 1{,}000 + 20q$, donde q es el número de unidades producidas. Determine el costo marginal de producir la unidad número 100 y el costo promedio de producir 100 unidades.

Solución Ésta es una función de costos lineal con una variable de costos constante de \$20 por unidad, por lo que el costo marginal, o la derivada, es de \$20 por unidad. Esto significa que después de que se han producido 99 unidades el costo de producir una unidad adicional es de \$20. En contraste,

$$\text{Costo promedio de producir 100 unidades} = a(100) = \frac{C(100)}{100} = \frac{3{,}000}{100} = 30 \text{ dólares/unidad.}$$

Observe que el costo promedio incluye a los costos fijos de toda la producción, mientras que el costo marginal no los incluye, por lo que, en este ejemplo, el costo promedio es mayor que el costo marginal.

¿Cómo se puede visualizar el costo promedio sobre una curva de costo total?

Sabemos que el costo promedio, $a(q)$, es el costo total dividido entre la cantidad, de modo que $a(q) = C(q)/q$. Como podemos restar cero de cualquier número sin cambiarlo, podemos escribir

$$a(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{C(q) - 0}{q - 0}.$$

Éste es un cociente de diferencia, igual a la pendiente de la recta que une a los puntos $(0, 0)$ y $(q, C(q))$ en la curva de costo. Véase la figura 4.47.

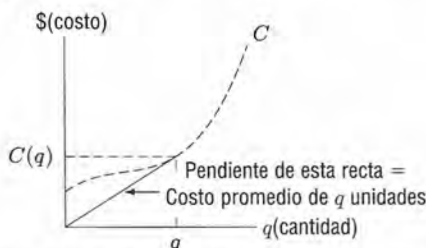


Figura 4.47. El costo promedio es la pendiente de la recta que une al origen con un punto de la curva de costo.

Costo promedio de producir q unidades	$= \dfrac{C(q)}{q} =$	Pendiente de la recta que va desde el origen hasta el punto $(q, C(q))$ en la curva de costo.

Minimización del costo promedio

Ejemplo 3 La gráfica de una función de costo se muestra en la figura 4.48. Marque en la gráfica la cantidad a la que el costo promedio se minimiza.

Solución El costo promedio está dado por la pendiente de la recta desde el origen a la gráfica de $C(q)$ en q. En la figura 4.49 estas rectas se han trazado para las cantidades q_1, q_2, q_3, q_4. Las pendientes de estas rectas son grandes para q pequeñas y se hacen menores a medida que q aumenta y después vuelven a aumentar conforme q continúa aumentando. Por consiguiente, conforme q aumenta, el costo promedio disminuye y luego aumenta, por lo que hay un valor mínimo en ese puntc. En la figura 4.49, el mínimo se presenta en el punto q_0 en el cual la recta desde el origen es tangente a la curva de costo.

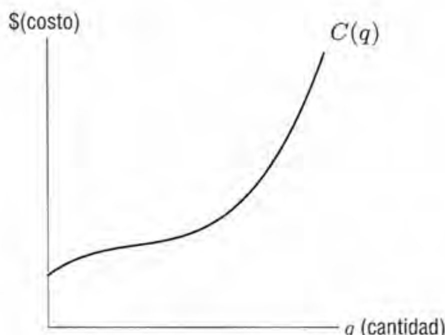


Figura 4.48. Una función de costo.

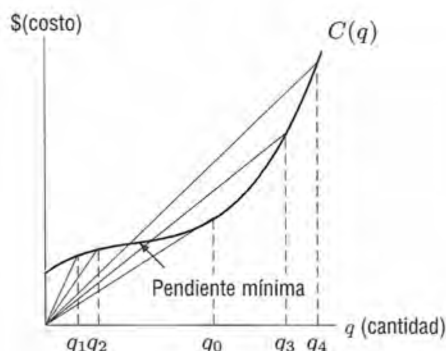


Figura 4.49. El costo promedio mínimo ocurre en el punto q_0, donde la recta es tangente a la curva de costo.

En la figura 4.49 observe que el costo promedio alcanza un mínimo (en q_0), cuando el costo promedio es igual al costo marginal. El siguiente ejemplo muestra lo que sucede cuando el costo marginal y el costo promedio no son iguales.

Ejemplo 4 Supongamos que se producen 100 artículos a un costo promedio de $2 por unidad. Encuentre el costo promedio de producir 101 unidades si el costo marginal para producir la unidad número 101 es: **(a)** $1 **(b)**$3.

Solución **(a)** Si se producen 100 artículos a un costo promedio de $2 por unidad, el costo total de producir los artículos es de $200. Puesto que el costo marginal de producir el artículo número 101 es de $1, el costo de producir una unidad adicional es de $1. Por tanto, los costos totales de producir 101 artículos ascienden a $201. El costo promedio de producir estas unidades es 201/101, o de $1.99 por unidad. El costo promedio ha disminuido. Esto tiene sentido: si producir más artículos cuesta menos que el promedio, producirlos hace bajar el costo promedio.

(b) En este caso, el costo marginal de producir la unidad número 101 es de $3. El costo total de producir 101 unidades será de $203 y el costo promedio será de 203/101, o sea $2.01 por unidad. El costo promedio ha subido. De nuevo, esto tiene sentido: si producir más artículos cuesta más que el promedio, los costos promedio aumentan cuando se producen estos artículos.

Resumimos como sigue:

Relación entre costo promedio y costo marginal

- Si el costo marginal es menor que el costo promedio, el costo promedio se reduce al aumentar la producción.
- Si el costo marginal es mayor que el costo promedio, el costo promedio aumenta al incrementar la producción.
- El costo marginal es igual al costo promedio en los puntos críticos del costo promedio.

Ejemplo 5 Demuestre analíticamente que los puntos críticos del costo promedio se presentan cuando el costo marginal es igual al costo promedio.

Solución Como $a(q) = C(q)/q = C(q)q^{-1}$, usamos la regla del producto para hallar a $a'(q)$:

$$a'(q) = C'(q)(q^{-1}) + C(q)(-q^{-2}) = \frac{C'(q)}{q} + \frac{-C(q)}{q^2} = \frac{qC'(q) - C(q)}{q^2}.$$

En los puntos críticos tenemos que $a'(q) = 0$, de modo que

$$\frac{qC'(q) - C(q)}{q^2} = 0.$$

Por tanto, tenemos que

$$qC'(q) - C(q) = 0$$
$$qC'(q) = C(q)$$
$$C'(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

En otras palabras:

Costo marginal = Costo promedio

Ejemplo 6 Una función de costo total, en miles de dólares, se obtiene mediante $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q$, donde q está en miles y $0 \leq q \leq 5$.

(a) Trace una gráfica de $C(q)$. Calcule visualmente la cantidad a la que el costo promedio se minimiza.
(b) Trace una gráfica de la función de costo promedio. Utilícela para calcular el costo promedio mínimo.
(c) Determine analíticamente el valor exacto de q en que el costo promedio se minimiza.

Solución **(a)** En la figura 4.50 se muestra una gráfica de $C(q)$. El costo promedio se minimiza en el punto donde una recta que parte del origen a un punto de la curva tiene una pendiente mínima. Esto ocurre donde la recta es tangente a la curva, aproximadamente en $q = 3$, correspondiente a una producción de 3,000 unidades.

(b) Como el costo promedio es el costo total dividido entre la cantidad, tenemos

$$a(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q^3 - 6q^2 + 15q}{q} = q^2 - 6q + 15.$$

La gráfica de esta función en la figura 4.51 indica que el costo promedio mínimo se alcanza aproximadamente en $q = 3$.

(c) Minimizamos el costo promedio al hallar la cantidad en la cual Costo marginal = Costo promedio. Puesto que el costo marginal es la derivada $C'(q) = 3q^2 - 15q + 15$, tenemos

$$3q^2 - 12q + 15 = \frac{q^3 - 6q^2 + 15q}{q}$$
$$3q^2 - 12q + 15 = q^2 - 6q + 15$$
$$2q^2 - 6q = 0$$
$$2q(q - 3) = 0.$$

Hay dos soluciones, en $q = 0$ y $q = 3$. Como en $q = 0$ el costo promedio no está definido, el punto crítico está en $q = 3$. En la figura 4.51 se ve que en $q = 3$ el costo promedio alcanza un mínimo.

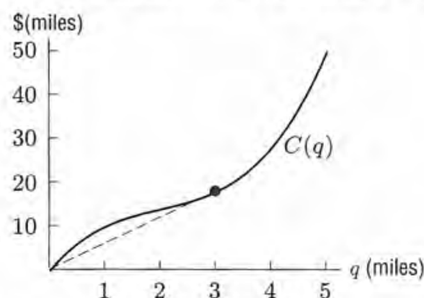


Figura 4.50. Gráfica de la función de costo, que muestra el costo promedio mínimo.

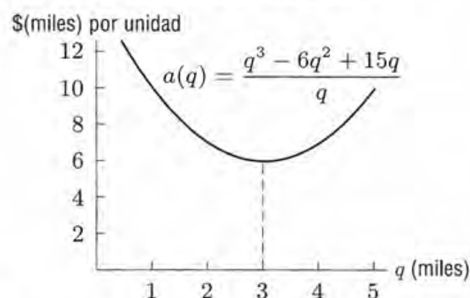


Figura 4.51. Gráfica de la función de costo promedio que muestra un valor mínimo.

Problemas para la sección 4.5

1. En la figura 4.52 se muestra la gráfica de una función de costos.

(a) En $q = 25$, calcule las siguientes cantidades y represente sus respuestas en forma gráfica.

(i) Costo promedio. **(ii)** Costo marginal.

(b) ¿Aproximadamente en qué valor de q el costo promedio es mínimo?

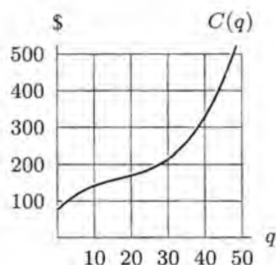


Figura 4.52.

2. La figura 4.53 muestra una función de costos con $q = 10{,}000$.

(a) Calcule el costo promedio cuando el nivel de producción es de 10,000 unidades e interprételo.

(b) Represente gráficamente su respuesta al inciso (a).

(c) Aproximadamente, ¿a qué nivel de producción se minimiza el costo promedio?

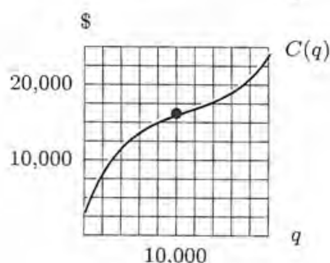


Figura 4.53.

3. El costo de producir q unidades es de $C(q) = 2{,}500 + 12q$ dólares.

(a) ¿Cuál es el costo marginal de producir la unidad número 100?, ¿la unidad número 1,000?

(b) ¿Cuál es el costo promedio de producir 100 artículos? ¿1,000 artículos?

4. La función de costos es $C(q) = 1{,}000 + 20q$. Encuentre el costo marginal de producir la unidad 200 y el costo promedio de producir 200 unidades.

5. El costo marginal a un nivel de producción de 2,000 unidades de un artículo es de \$10 por unidad y el costo promedio de producir 2,000 unidades es de \$15 por unidad. Si el nivel de producción aumentara ligeramente arriba de 2,000 unidades, ¿las siguientes cantidades aumentarían o disminuirían, o es imposible decirlo?

(a) Costo promedio. **(b)** Ganancia.

6. Trace la gráfica de una función de costos en donde el costo promedio mínimo sea de \$25 por unidad y se logre con un nivel de producción de 15,000 unidades.

7. Supongamos que usted es el gerente de una compañía que produce pantuflas que vende a \$20 el par. Produce 1,200 pares de pantuflas al mes, a un costo promedio de \$2 por par de pantuflas. El costo marginal en un nivel de producción de 1,200 es de \$3 por pantufla.

(a) ¿Usted está ganando o perdiendo dinero?

(b) Si aumenta la producción, ¿su costo promedio se eleva o disminuye? ¿Su ganancia?

(c) ¿Recomendaría que la producción se aumente o se reduzca?

8. Un trabajador agrícola en Uganda está plantando tréboles para aumentar el número de abejas que construyen sus panales en la región. De manera natural hay 100 abejas en la región y por cada acre plantado con trébol hay 20 abejas más.

(a) Trace una gráfica del número total, $N(x)$, de abejas como una función de x, el número de acres en los que se sembrará trébol.

(b) Explique, geométrica y algebraicamente, la forma de la gráfica de:

(i) La razón marginal del aumento en el número de abejas con acres de tréboles, $N'(x)$.

(ii) El número promedio de abejas por acre de tréboles, $N(x)/x$.

9. Trace una gráfica de la función de costo promedio correspondiente a la función de costo total que se muestra en la figura 4.54

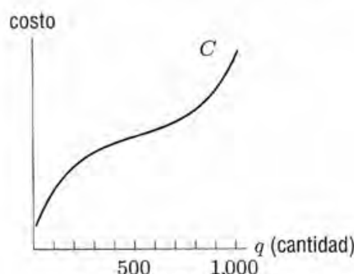


Figura 4.54.

10. Sea $C(q) = 0.04q^3 - 3q^2 + 75q + 96$ la función que representa el costo total de producir q artículos.

(a) Encuentre el costo promedio por unidad como una función de q.

(b) Utilice una calculadora de gráficas o una computadora para graficar el costo promedio respecto a q.

(c) ¿Para qué valores de q el costo promedio por unidad es decreciente? ¿Creciente?

(d) ¿Para qué valor de q el costo promedio por unidad es mínimo? ¿Cuál es el mínimo costo promedio por artículo en ese punto?

11. El costo total de la producción, en miles de dólares, es $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q$, donde q está en miles y $0 \leq q \leq 8$.

(a) Grafique a $C(q)$. Calcule visualmente la cantidad a la que el costo promedio se minimiza.

(b) Determine analíticamente el valor exacto de q en el que el costo promedio se minimiza.

12. El costo promedio por unidad de producir q unidades se obtiene mediante

$$a(q) = 0.01q^2 - 0.6q + 13, \quad \text{para} \quad q > 0.$$

(a) ¿Cuál es el costo total, $C(q)$, de producir q artículos?

(b) ¿Cuál es el costo marginal mínimo? ¿Cuál es la interpretación práctica de este resultado?

(c) ¿A qué nivel de producción el costo promedio es mínimo? ¿Cuál es el costo promedio más bajo?

(d) Calcule el costo marginal en $q = 30$. ¿Cómo se relaciona esto con la respuesta al inciso (c)? Explique esta relación verbal y analíticamente.

13. En cada función de costos de la figura 4.55, ¿hay algún valor de q para que el costo promedio sea mínimo? Si es así, ¿aproximadamente en qué punto? Explique su respuesta.

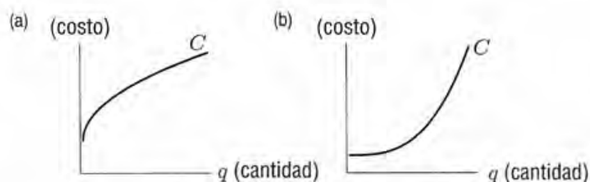


Figura 4.55.

14. Un modelo razonablemente realista de los costos de una compañía se obtiene con la *curva de costos de Cobb-Douglas a corto plazo*

$$C(q) = Kq^{1/a} + F,$$

donde a es una constante positiva, F es el costo fijo y K mide la tecnología con que cuenta la compañía.

(a) Demuestre que C es cóncava hacia abajo si $a > 1$.

(b) Suponiendo que $a < 1$, encuentre qué valor de q minimiza al costo promedio.

15. Demuestre analíticamente que si el costo marginal es menor al costo promedio, entonces la derivada del costo promedio respecto a la cantidad satisface $a'(q) < 0$.

16. Demuestre analíticamente que si el costo marginal es mayor al costo promedio, entonces la derivada del costo promedio respecto a la cantidad satisface $a'(q) > 0$.

4.6 ELASTICIDAD DE LA DEMANDA

Si una compañía cambia el precio de un artículo que vende, esperamos que cambie el número de artículos vendidos. Por lo general, un precio más alto genera menos ventas y un precio más bajo suele generar más ventas. Ahora consideramos cómo se ve afectada la demanda de un producto por un cambio en el precio.

Elasticidad de la demanda

La sensibilidad de la demanda a cambios en el precio varía con el producto. Por ejemplo, un cambio en el precio de los focos (bombillas eléctricas) posiblemente no afecte demasiado a su demanda, mientras que un cambio en el precio de una marca particular de automóviles tiene un efecto importante en la demanda de éstos.

Deseamos hallar una forma de medir esta sensibilidad de la demanda a cambios en el precio. Nuestra medición debe funcionar para productos tan diversos como focos y automóviles. Los precios de estos dos artículos son tan diferentes que tiene poco sentido hablar de cambios absolutos en el precio: un cambio de \$1 en el precio de los focos es un cambio sustancial, mientras que una variación de \$1 en el precio de un automóvil no tiene importancia. En vez de esto, utilizaremos un cambio fraccionario, o porcentual, en el precio. Por ejemplo, ¿de qué forma un aumento de 1% en el precio (ya sea de los focos o del automóvil) afecta a la demanda de ese producto? De manera similar, vemos el cambio fraccionario o porcentual de la demanda en lugar del cambio absoluto en ella.

Denotemos con Δp el cambio en el precio p de un producto y Δq representa el cambio correspondiente en la cantidad q demandada. El cambio fraccionario en el precio es $\Delta p/p$ y el cambio fraccionario en demanda es $\Delta q/q$. Observe que estos cambios fraccionarios suelen tener signos opuestos ya que un incremento en el precio, por lo general, ocasiona una disminución en la cantidad demandada. Para obtener un número positivo que compare los dos cambios, tomamos la magnitud (o valor absoluto) de sus cocientes:

$$\begin{array}{c}\text{Magnitud del cociente del cambio porcentual en}\\ \text{la demanda entre el cambio porcentual en el precio}\end{array} = \left|\frac{\Delta q/q}{\Delta p/p}\right| = \left|\frac{\Delta q}{q}\cdot\frac{p}{\Delta p}\right| = \left|\frac{p}{q}\cdot\frac{\Delta q}{\Delta p}\right|$$

Para cambios pequeños en p, se aproxima a $\Delta q/\Delta p$ por la derivada dq/dp. Definimos:

> La **elasticidad de la demanda** de un producto, que denotamos E, es la magnitud de la razón del cambio fraccionario en demanda entre el cambio fraccionario en el precio.[9] Tenemos:
>
> $$E = \left|\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp}\right|$$

El cambio del precio de un artículo en un 1% provoca un cambio de E% en la cantidad de artículos vendidos. Si $E > 1$, un aumento de 1% en el precio hace que la demanda caiga más de un punto porcentual, y decimos que la demanda es *elástica*. Si $0 \leq E < 1$, un aumento de un punto porcentual en el precio hace que la demanda disminuya en menos de 1% y se dice que la demanda *no es elástica*. En general, si la elasticidad es grande, entonces un cambio en el precio generará un cambio grande en el número de ventas.

Ejemplo 1 El aumento del precio de los cuartos de hotel de \$75 a \$80 por noche reduce las ventas semanales de 100 a 90 cuartos.

(a) ¿Cuál es la elasticidad de la demanda de los cuartos a un precio de \$75?

(b) ¿El propietario debe subir el precio?

Solución **(a)** El cambio porcentual en el precio es

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{5}{75} = 0.067 = 6.7\%$$

y el cambio porcentual en demanda es

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{-10}{100} = -0.1 = -10\%.$$

La elasticidad de la demanda es el cociente

$$E = \frac{0.10}{0.067} = 1.5.$$

La elasticidad es mayor que 1 porque el cambio porcentual en la demanda es mayor que el cambio porcentual en el precio.

---

[9]Cuando sea necesario distinguirla de otras elasticidades, esta cantidad se llama elasticidad de la demanda respecto al precio, o elasticidad del precio de la demanda.

(b) A un precio de \$75 por cuarto, el ingreso semanal es

(100 cuartos)(\$75 por cuarto) = \$7,500

A un precio de \$80 por cuarto, el ingreso semanal es

(90 cuartos)(\$80 por cuarto) = \$7,200

Un aumento en el precio produce una pérdida de ingreso, por lo que no debe aumentarse el precio.

Ejemplo 2 La curva de demanda de un producto está dada por $q = 1{,}000 - 2p^2$. Encuentre la elasticidad en $p = 10$ y en $p = 15$, e interprete sus respuestas.

Solución Primero encontramos la derivada $dq/dp = -4p$. A un precio de \$10, la cantidad demanda es $q = 1{,}000 - 2(10^2) = 800$ y $dq/dp = -4(10) = -40$. A este precio, la elasticidad es

$$E = \left|\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}\right| = \left|\frac{10}{800}(-40)\right| = 0.5.$$

La demanda no es elástica a un precio de \$10: un aumento de 1% en el precio tiene como resultado una reducción de aproximadamente 0.5% en la demanda.

A un precio de \$15, tenemos que $q = 550$ y $dq/dp = -60$. La elasticidad es

$$E = \left|\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}\right| = \left|\frac{15}{550}(-60)\right| = 1.64.$$

La demanda es elástica: un aumento de 1% en el precio resulta en un decrecimiento de aproximadamente 1.64% en la demanda.

Elasticidad de la demanda y máximo ingreso

En el ejemplo 2, a $p = 10$, la elasticidad es 0.5. Esto significa que si los precios aumentan 1% desde \$10, la demanda disminuye en aproximadamente 0.5%. Esto nos dice que podemos subir el precio sin afectar mucho la demanda, por tanto, es probable que el ingreso aumente si subimos el precio. Por otra parte, en $p = 15$ la elasticidad es 1.64. Un aumento de 1% en el precio de \$15 hace que la demanda caiga más o menos 1.64%. De modo alternativo, una reducción de 1% en el precio de \$15 hace que la demanda aumente en 1.64%. Puesto que un cambio en el precio tiene un efecto relativamente más grande en la demanda, es probable que subir el precio haga bajar el ingreso, de modo que podemos aumentar el ingreso al bajar el precio.

¿Cuál es el precio que produce el máximo ingreso? La tabla 4.5 muestra la demanda, q, el ingreso, I, y la elasticidad, E, para el producto del ejemplo 2 a varios precios. El ingreso $I = pq$ es el producto de dos cantidades, precio y demanda, y a medida que uno sube la otra baja. La elasticidad mide la importancia relativa de estos dos cambios en competencia. En la tabla se puede apreciar que el ingreso máximo se alcanza al fijar el precio en aproximadamente \$13, y que la elasticidad a ese precio es alrededor de 1. A precios por debajo de \$13, tenemos $E < 1$, lo que indica que la reducción de la demanda, generada por un aumento en el precio, será relativamente pequeña, por lo que al subir el precio, el ingreso se incrementa. En precios mayores a \$13, tenemos que $E > 1$, lo que indica que el aumento en la demanda, producido por un descenso en el precio, será relativamente grande, por lo que bajar el precio hace que el ingreso se incremente.

Tabla 4.5 *Ingreso y elasticidad en diferentes puntos*

Precio p	10	11	12	13	14	15
Demanda q	800	758	712	662	608	550
Ingreso I	8,000	8,338	8,544	8,606	8,512	8,250
Elasticidad E	0.5	0.64	0.81	1.02	1.29	1.64
	No elástico	No elástico	No elástico	Elástico	Elástico	Elástico

Se resume en lo siguiente:

Relación entre elasticidad e ingreso

- Si $E < 1$, la demanda no es elástica y el ingreso aumenta al subir el precio.
- Si $E > 1$, la demanda es elástica y el ingreso aumenta al bajar el precio.
- $E = 1$ en los puntos críticos de la función de ingreso.

Ejemplo 3 Demuestre analíticamente que los puntos críticos de la función de ingreso se presentan cuando $E = 1$.

Solución Consideramos el ingreso como una función del precio. Usando la regla del producto para derivar a $I = pq$, tenemos

$$\frac{dI}{dp} = \frac{d(pq)}{dp} = p\frac{dq}{dp} + \frac{dp}{dp}q = p\frac{dq}{dp} + q.$$

En un punto crítico, la derivada dI/dp es igual a cero, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} p\frac{dq}{dp} + q &= 0 \\ p\frac{dq}{dp} &= -q \\ \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} &= -1 \\ E &= 1 \end{aligned}$$

Elasticidad de la demanda para diferentes productos

Diferentes productos, por lo general, tienen elasticidades distintas. Si hay sustitutos cercanos de un producto, o si el producto es un lujo más que una necesidad, un cambio en el precio generalmente tiene un gran efecto sobre la demanda, y la demanda del producto es elástica. Por otra parte, si no hay sustitutos cercanos o si el producto es una necesidad, los cambios en el precio tienen un efecto relativamente pequeño en demanda y ésta no es elástica. Las demandas de sal, penicilina, lentes y focos no son elásticas en el rango usual de precios de estos productos. La tabla 4.6 enlista la elasticidad de la demanda respecto al precio de productos seleccionados.[10]

Tabla 4.6 *Elasticidad de la demanda para productos seleccionados*

Viaje en avión	1.10	Joyería	2.60
Automóviles	1.50	Leche	0.31
Refacciones de automóviles	0.50	Naranjas	0.97
Focos	0.33	Pollo	0.27
Harina	0.79	Radios	1.50
Muebles	3.04	Artículos deportivos	1.20
Pieles	2.30	Azúcar	0.44

Problemas para la sección 4.6

1. La elasticidad de un artículo es $E = 2$. ¿Cuál es el efecto en la demanda de:
   (a) Un aumento en el precio del 3%?
   (b) Una reducción en el precio del 3%?

2. La elasticidad de un producto es $E = 0.5$. ¿Cuál es el efecto en la demanda de:
   (a) Un aumento de 3% en el precio?
   (b) Una reducción de 3% en el precio?

[10]Kamerschen, David R., y Lloyd M. Valentine, *Intermediate Microeconomic Theory*, South-Western Publishing Co., 1977.

3. ¿Cuáles son las unidades de elasticidad si:

(a) El precio p está en dólares y la cantidad q está en toneladas?

(b) El precio p está en yenes y la cantidad q está en litros?

(c) ¿En general, qué puede usted concluir?

4. ¿Cuál es la elasticidad para joyería en la tabla 4.6? Explique lo que este número le dice acerca del efecto de aumentos de precio en la demanda de joyería. La demanda de joyería, ¿es elástica o no? ¿Es esto lo que usted esperaba? Explique.

5. ¿Cuál es la elasticidad de la leche en la tabla 4.6? Explique lo que dice este número acerca del efecto de aumentos del precio en la demanda de leche. La demanda de leche, ¿es elástica o no? ¿Esto es lo que usted esperaba? Explique.

6. ¿Usted esperaría que la demanda de televisores de alta definición sea elástica o no? Explique.

7. Hay muchas marcas de detergente para ropa. ¿Esperaría usted que la elasticidad de la demanda para una marca en particular sea alta o baja? Explique su razonamiento.

8. Sólo hay una empresa que ofrece servicio telefónico en una ciudad. ¿Esperaría usted que la elasticidad de la demanda del servicio telefónico sea alta o baja? Explique su razonamiento.

9. Se ha estimado que la elasticidad de la demanda de esclavos en el sur de Estados Unidos antes de la Guerra Civil era igual a 0.86 (más bien alta) en las ciudades e igual a 0.05 (muy baja) en el campo.[11]

(a) ¿A qué se debía esto?

(b) ¿De dónde cree que provenían los defensores más leales de la esclavitud, de la ciudad o del campo?

10. Suponga que la demanda de camotes está dada por $q = 5{,}000 - 10p^2$, donde q está en libras de camotes y p es el precio de una libra de camotes.

(a) Si el precio actual de los camotes es de \$2 por libra, ¿cuántas libras se venderán?

(b) ¿La demanda a un precio de \$2 es elástica o no? ¿Es más preciso decir que "Los consumidores quieren camotes y los comprarán a cualquier precio", o "Los camotes son un artículo de lujo y los consumidores dejarán de comprarlos si su precio sube demasiado"?

11. La demanda de camotes está dada en el problema 10.

(a) A un precio de \$2 por libra, ¿cuál es el ingreso total para el productor de camotes?

(b) Exprese al ingreso como una función del precio y después determine el precio que maximiza el ingreso.

(c) ¿Qué cantidad se vende al precio que usted determinó en el inciso (b) y cuál es el ingreso total?

(d) Demuestre que $E = 1$ al precio que usted calculó en el inciso (b).

12. La demanda de un producto es $q = 2{,}000 - 5p$ donde q son las unidades que se venden a un precio de p dólares. Encuentre la elasticidad si el precio es de \$20, e interprete su respuesta en términos de la demanda.

13. Las organizaciones escolares ganan dinero mediante la venta de dulces puerta por puerta. La tabla muestra p, el precio del dulce, y q, la cantidad vendida a ese precio.

p	\$1.00	\$1.25	\$1.50	\$1.75	\$2.00	\$2.25	\$2.50
q	2,765	2,440	1,980	1,660	1,175	800	430

(a) Calcule la elasticidad de la demanda a un precio de \$1.00. A este precio, ¿la demanda es elástica o no?

(b) Calcule la elasticidad en cada uno de los precios que se muestran. ¿Qué observa? Explique por qué sucede esto.

(c) ¿Aproximadamente a qué precio la elasticidad es igual a 1?

(d) Determine el ingreso total para cada uno de los precios mostrados. Verifique que el ingreso total alcance su máximo en aproximadamente el precio para el que $E = 1$.

14. Determine exactamente el precio que maximiza el ingreso de las ventas del producto del ejemplo 2.

15. **(a)** Si la ecuación de la demanda es $pq = k$ para una constante positiva k, calcule la elasticidad de la demanda.

(b) Explique su respuesta al inciso (a) en términos de la función de ingreso.

16. Demuestre que una ecuación de demanda $q = k/p^r$, donde r es una constante positiva, da una elasticidad constante $E = r$.

17. Si $E = 2$ para todos los precios p, ¿cómo puede usted hacer máximo el ingreso?

18. Si $E = 0.5$ para todos los precios p, ¿cómo puede usted hacer máximo el ingreso?

19. Demuestre analíticamente que si la elasticidad de la demanda satisface $E > 1$, entonces la derivada del ingreso respecto al precio satisface $dI/dp < 0$.

20. Demuestre analíticamente que si la elasticidad de la demanda satisface a $E < 1$, entonces la derivada del ingreso respecto al precio satisface $dI/dp > 0$.

21. Si q es la cantidad de carne de pollo demandada como una función del precio p de la carne de res, la elasticidad de *precio cruzado* de la demanda de pollo respecto al precio de la carne de res se define como $E_{cruzada} = |p/q \cdot dq/dp|$. ¿Qué indica la $E_{cruzada}$ respecto a la sensibilidad de la cantidad de pollo comprada en cuanto a cambios en el precio de la carne de res?

22. La elasticidad de *ingreso* de la demanda para un producto se define como $E_{ingreso} = |I/q \cdot dq/dI|$ donde q es la cantidad demandada como una función del ingreso I del consumidor. ¿Qué indica $E_{ingreso}$ acerca de la sensibilidad de la cantidad del producto comprado respecto a cambios en el ingreso del consumidor?

[11] McCloskey, Donald, *The Applied Theory of Price*, Macmillan, Nueva York, 1982, p. 134.

23. En la figura 4.56 aparece una función lineal de demanda. Algunos economistas calculan la elasticidad de la demanda E para cualquier cantidad q_0 con la fórmula

$$E = d_1/d_2,$$

donde d_1 y d_2 son las distancias verticales que se muestran en la figura 4.56.

(a) Explique por qué funciona esta fórmula.

(b) Determine los precios p, a los cuales **(i)** $E > 1$ **(ii)** $E < 1$ **(iii)** $E = 1$

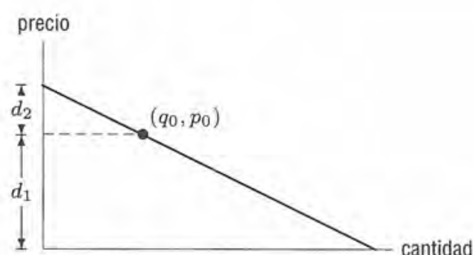


Figura 4.56.

4.7 CRECIMIENTO LOGÍSTICO

En 1923 se introdujeron 18 osos koala a la Isla Koala, frente a la costa de Australia.[12] Los osos se desarrollaron en la isla y su población creció a aproximadamente 5,000 en 1997. ¿Es razonable esperar que la población continúe creciendo de manera exponencial? Puesto que sólo hay una cantidad finita del espacio en la isla, la población no puede seguir creciendo sin límite por siempre. En vez de esto, esperamos que haya una población máxima que la isla pueda sostener. El crecimiento poblacional con un límite superior puede ser modelada con un *modelo de crecimiento logístico* o *inhibido*.

Un modelo de la población de Estados Unidos

Los proyectos de población fueron importantes primero para los filósofos políticos de finales del siglo XVIII. En vista de que ha crecido la preocupación por la escasez de recursos, también ha crecido el interés en proyecciones precisas de población. En Estados Unidos, cada diez años se registra la población mediante un censo; el primer censo se realizó en 1790. La tabla 4.7 contiene los datos de los censos de 1790 a 1990.

Tabla 4.7 *Población de Estados Unidos, en millones, 1790–1990*

Año	Población	Año	Población	Año	Población
1790	3.9	1860	31.4	1930	122.8
1800	5.3	1870	38.6	1940	131.7
1810	7.2	1880	50.2	1950	150.7
1820	9.6	1890	62.9	1960	179.3
1830	12.9	1900	76.0	1970	203.3
1840	17.1	1910	92.0	1980	226.5
1850	23.2	1920	105.7	1990	248.7

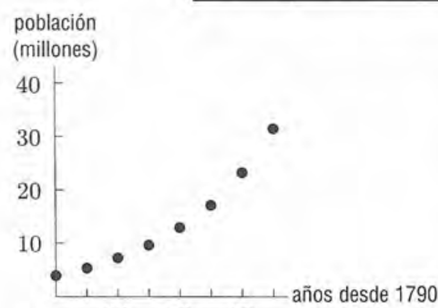


Figura 4.57. Población de Estados Unidos, en millones, 1790–1860.

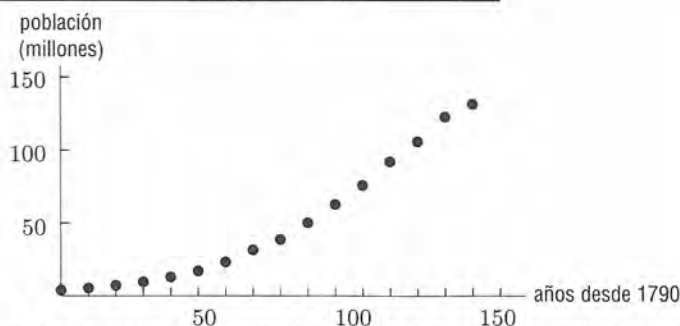


Figura 4.58. Población de Estados Unidos, 1790–1940.

La figura 4.57 indica que la población creció exponencialmente durante los años 1790–1860. Sin embargo, después de 1860 la tasa de crecimiento comenzó a disminuir. Véase la figura 4.58.

[12]*Watertown Daily Times*, 18 de abril de 1997.

Años 1790–1860: un modelo exponencial

Comencemos por hacer un modelo de la población de Estados Unidos para los años 1790–1860 usando una función exponencial. Si t es el número de años desde 1790 y P es la población en millones, una regresión produce la función exponencial que ajusta los datos como aproximadamente[13]

$$P = 3.9(1.03)^t.$$

de modo que entre 1790 y 1860 la población de Estados Unidos estaba creciendo a una tasa anual aproximada de 3 por ciento.

La función $P = 3.9(1.03)^t$ se traza en la figura 4.59 con los datos; ajusta los datos sorprendentemente bien. Por supuesto, como usamos los datos de todo el periodo de 70 años, deberíamos esperar buena concordancia en todo ese periodo. Lo sorprendente es que si hubiéramos usado sólo las poblaciones de 1790 y 1800 para crear nuestra función exponencial, las predicciones todavía serían muy precisas. Es asombroso que una persona en 1800 pudiera predecir la población de 60 años después en forma tan exacta, en especial cuando consideramos todas las guerras, recesiones, epidemias, anexiones de nuevos territorios y las inmigraciones que tuvieron lugar de 1800 a 1860.

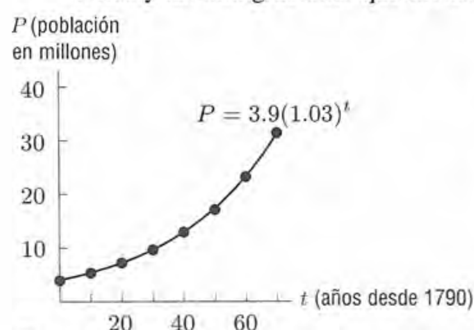


Figura 4.59. Un modelo exponencial para la población de Estados Unidos, 1790–1860.

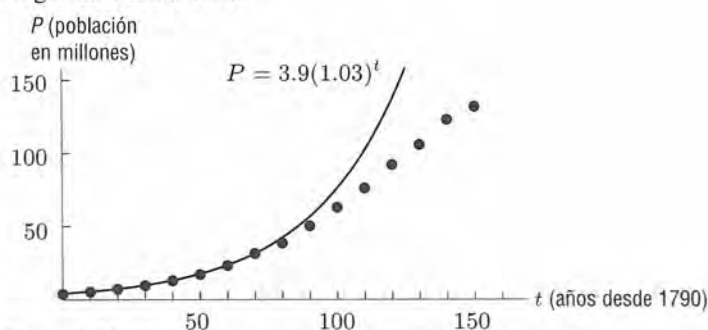


Figura 4.60. El modelo exponencial y la población de Estados Unidos, 1790–1940. No hay un buen ajuste después de 1860.

Años 1790–1940: un modelo logístico

¿Qué tan bien se ajusta la función exponencial a la población después de 1860? La figura 4.60 muestra una gráfica de la población de Estados Unidos de 1790 hasta 1940 con la función exponencial $P = 3.9(1.03)^t$. La función exponencial que ajustó los datos bien para los años 1790–1860 no ajusta bien después de 1860. Debemos buscar otra forma de modelar estos datos.

La gráfica de la función dada por los datos de la figura 4.58 es cóncava hacia arriba para valores pequeños de t, pero después parece que se vuelve cóncava hacia abajo y se nivela. Esta clase de crecimiento se modela con una *función logística*. Si t está en años desde 1790, la función

$$P = \frac{185}{1 + 48e^{-0.032t}},$$

cuya gráfica aparece en la figura 4.61, parece ajustar bien los datos anteriores a 1940. Dicha fórmula fue determinada por medio de una regresión logística en una calculadora o computadora.

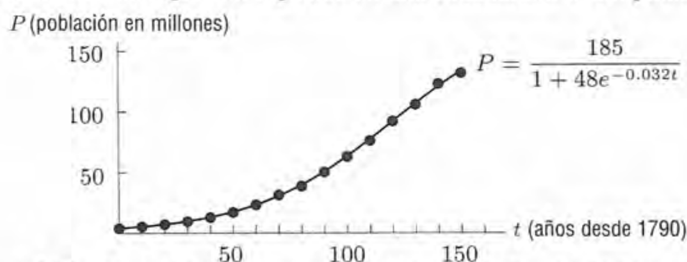


Figura 4.61. Un modelo logístico para la población de Estados Unidos, 1790–1940.

[13]Véase la sección de ajuste de fórmulas en la página 75. Algoritmos diferentes pueden dar como resultado fórmulas distintas.

Función logística

Una función logística, tal como la empleada para modelar la población de Estados Unidos, es creciente en todas partes. Su gráfica es cóncava hacia arriba al principio, luego se hace cóncava hacia abajo y se nivela hasta una asíntota horizontal. Como vimos en el modelo de población de Estados Unidos, una función logística es aproximadamente exponencial para pequeños valores[14] de t. Una función logística se puede usar para modelar las ventas de un nuevo producto y la propagación de un virus.

> Para las constantes positivas L, C, y k, una **función logística** tiene la forma
>
> $$P = f(t) = \frac{L}{1 + Ce^{-kt}}$$

La función logística general tiene tres parámetros: L, C, y k. En el ejemplo 1 investigaremos el efecto de dos de estos parámetros en la gráfica: el problema 18 de la página 206 considera el tercero.

Ejemplo 1 Considere la función logística $P = \frac{L}{1 + 100e^{-kt}}$

(a) Sea $k = 1$. Trace una gráfica de P para diferentes valores de L. Explique el efecto del parámetro L.
(b) Ahora sea $L = 1$. Trace una gráfica de P para diferentes valores de k. Explique el efecto del parámetro k.

Solución **(a)** Vea la figura 4.62. Observe que la gráfica se nivela en el valor L. El parámetro L determina la asíntota horizontal y el límite superior de P.

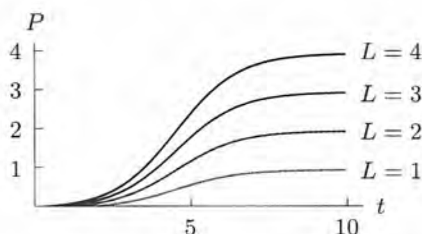


Figura 4.62. Gráfica de $P = \frac{L}{1 + 100e^{-kt}}$ para diferentes valores de L.

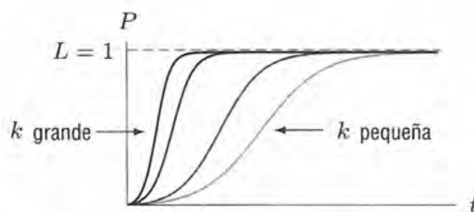


Figura 4.63. Gráfica de $P = \frac{1}{1 + 100e^{-kt}}$ para diferentes valores de k.

(b) Observe la figura 4.63. Note que a medida que k aumenta, la curva se aproxima a la asíntota de forma más rápida. El parámetro k afecta la inclinación de la curva.

Capacidad de carga y el punto de rendimientos decrecientes

El ejemplo 1 indica que el parámetro L de la función logística es el valor en el que se nivela P, en el cual

$$P = \frac{L}{1 + Ce^{-kt}}.$$

Este valor L recibe el nombre de *capacidad de carga* y representa la máxima población que un medio ambiente puede sostener.

Una forma de estimar la capacidad de carga es hallar el punto de inflexión. Sabemos que la gráfica de una curva logística es, al inicio, cóncava hacia arriba y después, cóncava hacia abajo. En el punto de

[14]Hasta qué punto es lo suficientemente pequeño depende de los valores de los parámetros C y k.

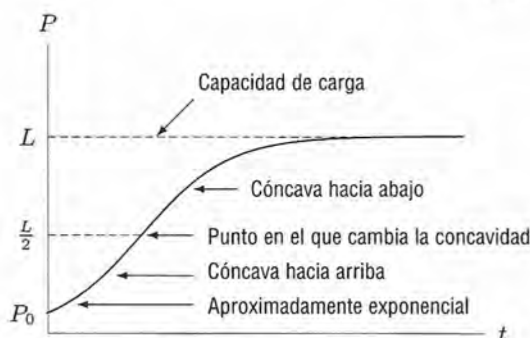


Figura 4.64. Crecimiento logístico.

inflexión, en el que la concavidad cambia, la pendiente es máxima. A la izquierda de este punto la gráfica es cóncava hacia arriba y la razón de crecimiento es creciente. A la derecha de este punto, la gráfica es cóncava hacia abajo y la razón de crecimiento es decreciente. El punto de inflexión se llama el *punto de rendimientos decrecientes.* El problema 19 de la página 206 muestra que este punto se encuentra en $P = L/2$. Véase la figura 4.64. A veces las compañías buscan que esta concavidad cambie en las ventas de un producto nuevo y puedan utilizarla para estimar las ventas máximas potenciales.

Propiedades de la función logística $P = \dfrac{L}{1 + Ce^{-kt}}$.

- El valor límite L representa la capacidad de carga de P.
- El punto de rendimientos decrecientes es el punto de inflexión donde P está aumentando lo más rápido posible. Se presenta en el punto donde $P = L/2$.
- La función logística es aproximadamente exponencial para pequeños valores de t, con una tasa de crecimiento k.

Años 1790–1990: otra mirada a la población de Estados Unidos

Utilizamos una función logística para hacer un modelo de la población de Estados Unidos entre 1790 y 1940. ¿Qué tan bien se ajusta este modelo a la población de Estados Unidos desde 1940? Veamos ahora todos los datos de la población de 1790 a 1990.

Ejemplo 2 Si t es en años desde 1790 y P es en millones, empleamos la siguiente función logística para hacer un modelo de la población de Estados Unidos entre 1790 y 1940:

$$P = \frac{185}{1 + 48e^{-0.032t}}.$$

De acuerdo con esta función, ¿cuál es la población máxima de Estados Unidos? ¿La predicción es acertada? ¿Qué tan bien se ajusta este modelo logístico al crecimiento de la población de Estados Unidos desde 1940?

Tabla 4.8 *Población de Estados Unidos pronosticada contra la real, en millones, 1940–1990 (modelo logístico)*

Año	1940	1950	1960	1970	1980	1990
Real	131.7	150.7	179.3	203.3	226.5	248.7
Pronosticada	132.6	143.6	151.1	160.7	166.7	171.3

Solución La tabla 4.8 muestra la población real de Estados Unidos entre 1940 y 1990 y los valores pronosticados usando este modelo logístico. De acuerdo con la fórmula para la función logística, el límite superior de la población es $L = 185$ millones. Sin embargo, la tabla 4.8 muestra que la población real de Estados Unidos era superior a esa cifra en 1970. El ajuste entre la función logística y la población real no es bueno después de 1940.

A pesar de la Segunda Guerra Mundial, que sin duda redujo el crecimiento poblacional entre 1942 y 1945, en la última mitad de la década de 1940 se elevó la población de Estados Unidos. En la década de 1950 hubo un crecimiento poblacional de 28 millones, lo que descarta a nuestro modelo logístico. Este aumento de población se conoce como explosión demográfica.

De nuevo hemos llegado a un punto donde nuestro modelo ya no es útil. Esto no debe llevarlo a pensar que no se puede hallar un modelo matemático razonable, sino que, más bien, señala que no hay modelo perfecto y que cuando falla un modelo, buscamos otro mejor. Así como dejamos el modelo exponencial en favor del modelo logístico para la población de Estados Unidos, podemos buscar más.

Predicciones de ventas

Con frecuencia las ventas totales de un producto nuevo siguen un modelo logístico. Por ejemplo, cuando aparece en el mercado un nuevo disco compacto (CD), las ventas aumentan, al inicio, rápidamente, a medida que se conoce el nombre del CD. Al final, muchas personas que buscaban el CD ya lo han comprado y entonces bajan las ventas. La gráfica de ventas totales respecto al tiempo es cóncava hacia arriba al principio y después cóncava hacia abajo, con el límite superior L igual a las ventas potenciales máximas.

Ejemplo 3 La tabla 4.9 muestra las ventas totales (en miles) de un nuevo CD desde su introducción en el mercado.

(a) Encuentre el punto donde cambia la concavidad de esta función. Utilícela para estimar las ventas potenciales máximas, L .

(b) Por medio de una regresión logística, ajuste una función logística a estos datos. ¿Cuáles son las ventas potenciales máximas que predice esta función?

Tabla 4.9 *Ventas totales de un nuevo CD desde su presentación*

t (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7
P (ventas totales en miles)	0.5	2	8	33	95	258	403	496

Solución **(a)** La tasa de cambio de las ventas totales aumenta hasta $t = 5$ y disminuye después de $t = 5$, por lo que el punto de inflexión se encuentra aproximadamente en $t = 5$, cuando $P = 258$. Por tanto, $L/2 = 258$ y $L = 516$. Se estima que las ventas potenciales máximas de este CD son de 516,000.

(b) La regresión logística da la siguiente función:

$$P = \frac{532}{1 + 869e^{-1.33t}}.$$

Las ventas potenciales máximas pronosticadas por esta función son $L = 532$, o sea unos 532,000 CD. Véase la figura 4.65.

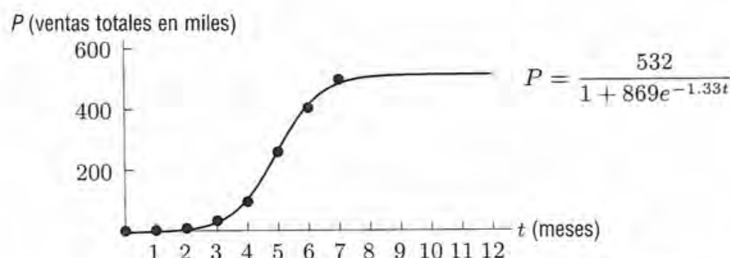


Figura 4.65. Crecimiento logístico: ventas totales de un CD.

Ejemplo 4 Los reproductores de discos compactos fueron introducidos por primera vez en el al mercado en 1982, y desde entonces las ventas han aumentado constantemente. Las ventas totales acumuladas en todo el mundo[15] se muestran en la figura 4.66. ¿Cree usted que las ventas parecen haber llegado al punto de rendimientos decrecientes? ¿Qué le dice esto sobre las ventas potenciales máximas?

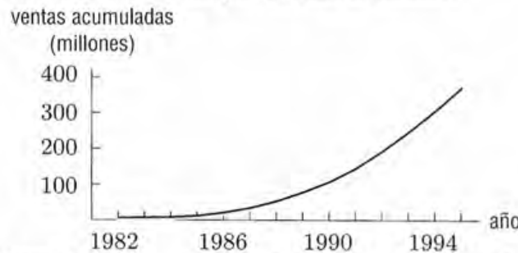


Figura 4.66. Ventas acumuladas de reproductores de CD.

Solución Parece que la gráfica de la figura 4.66 es cóncava hacia arriba en todas partes, de modo que el punto de rendimientos decrecientes todavía no se ha alcanzado. Puesto que la concavidad todavía no ha cambiado, el punto $L/2$ se encuentra arriba del valor de 1995, que es de aproximadamente 365 millones. Esto significa que se pronostica que las ventas potenciales máximas de los reproductores de CD son mayores a $2 \times 365 = 730$ millones de aparatos.

Curvas de respuesta a la dosis

Una *curva de respuesta a la dosis* traza la intensidad de la respuesta fisiológica a un medicamento como una función de la dosis suministrada. A medida que aumenta la dosis, la intensidad de la respuesta también se incrementa, por lo que una función de respuesta a la dosis es creciente. La intensidad de la respuesta, por lo general, se mide como un porcentaje de la máxima respuesta. La curva no puede sobrepasar a la máxima respuesta (o sea, 100%), de modo que la curva se nivela en una asíntota horizontal. Con frecuencia, las curvas de respuesta a la dosis son cóncavas hacia arriba en dosis pequeñas y cóncavas hacia abajo en dosis mayores. Es posible modelar una curva de respuesta a la dosis mediante una función logística que tenga como variable independiente la dosis del medicamento, no el tiempo. Una curva de respuesta a la dosis muestra la cantidad de medicamento necesaria para producir el efecto deseado, así como el efecto máximo que puede obtenerse y la dosis necesaria para alcanzarlo. La pendiente de la curva de respuesta a la dosis da información acerca del margen terapéutico de seguridad del medicamento.

El medicamento necesita ser administrado en una dosis que sea lo suficientemente grande para que sea eficaz, pero no demasiado grande como para ser peligrosa. La figura 4.67 muestra dos curvas de respuesta a la dosis: una con una pendiente pequeña y otra con una pendiente grande. En la figura 4.67(a) hay un amplio rango de dosificaciones en las que el medicamento es seguro y eficaz. En la figura 4.67(b), donde la pendiente de la curva es empinada, es pequeño el rango de dosificaciones en que la sustancia es tanto segura como efectiva. Si la pendiente de la curva de respuesta a las dosis es empinada, un error pequeño en la dosificación puede tener resultados peligrosos. La administración de dicho medicamento tiene dificultades.

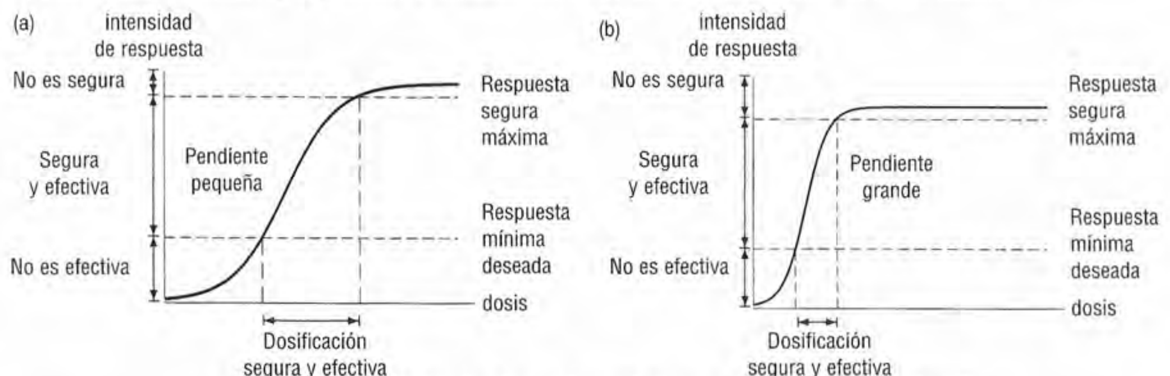


Figura 4.67. ¿Qué indica la pendiente de la curva de respuesta a la dosis?

[15]Adaptado de Alan E. Bell, "Next-generation Compact Discs", en *Scientific American*, julio de 1996, p. 45.

Ejemplo 5 La figura 4.68 muestra curvas de respuesta a las dosis de tres medicamentos distintos que se emplean con el mismo fin. Analice las ventajas y desventajas de los tres medicamentos.

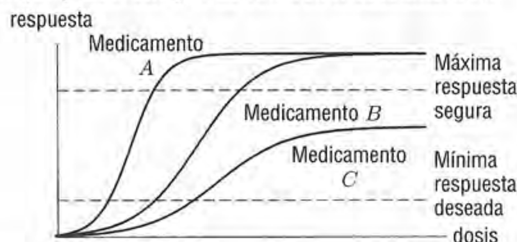


Figura 4.68. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada uno de estos medicamentos?.

Solución Los medicamentos A y B muestran la misma respuesta máxima, mientras que la respuesta máxima del medicamento C es considerablemente menor; sin embargo, los tres medicamentos alcanzan la mínima respuesta deseada. La potencia de los medicamentos B y C (la dosis necesaria para obtener el efecto deseado) es por mucho menor que la potencia del medicamento A. (Sin embargo, la potencia es una característica de relativa poca importancia de un medicamento, ya que un medicamento menos potente puede administrarse en dosis más grandes.) El medicamento A tiene una pendiente más empinada que cualquiera de los otros dos. Es factible que tanto el medicamento A como el B exceda la máxima respuesta segura. Por consiguiente, el medicamento C puede ser el preferido a pesar de su menor efecto máximo porque es el más seguro de administrar.

Problemas para la sección 4.7

1. Sustituya a $t = 0, 10, 20, ..., 70$ en la función exponencial que se utilizó en esta sección para modelar la población de Estados Unidos de 1790 a 1860. Compare los valores pronosticados de la población con los valores reales.

2. En esta sección se empleó una función logística para modelar la población de Estados Unidos. Utilice esta función para pronosticar la población de ese país en cada uno de los años de censo de 1790 a 1940. Compare los valores con los reales.

3. Se extiende un rumor en un grupo de 400 personas. El número de personas, $N(t)$, que han oído el rumor en un tiempo de t horas a partir de que comenzó a extenderse se puede aproximar por medio de una función de la forma

$$N(t) = \frac{400}{1 + 399e^{-0.4t}}.$$

(a) Encuentre $N(0)$ e interprételo.

(b) ¿Cuántas personas habrán oído el rumor después de dos horas? ¿Después de 10 horas?

(c) Trace una gráfica de $N(t)$.

(d) Aproximadamente, ¿cuánto tardará hasta que la mitad de las personas hayan escuchado el rumor? ¿Prácticamente todos?

(e) ¿Aproximadamente en qué momento se extiende el rumor con más rapidez?

4. Si t está dado en años desde 1990, un modelo de la población mundial, P, en miles de millones, es

$$P = \frac{40}{1 + 11e^{-0.08t}}.$$

(a) ¿Cuál es la máxima población mundial sustentable que predice este modelo?

(b) Trace una gráfica de P respecto a t.

(c) De acuerdo con este modelo, ¿cuándo llegará a 20 mil millones la población de la Tierra? ¿A 39,900 millones?

5. La siguiente tabla muestra el porcentaje, P, de los hogares con un televisor que también tienen una videocasetera.[16]

Año	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
P	0.3	0.5	1.1	1.8	3.1	5.5	10.6
Año	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
P	20.8	36.0	48.7	58.0	64.6	71.9	71.9

(a) Explique por qué es razonable utilizar un modelo logístico para estos datos.

(b) Calcule al punto de rendimiento decreciente. ¿Qué valor límite L predice este punto? ¿Parece ser que este valor límite es acertado, considerando los porcentajes de los años 1990 y 1991?

(c) Si t está dado en años desde 1978, la función logística que mejor se ajusta a estos datos resulta ser

$$P = \frac{75}{1 + 317e^{-0.67t}},$$

¿Qué valor límite predice esta función?

(d) Explique, en términos de los porcentajes de hogares, qué indica el valor límite. ¿Considera que su respuesta al inciso (c) es un pronóstico acertado? ¿Cuál considera que será el porcentaje final de hogares con un televisor que también tienen una videocasetera?

[16] *Statistical Abstract of the United States*, 1992.

6. Escriba un párrafo que explique por qué las ventas de un producto nuevo, con frecuencia, tienen una curva logística. Explique por qué le conviene a la compañía tomar en cuenta el punto de rendimientos decrecientes.

7. La siguiente tabla muestra las ventas totales, en miles, desde que se lanzó un nuevo juego al mercado.

(a) Grafique esta información y marque en la gráfica el punto de rendimientos decrecientes.

(b) Pronostique las ventas posibles de este juego, utilizando el punto de rendimientos decrecientes.

Mes	0	2	4	6	8	10	12	14
Ventas	0	2.3	5.5	9.6	18.2	31.8	42.0	50.8

8. La comunidad indígena Tojolobal Maya del Sur de México tiene una cantidad fija de tierra.[17] La proporción, P, de tierra, para uso agrícola, t años después de 1935 se modela con la función logística

$$P = \frac{1}{1 + 3e^{-0.0275t}}.$$

(a) ¿Cuál era la proporción de tierra que estaba destinada a la agricultura en 1935?

(b) ¿Cuál es el pronóstico a largo plazo de este modelo?

(c) ¿En qué momento la mitad del terreno se utilizaba para la agricultura

(d) ¿En qué momento aumenta más rápido la proporción de la tierra destinada a la agricultura?

9. Una curva que representa el número total de personas, P, infectadas con un virus suele tener la forma de una curva logística de $P = \frac{L}{1 + Ce^{-kt}}$, con el tiempo t en semanas. Suponga que originalmente 10 personas tienen el virus y que en las primeras etapas el número de personas infectadas crece aproximadamente en forma exponencial, con una tasa continua de 1.78. Se calcula que, a largo plazo, unas 5,000 personas se infectarán.

(a) ¿Con qué fin deben utilizarse los parámetros k y L?

(b) Halle C considerando que cuando $t = 0$, tenemos que $P = 10$.

(c) Ahora que ya ha calculado a L, k y C, ¿cuál es la función logística que usted emplea para modelar los datos? Grafique esta función.

(d) Calcule el tiempo que debe transcurrir para que la razón a la que se infecta la gente comience a disminuir. ¿Cuál es el valor de P en este punto?

10. (a) Trace una curva logística. Marque la capacidad de carga L y el punto de rendimientos decrecientes t_0.

(b) Trace la derivada de la curva logística. Marque el punto t_0 en el eje horizontal.

(c) Una compañía registra la razón de ventas (por ejemplo, las ventas por semana) en vez de las ventas totales. Explique cómo puede saber la compañía, al ver la gráfica de la razón de ventas, cuándo se ha alcanzado el punto de rendimientos decrecientes.

11. Una curva de respuesta a la dosis se obtiene con $R = f(x)$, donde R es el porcentaje de respuesta máxima y x es la dosis del medicamento en miligramos. Suponga que la curva tiene la forma que se muestra en la figura 4.67 en la página 203. El punto de inflexión está en (15, 50) y $f'(15) = 11$.

(a) Explique qué le indica $f'(15)$ en términos de dosis y respuesta para este medicamento.

(b) ¿$f'(10)$ es mayor o menor que 11? ¿$f'(20)$ es mayor o menor que 11? Explique.

12. La figura 4.69 muestra que la capacidad mundial de generación de electricidad de las plantas de energía nuclear entre 1960 y 1993 parece seguir una curva logística.[18]

(a) ¿Cuál es la concavidad de la curva entre 1960 y 1975? ¿Qué le indica esto acerca de la razón del aumento de la energía nuclear durante ese tiempo?

(b) ¿Aproximadamente en qué punto cambia la concavidad? ¿Cuántos gigawatts de energía nuclear se producen durante ese tiempo? ¿Qué valor límite pronostica este modelo para la capacidad de las plantas de energía nuclear alrededor del mundo? ¿Esta respuesta coincide con lo que usted observa en la gráfica?

(c) Suponiendo que un modelo logístico se ajusta a estos datos, ¿qué pronostica este modelo sobre la capacidad de generación de las plantas de energía nuclear en los años posteriores a 1993? ¿El modelo pronostica que el uso de energía nuclear aumentará, disminuirá o seguirá siendo el mismo?

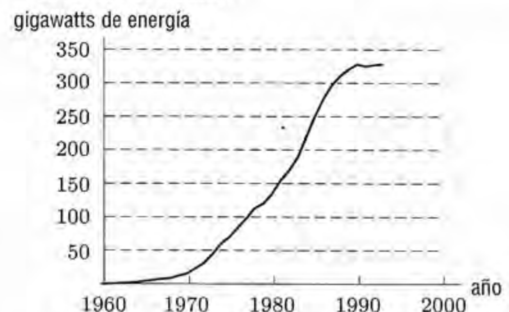


Figura 4.69.

13. Las curvas de respuesta a las dosis de tres productos distintos se muestran en la figura 4.70 de la página 206.

(a) Para la respuesta deseada, ¿qué medicamento requiere la dosis mayor?, ¿cuál la dosis menor?

(b) ¿Qué medicamento tiene la mayor respuesta máxima? ¿Cuál tiene la menor?

(c) ¿Qué medicamento es más seguro de administrar? Explique.

[17]Adaptado de J. S. Thomas y M. C. Robbins, "The Limits to Growth in a Tojolobal Maya Ejido", en *Geoscience and Man*, núm. 26, Geoscience Publications, Baton Rouge, 1988, pp. 9-16.

[18]Lester R. Brown, *et al.*, *Vital Signs 1994*, W. W. Norton, Nueva York, *1994*, p. 53.

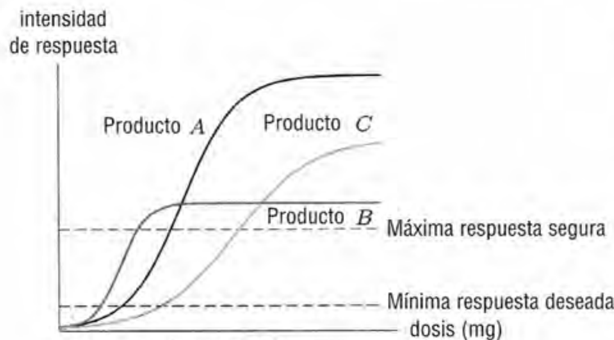


Figura 4.70.

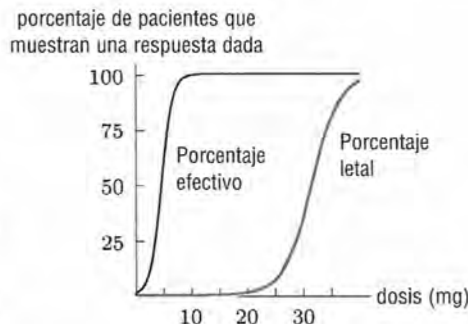


Figura 4.71.

14. Si R es el porcentaje de la respuesta máxima y x es la dosis en mg, la curva de respuesta a la dosis de un medicamento está dada por

$$R = \frac{100}{1 + 100e^{-0.1x}}.$$

(a) Trace una gráfica de esta función.

(b) ¿Qué dosis corresponde a una respuesta del 50% del máximo? Éste es el punto de inflexión, en el que la respuesta está creciendo más rápidamente.

(c) Para este medicamento, la respuesta deseada mínima es del 20% y la máxima respuesta segura es del 70%. ¿Qué rango de las dosis es tanto seguro como efectivo para este medicamento?

15. Explique por qué es más seguro utilizar un medicamento para el que la derivada de la curva respuesta a la dosis es menor.

Hay dos clases de curvas de respuesta a la dosis. Una de ellas, que se analiza en esta sección, traza la intensidad de la respuesta respecto a la dosis del medicamento. Ahora, consideremos una curva de respuesta a la dosis, en la que el porcentaje de sujetos que muestran una respuesta específica se grafica respecto a la dosis del medicamento. En los problemas 16 y 17, la curva de la izquierda muestra el porcentaje de personas que muestran la respuesta deseada a una dosis dada y la curva de la derecha muestra el porcentaje de individuos en los cuales la dosis es letal.

16. En la figura 4.71, ¿qué rango de dosis parece ser seguro y eficaz para el 99% de los pacientes?

17. En la figura 4.72, analice los resultados posibles e indique el porcentaje de los pacientes a los que pertenece cada resultado cuando se les suministran 50 mg del medicamento.

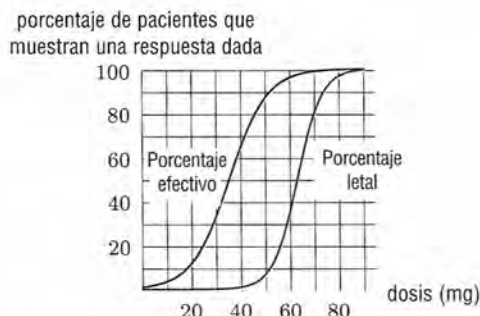


Figura 4.72.

18. Investigue el efecto del parámetro C en la curva logística $P = \frac{10}{1 + Ce^{-t}}$. Sustituya varios valores de C y explique, con una gráfica y verbalmente, el efecto de C en la gráfica.

19. Considere una población P que satisfaga la *ecuación logística*

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{L}\right).$$

(a) Utilice la regla de la cadena para determinar a d^2P/dt^2.

(b) Demuestre que el punto de rendimientos decrecientes, en el cual $d^2P/dt^2 = 0$ se presenta donde $P = L/2$.

4.8 FUNCIÓN PULSO Y CONCENTRACIÓN DE MEDICAMENTO

Nicotina en sangre

Cuando una persona fuma un cigarrillo la nicotina entra en su cuerpo a través de los pulmones, se absorbe en la sangre y se disemina por todo el cuerpo. La mayoría de los cigarrillos contienen entre 0.5 y 2.0 mg de nicotina; aproximadamente 20% (entre 0.1 y 0.4 mg) se inhala y se absorbe en el torrente de la per-

sona. A medida que la nicotina sale de la sangre, el fumador siente la necesidad de otro cigarrillo. La vida media de la nicotina en el torrente sanguíneo es de aproximadamente dos horas. Una dosis mortal se considera que es de alrededor de 60 mg.

El nivel de nicotina en la sangre aumenta a medida que una persona fuma y disminuye cuando deja de fumar. La tabla 4.10 muestra la concentración de nicotina en la sangre (en mg/ml) durante y después del uso de cigarrillos. (El acto de fumar ocurrió durante los primeros diez minutos y los datos experimentales que se muestran representan valores promedio para diez personas.)[19]

Los puntos en la tabla 4.10 están trazados en la figura 4.73. Las funciones con este comportamiento se denominan *funciones pulso*. Tienen ecuaciones de la forma $y = ate^{-bt}$, donde a y b son constantes positivas.

Tabla 4.10 *Concentraciones de nicotina en la sangre durante y después del uso de cigarrillos*

t (minutos)	0	5	10	15	20	25	30	45	60	75	90	105	120
C (ng/ml)	4	12	17	14	13	12	11	9	8	7.5	7	6.5	6

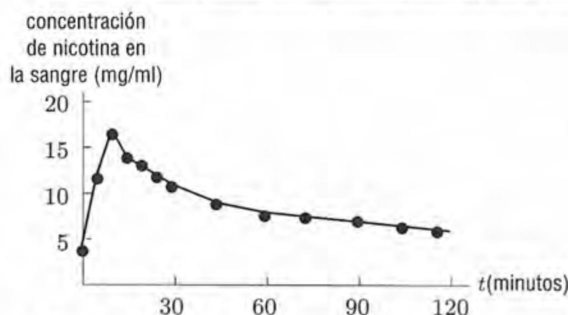


Figura 4.73. Concentraciones de nicotina en la sangre durante y después del uso de cigarrillos.

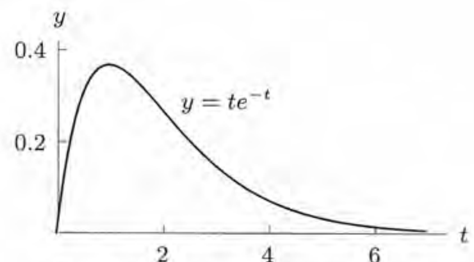


Figura 4.74. Un miembro de la familia $y = ate^{-bt}$, con $a = 1$ y $b = 1$.

Familia de funciones $y = te^{-bt}$

¿Qué efectos tienen los parámetros a y b en la forma de la gráfica de $y = te^{-bt}$? Comencemos por ver la gráfica con $a = 1$ y $b = 1$. Véase la figura 4.74. Ahora consideremos el efecto del parámetro b en la gráfica de $y = ate^{-bt}$; el parámetro a se considera en el problema 1 de la página 210.

Efecto del parámetro b en $y = ate^{-bt}$

En la figura 4.75 se ilustran gráficas de $y = ate^{-bt}$ para diferentes valores positivos de b. La forma general de la curva no cambia cuando b cambia, pero cuando b decrece, la curva se eleva durante un periodo más largo de tiempo y hasta un valor mayor.

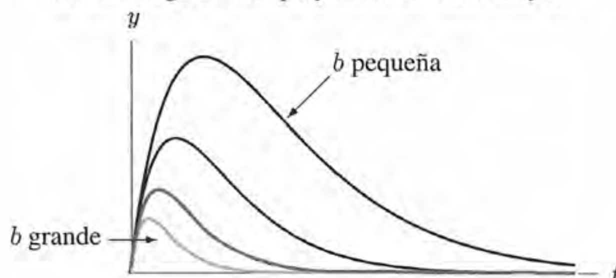


Figura 4.75. Gráfica de $y = te^{-bt}$, con b variando.

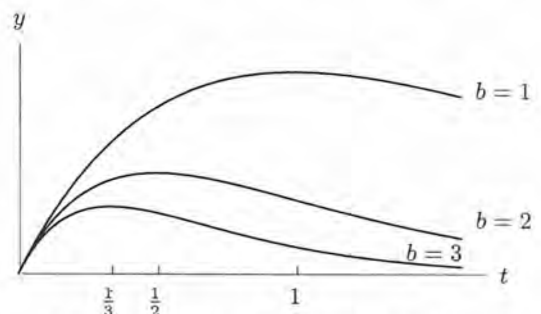


Figura 4.76. ¿Cómo depende de b el máximo?

Vemos en la figura 4.76 que, cuando $b = 1$, el máximo se presenta alrededor de $t = 1$. Cuando $b = 2$ se presenta alrededor de $t = \frac{1}{2}$ y cuando $b = 3$, está en $t = \frac{1}{3}$. El siguiente ejemplo muestra que el máximo de la función $y = te^{-bt}$ se presenta en $t = 1/b$.

[19]Benowitz, Porched, Skeiner, Jacob, "Nicotine Absorption and Cardiovascular Effects with Smokeless Tobacco Use: Comparison with Cigarettes and Nicotine Gum", en *Clinical Pharmacology and Therapeutics*, núm. 44, 1988, p. 24.

Ejemplo 1 Para $b > 0$, muestre que el valor máximo de $y = te^{-bt}$ ocurre en $t = 1/b$ y aumenta a medida que b se reduce.

Solución El máximo se obtiene en un punto crítico donde $dy/dt = 0$. Derivando obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = 1 \cdot e^{-bt} + t\left(-be^{-bt}\right) = e^{-bt} - bte^{-bt} = e^{-bt}(1 - bt).$$

Por consiguiente, $dy/dt = 0$ donde

$$1 - bt = 0$$
$$t = \frac{1}{b}$$

Sustituyendo $t = 1/b$ muestra que, para el máximo,

$$y = \frac{1}{b}e^{-b(1/b)} = \frac{e^{-1}}{b}.$$

Así, para $b > 0$, a medida que b aumenta, el valor máximo de y disminuye y viceversa.

La función pulso $y = ate^{-bt}$ aumenta rápidamente y disminuye hacia cero con un máximo en $t = 1/b$.

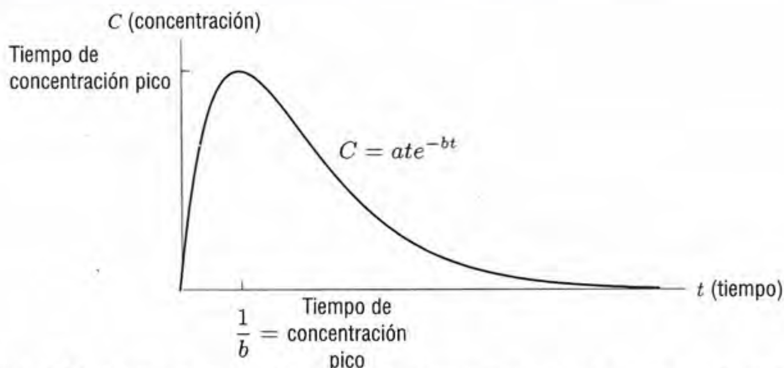


Figura 4.77. La curva muestra la concentración de una sustancia como una función de tiempo.

Curvas de concentración de medicamento

Cuando la concentración, C, de un medicamento en el cuerpo se traza en una gráfica contra el tiempo, t, desde que el medicamento se administró, la curva generalmente tiene la forma que se muestra en la figura 4.77. Ésta se llama *curva de concentración de medicamento* y se modela con una función de la forma $C = ate^{-bt}$. La figura 4.77 muestra la concentración pico (la máxima concentración de la sustancia en el cuerpo) y el tiempo en que la concentración pico se alcanza.

Factores que afectan la absorción de un medicamento

La interacción con otros medicamentos y la edad del paciente puede afectar la curva de concentración de esa medicina. En los problemas 7 y 10 vemos que la ingestión de comida también puede afectar la razón de absorción de una sustancia y (quizá es lo más sorprendente) las curvas de concentración pueden variar mucho dependiendo de las marcas comerciales.

Ejemplo 2 La figura 4.78 muestra las curvas de concentración de paracetamol (acetaminofeno) solo y de paracetamol combinado con propantelina. La figura 4.79 muestra curvas de concentración de la sustancia para pacientes que se sabe que absorben lentamente el medicamento, para el paracetamol solo y para el paracetamol con metaclopramida. Analice los efectos de las sustancias adicionales en el pico de concentración y el tiempo que tarda en alcanzarse el pico de concentración.[20]

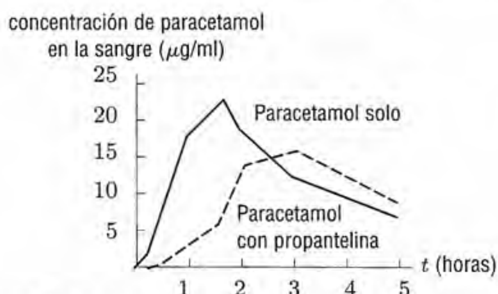


Figura 4.78. Curvas de concentración de paracetamol, en pacientes normales.

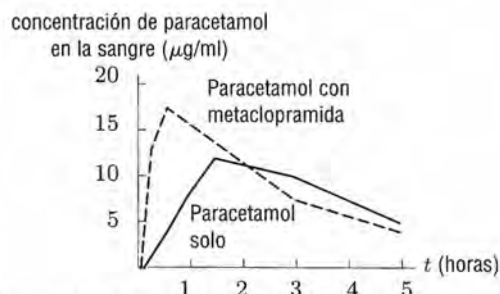


Figura 4.79. Curvas de concentración de paracetamol, en pacientes de absorción lenta.

Solución La figura 4.78 muestra que le toma 1.5 horas al paracetamol alcanzar su máximo de concentración, el cual se logra con 23 μg de paracetamol por ml de sangre, aproximadamente. Sin embargo, si la propantelina se administra con paracetamol, le toma mucho más tiempo alcanzar el pico de concentración (unas tres horas, o tal vez el doble del tiempo) y la concentración pico es mucho menor: aproximadamente 16 μg/ml.

Comparando las curvas de paracetamol sólo en las figuras 4.78 y 4.79 se muestra que el tiempo que tarda en alcanzar la concentración pico es el mismo (aproximadamente 1.5 horas), pero la concentración máxima es menor en pacientes con absorción lenta. Cuando la metaclopramida se administra en conjunto con el paracetamol, en la figura 4.79, la concentración pico se alcanza más rápido y es más alta.

Concentración mínima efectiva

La concentración mínima efectiva de un medicamento es la concentración en la sangre necesaria para alcanzar una respuesta farmacológica. El tiempo en el se alcanza esta concentración se conoce como inicio; la terminación ocurre cuando la concentración del medicamento cae por debajo de este nivel. (Véase la figura 4.80.)

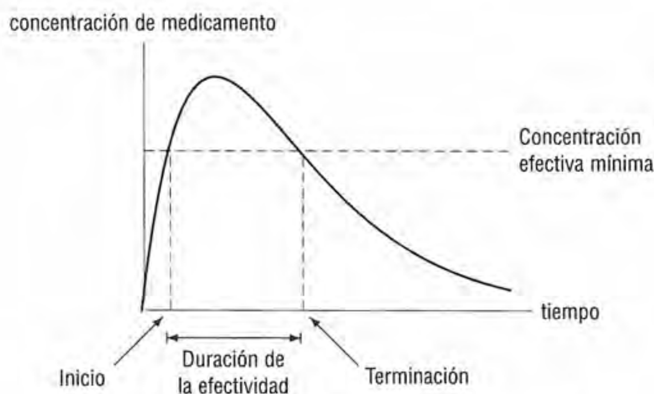


Figura 4.80. ¿Cuándo es efectivo el medicamento?

[20]S. Avery, Graeme, *Drug Treatment: Principle and Practice of Clinical Pharmacology and Therapeutics*, Adis Press, Sydney, Australia, 1976.

Ejemplo 3 El uso de la Depo-Provera fue aprobado en Estados Unidos en 1992 como anticonceptivo. La figura 4.81 muestra la curva de concentración del medicamento para una dosis intramuscular de 150 mg. [21] La concentración mínima efectiva es de aproximadamente 4mg/ml. ¿Con qué frecuencia hay que administrar el medicamento?

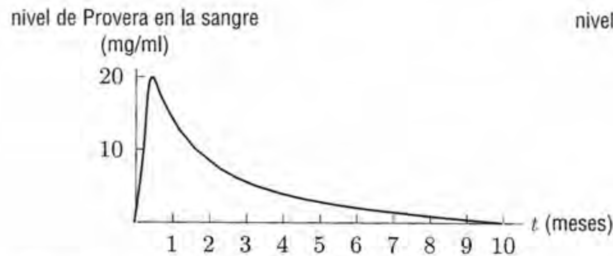


Figura 4.81. Curva de concentración para el Depo-Provera.

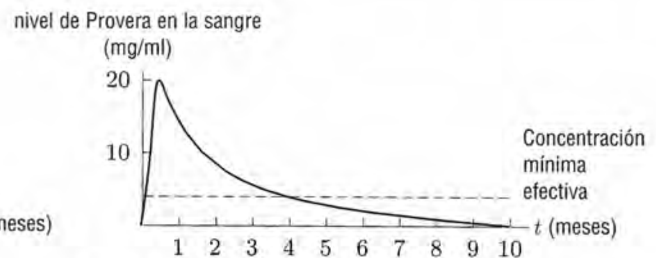


Figura 4.82. ¿Cuándo hay que aplicar la siguiente dosis?

Solución La concentración mínima efectiva en la curva de concentración de medicamento se traza como una recta punteada horizontal en 4 mg/ml. Véase la figura 4.82. Vemos que el medicamento surte efecto casi de inmediato, y su eficacia cesa después de cuatro meses. Las dosis se deberán aplicar cada cuatro meses.

Aunque el intervalo de dosificación es de cuatro meses, observe que tarda 10 meses después de que se han suspendido las inyecciones para que el Depo-Provera sea completamente eliminado del cuerpo. Durante ese periodo la fertilidad es impredecible.

Problemas para la sección 4.8

1. Para $b = 1$ trace la gráfica de $C = ate^{-bt}$ usando valores diferentes de a. Explique el efecto del parámetro a en esta función.

2. Si el tiempo, t, está dado en horas y la concentración, C, está en mg/ml, la curva de concentración para un medicamento está dada por

$$C = 12.4te^{-0.2t}.$$

   (a) Trace una gráfica de esta curva.

   (b) ¿Cuánto tiempo le toma al medicamento alcanzar su concentración pico? ¿Cuál es la concentración en ese momento?

   (c) Si la concentración mínima efectiva es 10 mg/ml, ¿durante que periodo de tiempo es efectivo el medicamento?

   (d) Pueden surgir complicaciones cada vez que el nivel de medicamento es superior a 4 mg/ml. ¿Qué tiempo debe esperar un paciente para estar a salvo de complicaciones?

3. La figura 4.83 muestra las curvas de concentración para la ampicilina anhídrida para bebes recién nacidos y adultos.[22] Analice las diferencias entre recién nacidos y adultos en la absorción de este medicamento.

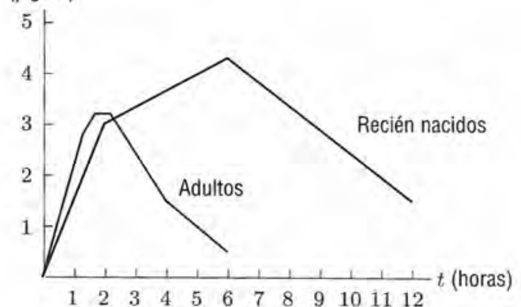


Figura 4.83.

4. Si t está dado en horas, la curva de concentración para un medicamento está dada por $C = 17.2te^{-0.4t}$. La concentración efectiva mínima es 10 mg/ml.

   (a) Si la segunda dosis del medicamento se administra cuando la primera dosis ya no es efectiva, ¿cuándo hay que administrar esta segunda dosis?

   (b) Si se quiere que el inicio de la efectividad de la segunda dosis coincida con la terminación de la efectividad de la primera, ¿cuándo hay que administrar la segunda dosis?

[21] Julien, Robert M., *A Primer of Drug Action*, W. H. Freeman and Co., 1995.
[22] *Pediatrics*, núm., 51, 1973, p. 578.

5. La figura 4.73 de la página 207 muestra la concentración de nicotina en la sangre durante y después de fumar un cigarrillo. La figura 4.84 muestra la concentración de nicotina en la sangre durante y después de masticar tabaco o chicle de nicotina. (El mascado ocurre durante los primeros 30 minutos y se muestran los datos experimentales que representan los valores promedio de diez pacientes.)[23] Compare las tres curvas de concentración de nicotina (para cigarrillos, tabaco de mascar y chicle de nicotina) en términos de la concentración pico, el tiempo en el que ésta se alcanza y la razón a la cual se elimina la nicotina del torrente sanguíneo.





Figura 4.84.

6. El bitartato de hidrocodona es un calmante de la tos, el cual por lo regular se administra en una dosis oral de 10 mg. La concentración pico del medicamento en la sangre ocurre 1.3 horas después de su consumo, y la concentración pico es de 23.6 mg/ml. Dibuje la curva de concentración del medicamento para el bitartrato de hidrocodona.

7. La figura 4.85 muestra las curvas de concentración de un medicamento después de la administración oral de 0.5 de cuatro productos de digoxina. Todas las tabletas satisfacen las unidades estándares de potencia, tiempo de desintegración y razón de disolución.[24]

(a) Analice diferencias y semejanzas en la concentración pico y el tiempo para alcanzar dicha concentración.

(b) Proporcione los posibles valores de concentración mínima eficaz y de concentración máxima segura que harían del producto C o del producto D el medicamento preferido.

(c) Dé los posibles valores de concentración efectiva mínima y de concentración máxima segura que harían del producto A el medicamento preferido.

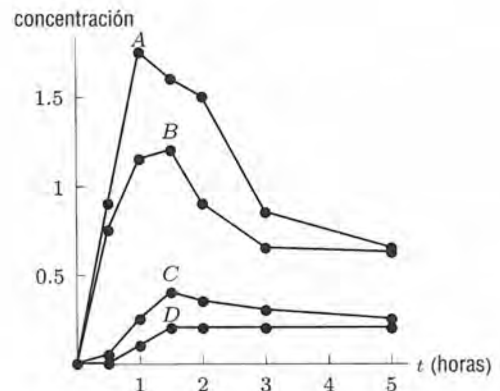


Figura 4.85.

8. La figura 4.86 muestra la concentración de bemetizida (un diurético) en la sangre después de una sola dosis oral de 25 mg, o de 25 mg de bemetizida y 50 mg de triamtereno combinados.[25] Si la concentración mínima efectiva en un paciente es de 40 mg/ml, compare el efecto de combinar bemetizida con triamtereno en la concentración pico, tiempo para alcanzar la concentración pico, tiempo hasta el inicio de efectividad y duración de la efectividad. ¿Bajo que circunstancias podría ser sensato usar el triamtereno con la bemetizida?

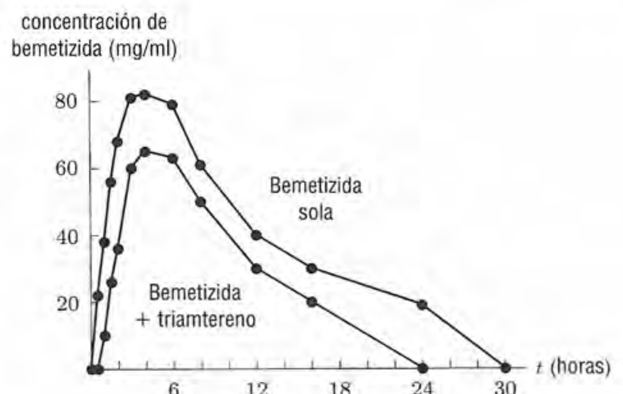


Figura 4.86.

[23]Benowitz, Porchet, Skeiner, Jacob, "Nicotine Absorption and Cardiovascular Effects with Smokeless Tobacco Use: Comparison with Cigarettes and Nicotine Gum", en *Clinical Pharmacology and Therapeutics*, núm. 44, 1988, p. 24.

[24]Graeme S. Avery, *Drug Treatment: Principles and Practice of Clinical Pharmacology and Therapeutics*, Adis Press, Sydney, 1976.

[25]Welling & Tse, *Pharmacokinetics of Cardiovascular, Central Nervous System, and Antimicrobial Drugs*, The Royal Society of Chemistry, 1985.

9. Sea $C = ate^{-bt}$ la curva de concentración de un medicamento.

(a) Analice el efecto, en la concentración pico y en el tiempo en que ésta se alcanza, de variar el parámetro a mientras b se conserva fijo.

(b) Analice el efecto, en la concentración pico y en el tiempo en que ésta se alcanza, de variar el parámetro b mientras a se conserva fijo.

(c) Suponga que $a = b$, de modo que $C = ate^{-bt}$. Analice el efecto en la concentración pico y el tiempo que ésta se alcanza al variar el parámetro a.

10. La figura 4.87 muestra los niveles de plasma de canrenona en un voluntario saludable después de una dosis oral de espironolactona administrada en ayuno estomacal y junto con un desayuno normal. (La espironolactona es un agente diurético que se convierte parcialmente en canrenona en el cuerpo.)[26] Analice el efecto del alimento en una concentración pico y el tiempo en el que alcanza dicha concentración. ¿Es el efecto de la comida mas fuerte durante las primeras cinco horas, o después de ocho horas?

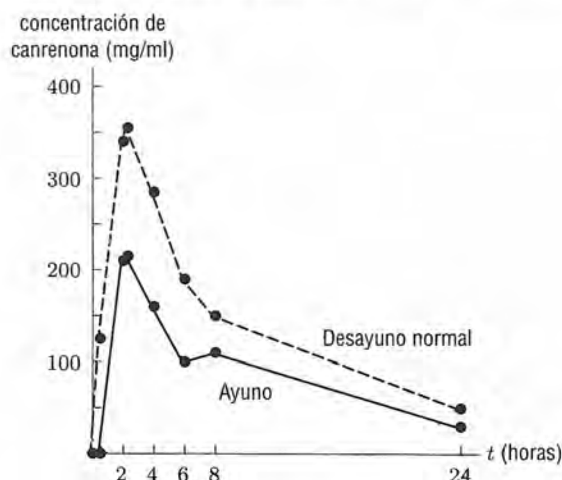


Figura 4.87.

11. La absorción de diferentes formas del antibiótico eritromicina puede aumentar, disminuir, retardar o no ser afectada por los alimentos. La figura 4.88 muestra los niveles de concentración de la eritromicina en voluntarios humanos saludables en ayuno, quienes recibieron dosis orales simples de 500 mg de tabletas de eritromicina, junto con volúmenes grandes de agua (250 ml) o pequeños (20 ml) de agua.[27] Analice el efecto del agua en la concentración de la eritromicina en la sangre. ¿Cómo son afectados la concentración pico y el tiempo en que ésta se alcanza? ¿Cuándo desaparece el efecto del volumen de agua?

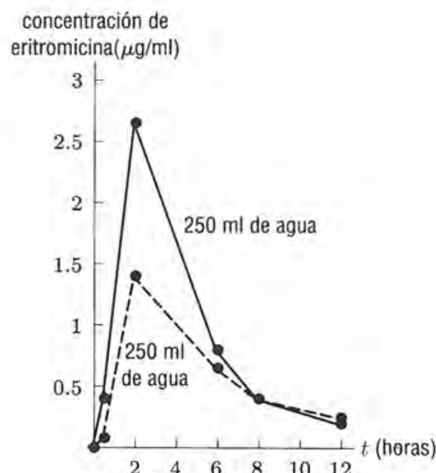


Figura 4.88.

12. La figura 4.89 muestra una gráfica del porcentaje de una sustancia disuelta en función del tiempo para cuatro productos de tetraciclina A, B, C y D. La figura 4.90 muestra las curvas de concentración de medicamento para los mismos cuatro productos de tetraciclina.[28] Analice el efecto de la razón de disolución en la concentración pico y en el tiempo en que tarda en alcanzarla.

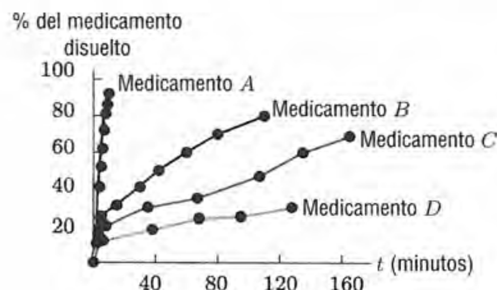


Figura 4.89.

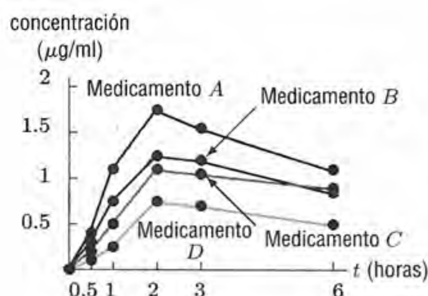


Figura 4.90.

[26] Welling & Tse, *Pharmacokinetics of Cardiovascular, Central Nervous System, and Antimicrobial Drugs*, The Royal Society of Chemistry, 1985.

[27] Bridges, J. W., y L. F. Chasseaud, *Progress in Drug Metabolism*, John Wiley e hijos, Nueva York, 1980.

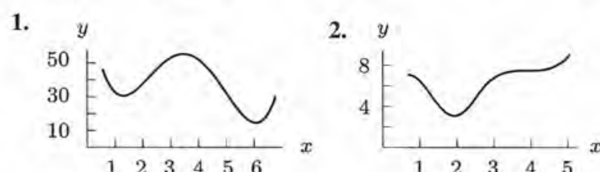
[28] *Ibídem.*

RESUMEN DEL CAPÍTULO

- **Uso de la primera derivada**
  Puntos críticos, máximos y mínimos locales
- **Uso de la segunda derivada**
  Puntos de inflexión, concavidad
- **Optimización**
  Máximos y mínimos globales
- **Maximización de la ganancia y del ingreso**
- **Costo promedio**
  Minimización del costo promedio
- **Elasticidad**
- **Familias de funciones**
  Parámetros. La función pulso, curvas de concentración de medicamento. La función logística, la capacidad de carga, el punto de rendimiento decreciente

PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 y 2, indique los puntos críticos sobre las gráficas dadas. ¿Cuáles corresponden a mínimos locales, máximos locales, máximos globales, mínimos globales, o a ninguno de éstos? (Observe que las gráficas están en intervalos cerrados.)



3. Se lanza hacia arriba una toronja con una velocidad inicial de 50 pies/segundo. Cuando se lanza, la toronja está a cinco pies del suelo. Su altura en el tiempo t se obtiene mediante

$$y = -16t^2 + 50t + 5.$$

¿Qué altura alcanza antes de regresar al suelo?

Para cada una de las funciones de los problemas del 4 al 8, haga lo siguiente:

(a) Encuentre a f' y f''.

(b) Encuentre los puntos críticos de f.

(c) Localice cualquier punto de inflexión de f.

(d) Calcule f en los puntos críticos y en los puntos finales del intervalo dado. Identifique los máximos y mínimos locales y globales de f en el intervalo.

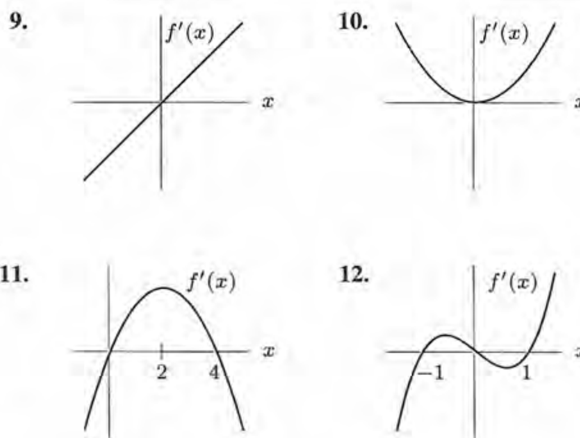
(e) Grafique a f.

4. $f(x) = x^3 - 3x^2$ $(-1 \le x \le 3)$
5. $f(x) = x + \text{sen } x$ $(0 \le x \le 2\pi)$
6. $f(x) = e^{-x} \text{sen } x$ $(0 \le x \le 2\pi)$
7. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ $(-0.5 \le x \le 3)$
8. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$ $(-5 \le x \le 4)$

En las gráficas de f' de los ejercicios del 9 al 12, decida:

(a) ¿En qué intervalos f es creciente? ¿Decreciente?

(b) ¿f tiene máximos o mínimos? Si es así, ¿cuáles y en qué puntos?



13. El ingreso marginal y el costo marginal se muestran en la siguiente tabla. Calcule los niveles de producción que podrían maximizar el beneficio. Explique.

q	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000	6,000
IM	78	76	74	72	70	68
CM	100	80	70	65	75	90

14. La derivada de $f(t)$ está dada por $f'(t) = t^3 - 6t^2 + 8t$ en $0 \le t \le 5$. Trace una gráfica de $f'(t)$ y describa en qué forma cambia la función $f(t)$ en el intervalo de $t = 0$ a $t = 5$. ¿Cuándo $f(t)$ es creciente y cuándo es decreciente? ¿En qué punto $f(t)$ tiene un máximo local y en qué punto tiene un mínimo local?

15. Para $f(x) = \text{sen }(x^2)$ entre $x = 0$ y $x = 3$, determine las coordenadas de todas las intersecciones, puntos críticos y puntos de inflexión con dos cifras decimales.

16. Trace una gráfica para los diferentes miembros de la familia $y = x^3 - ax^2$ en un mismo sistema de coordenadas. Analice el efecto del parámetro a en la gráfica. Localice todos los puntos críticos de esta función

17. La figura 4.91 muestra el costo y el ingreso de un producto

(a) Estime la producción que eleva al máximo la ganancia.

(b) Grafique el ingreso marginal y el costo marginal de este producto en el mismo sistema de coordenadas. Marque en esta gráfica el nivel de producción que maximiza la ganancia.

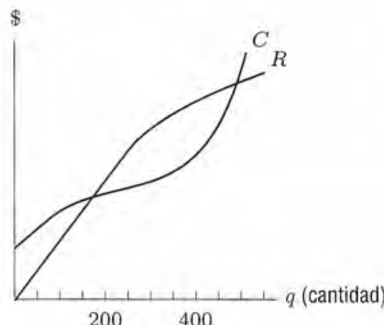


Figura 4.91.

18. La figura 4.92 muestra las gráficas del costo marginal y el ingreso marginal. Calcule los niveles de producción que pueden maximizar la ganancia. Explique su razonamiento.

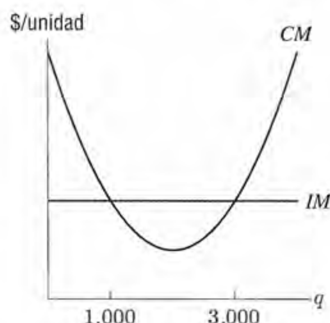


Figura 4.92.

19. Una compañía fabricante de helados descubre que a un precio de $4.00 la demanda es de 4,000 unidades. Por cada rebaja de $0.25 en el precio, la demanda aumenta en 200 unidades. Encuentre el precio y la cantidad vendida que maximicen el ingreso.

20. El método de administrar un medicamento puede tener una fuerte influencia en la curva de concentración de éste. La figura 4.93 muestra las curvas de concentración de la penicilina, aplicada en diversas formas. Se disolvieron en agua 3 mg por kg del peso corporal y fueron administrados por vía intravenosa (IV), intramuscular (IM), subcutánea (SC) y oral (PO). Se disolvió en aceite la misma cantidad de penicilina y se administró intramuscularmente (P-IM). La concentración efectiva mínima (CEM) se indica en la gráfica.[29]

(a) ¿Cuál método alcanza con más rapidez la concentración pico? Con menor rapidez?

(b) ¿Cuál método tiene la máxima concentración pico? ¿La menor?

(c) ¿Cuál método ejerce un efecto con desaparición más rápida? ¿Cuál se disipa más lentamente?

(d) ¿Cuál método tiene la más larga duración efectiva? ¿La menor?

(e) Cuando la penicilina se administra en forma oral, ¿aproximadamente en qué tiempo surte efecto?

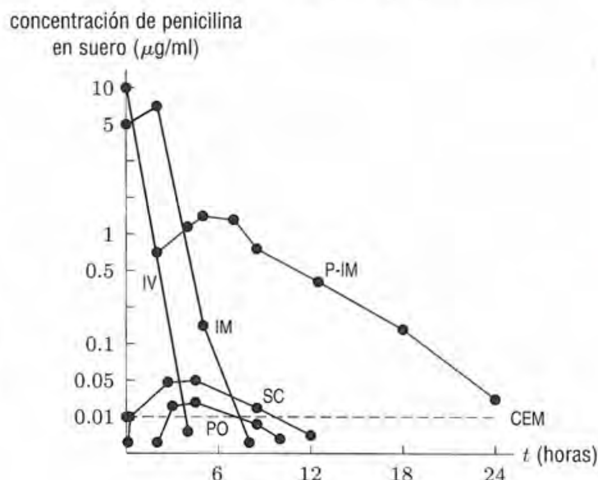


Figura 4.93.

21. La figura 4.94 muestra el costo, $C(q)$, y el ingreso, $I(q)$, de una cantidad q. Indique los siguientes puntos sobre la gráfica.

(a) El punto F que representa los costos fijos.

(b) El punto B que representa el punto de beneficio nulo de producción.

(c) El punto M que representa el nivel de producción en el cual el costo marginal es mínimo.

(d) El punto A que representa el nivel de producción en el que el costo promedio $a(q) = C(q)/q$ es mínimo.

(e) El punto P que representa el nivel de producción en el que la ganancia es máxima.

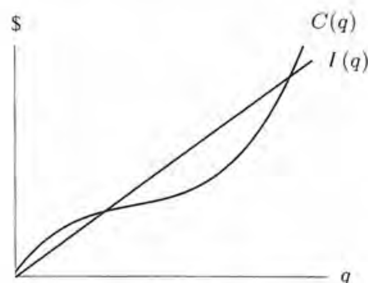


Figura 4.94.

[29]Bridges, J. W., y L. F. Chasseaud, *Progress in Drug Metabolism*, John Wiley e hijos, Nueva York, 1980.

22. Cuando las aves ponen huevos, los ponen en nidadas de varios a la vez. Al incubar los huevos, cada nidada da lugar a una prole de varios pollos. Deseamos determinar el tamaño de la nidada que eleve al máximo el número de pollos que sobrevivan hasta la edad adulta por cada prole. Si la nidada es pequeña, hay muchas aves recién nacidas en el nido; si la nidada es grande, habrá tantos pollos que alimentar que la mayoría morirá de hambre. El número de aves que sobreviven en cada nido como una función del tamaño de la nidada se muestra en la curva de beneficio de la figura 4.95.[30]

(a) Calcule el tamaño de la nidada que maximice el número de sobrevivientes por prole.

(b) Suponga también que hay un costo biológico por tener una nidada grande: la tasa de supervivencia femenina se reduce por tener una nidada más grande de huevos. Este costo está representado por la línea punteada de la figura 4.95. Si tomamos en cuenta el costo, al suponer que el tamaño óptimo de la nidada en realidad hace máxima la distancia vertical entre las curvas, ¿cuál es el nuevo tamaño óptimo de la nidada?

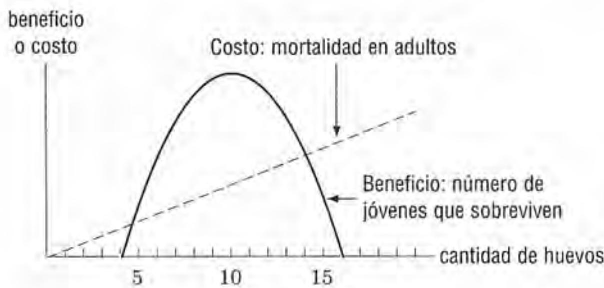


Figura 4.95.

23. Es posible que el número de nacimientos en una población no sea una función lineal del número de adultos. La curva de Ricker, que se utiliza para modelar poblaciones de peces, establece que $y = axe^{-bx}$, donde x es el número de adultos, y es el número de nacimientos y a y b son constantes positivas.

(a) Localice y clasifique todos los puntos críticos de la curva de Ricker.

(b) ¿Hay un máximo global? ¿Qué implica esto para las poblaciones?

24. Si p es el precio y E es la elasticidad de la demanda de un producto, demuestre en forma analítica que

$$\text{Ingreso marginal} = p\,(1 - 1/E).$$

25. Suponga que el costo es proporcional a la cantidad, $C(q) = kq$. Muestre que uno obtiene la ganancia máxima cuando

$$\frac{\text{Beneficio}}{\text{Ingreso}} = \frac{1}{E}$$

[*Sugerencia*: combine el resultado del problema 24 con el hecho de que la ganancia se maximiza cuando $IM = CM$.]

26. La elasticidad del costo respecto a la cantidad se define como $E_{C,q} = q/C \cdot dC/dq$.

(a) ¿Qué le dice esta elasticidad sobre la sensibilidad del costo de la cantidad producida?

(b) Muestre que $E_{C,q}$ = Costo marginal/Costo promedio.

27. La dueña de una constructora de viviendas compró recientemente una lavandería automática y una fábrica adyacente. Durante años, la lavandería ha hecho esfuerzos por hacer que el humo de la fábrica no ensucie el aire de las secadoras de ropa. Ahora que la empresaria es dueña de la lavandería y de la fábrica, puede instalar filtros en las chimeneas de la fábrica para reducir la emisión de humo, en lugar de proteger solamente a la lavandería. El costo de los filtros de la fábrica y el costo de proteger a la lavandería del humo dependen del número de filtros utilizados, como se muestra en la tabla.

Número de filtros	Costo total de los filtros	Costo total de proteger del humo a la lavandería
0	$0	$127
1	$5	$63
2	$11	$31
3	$18	$15
4	$26	$6
5	$35	$3
6	$45	$0
7	$56	$0

(a) Construya una tabla que muestre, por cada número posible de filtros (de 0 a 7), el costo marginal del filtro, el costo promedio de los filtros y el ahorro marginal de proteger del humo a la lavandería.

(b) Como la propietaria desea minimizar los costos totales de ambos negocios, ¿qué debe hacer? Utilice la tabla del inciso (a) para explicar su respuesta.

(c) ¿Qué debe hacer la propietaria si, además del costo de los filtros, éstos deben estar montados en un estante que cuesta $100?

(d) ¿Qué debe hacer la propietaria si el estante cuesta $50?

28. El agua fluye a un ritmo constante en el lado izquierdo del recipiente en forma de W, como se muestra en la figura 4.96. Trace una gráfica de la altura, H, del agua en el lado izquierdo del recipiente como una función del tiempo, t. Suponga que al principio el recipiente está vacío.


Figura 4.96.

[30]Datos de C. M. Perrins y D. Lack, citado en J. R. Krebs y N. B. Davies, *An Introduction to Behavioural Ecology*, Blackwell, Oxford, 1987.

29. Cada gráfica de la figura 4.97 pertenece a una de las siguientes familias de funciones. Identifique en cada caso qué familia se parece más a:

una función exponencial,
una función logarítmica,
un polinomio (¿De qué grado es? ¿El coeficiente principal es positivo o negativo?),
una función periódica,
una función logística,
una función pulso.

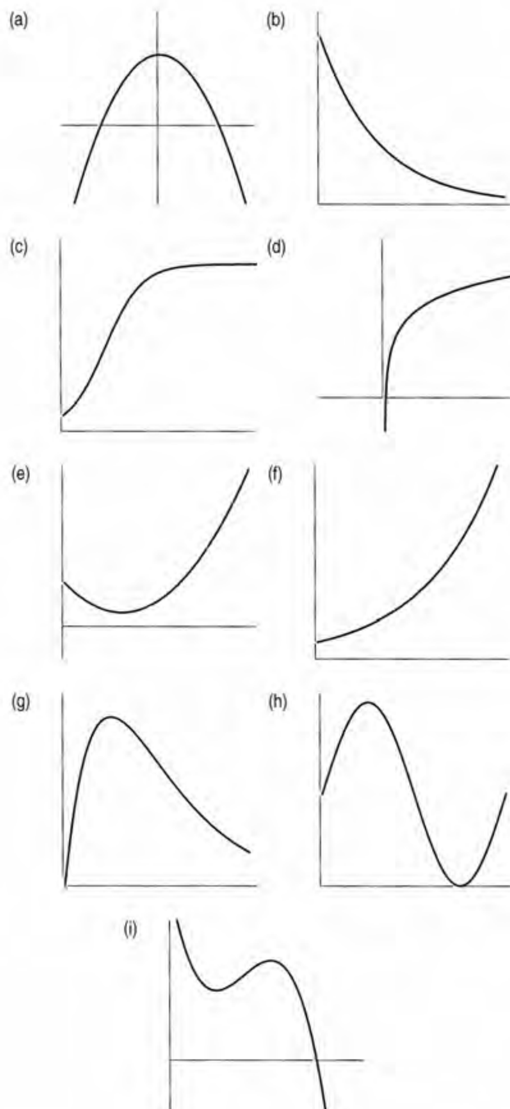


Figura 4.97.

30. La figura 4.98 muestra el costo promedio, $a(q) = b + mq$.

(a) Demuestre que $C'(q) = b + 2mq$.

(b) Trace una gráfica del costo marginal $C'(q)$.



Figura 4.98.

31. ¿En qué valores de a y b la función $f(x) = a(x - b \ln x)$ tiene un mínimo local en el punto (2, 5)? La figura 4.99 muestra una gráfica de $f(x)$ con $a = 1$ y $b = 1$.

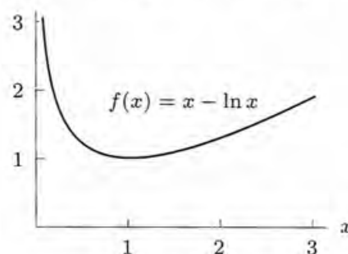


Figura 4.99.

32. Una función $y = g(x)$ tiene la derivada que se muestra en la figura 4.100 para $-2 \le x \le 2$.

(a) Escriba unos cuantos enunciados que describan la conducta de $g(x)$ en este intervalo.

(b) ¿La gráfica de $g(x)$ tiene algún punto de inflexión? Si es así, indique las abscisas aproximadas de sus localizaciones. Explique su razonamiento.

(c) ¿Cuáles son los máximos y mínimos globales de g en $[-2, 2]$?

(d) Si $g(-2) = 5$, ¿qué sabe usted sobre $g(0)$ y $g(2)$? Explique.

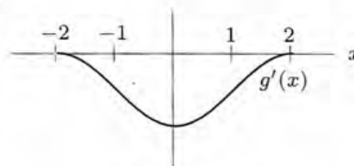


Figura 4.100.

33. En la gráfica de la función derivada f' de la figura 4.101, marque los valores de x que son puntos críticos de la función f. ¿Son máximos locales, mínimos locales, o ninguno?

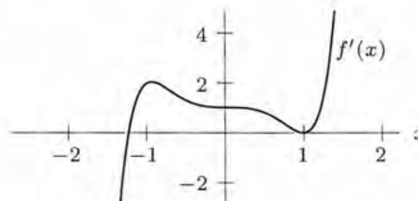


Figura 4.101. Gráfica de f', no de f.

34. La razón de las ventas de un mecanismo antirrobo para automóviles se muestran en la siguiente tabla.

(a) ¿Cuándo se alcanza el punto de rendimiento decreciente?

(b) ¿Cuáles son las ventas totales en este punto?

(c) Suponiendo que hay un crecimiento logístico en las ventas, utilice su respuesta del inciso (b) para calcular las ventas potenciales de dicho mecanismo.

Mes	1	2	3	4	5	6
Ventas por mes	140	520	680	750	700	550

35. Si t está en minutos a partir de que fue administrado el medicamento, la concentración, $C(t)$ en mg/ml, de un medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente está dada por

$$C(t) = 20te^{-0.03t}.$$

(a) ¿Cuánto tiempo se requiere para que el medicamento alcance una concentración máxima? ¿Cuál es la concentración máxima?

(b) ¿Cuál es la concentración del medicamento en el cuerpo después de 15 minutos? ¿Después de una hora?

(c) Si la concentración efectiva mínima es de 10 mg/ml, ¿cuándo hay que administrar la siguiente dosis?

36. El florero de la figura 4.102 se llena de agua a una razón constante (es decir, volumen constante por unidad de tiempo).

(a) Trace una gráfica de $y = f(t)$, el nivel del agua, respecto al tiempo, t. Marque en su gráfica los puntos en los que cambia la concavidad.

(b) ¿En qué nivel $y = f(t)$ crece más rápido?, ¿más despacio? Calcule la velocidad de las tasas de crecimiento en ambos niveles.

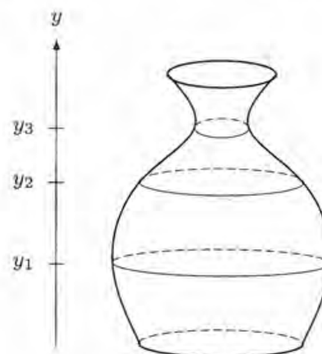


Figura 4.102.

PROYECTOS

1. Promedio y costos marginales

El costo total de producir una cantidad q es $C(q)$. El costo promedio $a(q)$ se muestra en la figura 4.103. Los economistas utilizan la siguiente regla para determinar el costo marginal $C'(q_0)$, para cualquier q_0:

- Construya la tangente t_1 a $a(q)$ en q_0.
- Sea t_2 la recta que tiene la misma ordenada en el origen que t_1, pero con el doble de pendiente que t_1.

Entonces $C'(q_0)$ es la distancia vertical que se muestra en la figura 4.103. Explique por qué funciona esta regla.

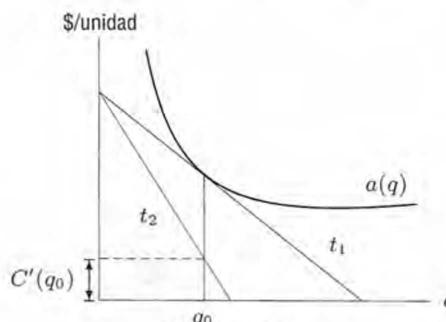


Figura 4.103.

2. Rompefuegos

El verano de 2000 fue devastador para los bosques del oeste de Estados Unidos: se perdieron cerca de 3.5 millones de acres de árboles debido a los incendios; fue la peor temporada de incendios en los últimos 30 años. Este proyecto estudia una técnica de prevención de incendios denominada *rompefuegos*, que reduce el daño provocado por los incendios forestales. Un rompefuegos es una franja en la que se talan árboles de un bosque, de tal manera que si el incendio comienza en un lado de la franja, éste no se extenderá al otro lado. Tener muchos rompefuegos ayuda a confinar un incendio a un área pequeña. Pero, por otra parte, hacer demasiados rompefuegos implica eliminar largas hileras de árboles.[31]

[31] Adaptado de D. Quinney y R. Harding, *Calculus Connections*, John Wiley e hijos, Nueva York, 1996.

(a) Un bosque en un área formada por un cuadrado de 50 km por 50 km tiene rompefuegos en franjas rectangulares de 50 km por 0.01 km. A los árboles que están entre dos rompefuegos se les denomina plataforma de árboles. Todos los rompefuegos en este bosque son paralelos entre si y a una orilla del bosque, el primer rompefuego está en una de las orillas del bosque. Los rompefuegos se distribuyen uniformemente a través del bosque. (Por ejemplo, la figura 4.104 muestra cuatro rompefuegos.) El área total que se pierde en un incendio es el área de la plataforma de árboles en la que éste comenzó más el área de los rompefuegos.

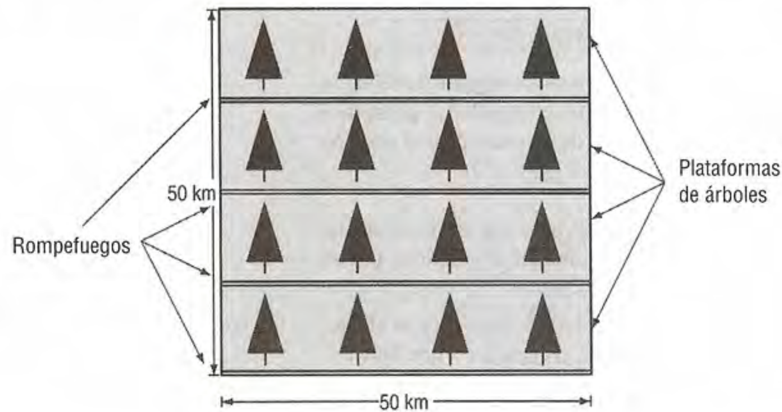


Figura 4.104.

(i) Encuentre el número de rompefuegos que minimiza la pérdida de área total de bosque en caso de un incendio.

(ii) Si un rompefuegos mide 50 km por b km, calcule el número óptimo de rompefuegos como una función de b. Si se cuadriplica el ancho, b, de un rompefuegos, ¿cómo cambia el número óptimo de rompefuegos?

(b) Ahora suponga que se coloca a los rompefuegos en dos conjuntos de líneas paralelas separadas a la misma distancia, como se muestra en la figura 4.105. El bosque tiene la forma de un cuadrado con una superficie de 50 km por 50 km y cada rompefuegos es una franja rectangular de 50 km por 0.01 km. Determine el número de rompefuegos, en cada dirección, que minimizan el área total que pierde el bosque en caso de un incendio.

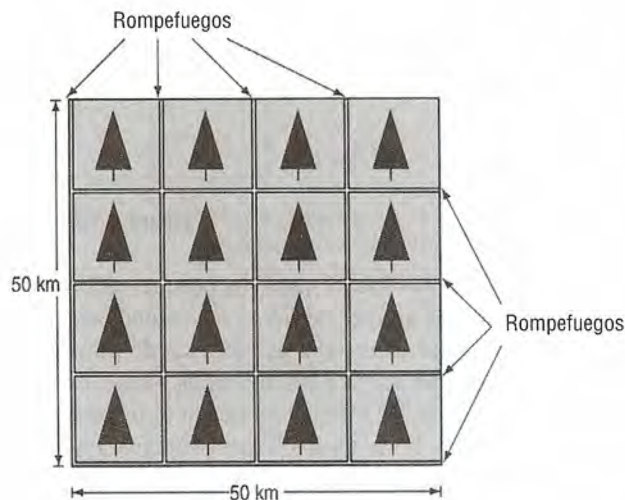


Figura 4.105.

Capítulo 5

CAMBIO ACUMULADO: LA INTEGRAL DEFINIDA

En el capítulo 2 analizamos la razón de cambio de una función, lo que nos llevó a la derivada. Ahora consideraremos el proceso inverso: obtener información de la función original a partir de la razón de cambio. Esto nos lleva a la *integral definida*, que también se puede usar para calcular el área bajo una curva.

La conexión entre la derivada y la integral definida está dada por el teorema fundamental del cálculo. Esto nos muestra que calcular las derivadas y calcular las integrales definidas son, en cierto sentido, procesos inversos.

5.1 CAMBIO ACUMULADO

En el capítulo 2 usamos la derivada para encontrar la razón de cambio de una función. Ahora veremos cómo movernos en el otro sentido. Si conocemos la razón de cambio, ¿podemos hallar la función original? Comenzamos por encontrar la distancia recorrida dada la función de velocidad.

¿Cómo medir la distancia recorrida?

La razón de cambio de la distancia respecto al tiempo es la velocidad. Si nos dan la velocidad, ¿podemos encontrar la distancia recorrida? Supongamos que la velocidad fue 50 millas por hora durante un viaje de cuatro horas. ¿Cuál es la distancia total recorrida? Como

$$\text{Distancia} = \text{Velocidad} \times \text{Tiempo},$$

tenemos

$$\begin{aligned}\text{Distancia recorrida} &= (50 \text{ millas/hora}) \times (4 \text{ horas}) \\ &= 200 \text{ millas.}\end{aligned}$$

La gráfica de la velocidad respecto al tiempo es la recta horizontal de la figura 5.1. Observe que la distancia recorrida está representada por el área sombreada bajo la gráfica.

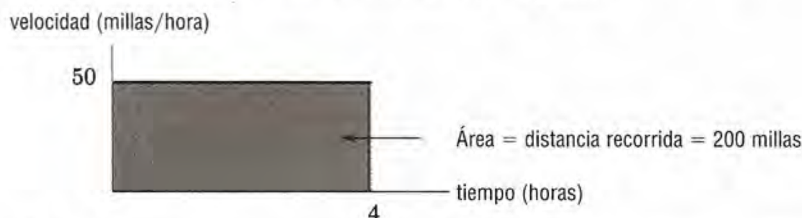


Figura 5.1. El área sombreada representa la distancia recorrida en cuatro horas a 50 mph.

Ahora veamos qué ocurre si la velocidad no es constante.

Ejemplo 1 Supongamos que usted viaja a 30 millas/hora durante dos horas; después, a 40 millas/hora durante 1/2 hora; luego, a 20 millas/hora durante cuatro horas. ¿Qué distancia recorre?

Solución Calculamos las distancias recorridas en cada una de las tres partes del viaje y las sumamos para hallar la distancia total recorrida:

$$\begin{aligned}\text{Distancia} &= (30 \text{ millas/hora})(2 \text{ horas}) + (40 \text{ millas/hora})(1/2 \text{ hora}) + (20 \text{ millas/hora})(4 \text{ horas}) \\ &= 60 \text{ millas} + 20 \text{ millas} + 80 \text{ millas} \\ &= 160 \text{ millas.}\end{aligned}$$

Usted recorrió 160 millas en su viaje.

Un experimento mental: ¿Qué distancia avanzó el automóvil?

En el ejemplo 1, la velocidad fue constante en los intervalos. Por supuesto, éste no es siempre el caso; ahora veamos un ejemplo donde la velocidad cambia constantemente.

Datos de velocidad cada dos segundos

Suponga que un automóvil se mueve con velocidad ascendente y que medimos la velocidad del automóvil cada dos segundos, con lo cual obtenemos la información de la tabla 5.1:

Tabla 5.1 *Velocidad del automóvil cada dos segundos*

Tiempo (segundos)	0	2	4	6	8	10
Velocidad (pies/segundo)	20	30	38	44	48	50

¿Qué distancia ha recorrido el automóvil? Como no sabemos a qué velocidad se ha movido el automóvil en cada momento, no podemos calcular exactamente la distancia, pero podemos hacer una estimación. La velocidad está aumentando, por lo cual el automóvil se mueve por lo menos 20 pies/segundo. Puesto que Distancia = Velocidad × Tiempo, el automóvil se desplaza por lo menos $20 \cdot 2 = 40$ pies en los primeros dos segundos. También avanza por lo menos $30 \cdot 2 = 60$ pies durante los siguientes dos segundos, y así sucesivamente. Durante el periodo de 10 segundos recorre por lo menos

$$20 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 38 \cdot 2 + 44 \cdot 2 + 48 \cdot 2 = 360 \text{ pies.}$$

Así, 360 pies es una estimación por defecto de la distancia total recorrida durante los 10 segundos.

Para obtener una estimación por exceso, podemos razonar de una manera similar: durante los primeros dos segundos, la velocidad del automóvil es a lo sumo 30 pies/segundo, de modo que se movió cuando mucho $30 \cdot 2 = 60$ pies. Durante los siguientes dos segundos éste recorre a lo sumo $38 \cdot 2 = 76$ pies, y así sucesivamente. Por tanto, durante el periodo de 10 segundos recorrió a lo sumo

$$30 \cdot 2 + 38 \cdot 2 + 44 \cdot 2 + 48 \cdot 2 + 50 \cdot 2 = 420 \text{ pies.}$$

Por tanto,

$$360 \text{ pies} \leq \text{ Distancia total recorrida} \leq 420 \text{ pies.}$$

Hay una diferencia de 60 pies entre la estimación superior y la inferior.

Datos de velocidad a cada segundo

¿Qué pasa si queremos una estimación más precisa? Podríamos hacer mediciones más frecuentes de velocidad, digamos, cada segundo. La información está en la tabla 5.2.

Como antes, obtenemos una estimación inferior por cada segundo si usamos la velocidad al comienzo de ese segundo. Durante el primer segundo la velocidad es por lo menos de 20 pies/segundo, así que el automóvil viaja por lo menos a $20 \cdot 1 = 20$ pies. Durante el siguiente segundo el automóvil recorre por lo menos 26 pies, y así sucesivamente. Así, podemos decir que:

$$\begin{aligned}\text{Nueva estimación inferior} &= 20 \cdot 1 + 26 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 35 \cdot 1 + 38 \cdot 1 \\ &\quad + 42 \cdot 1 + 44 \cdot 1 + 46 \cdot 1 + 48 \cdot 1 + 49 \cdot 1 \\ &= 378 \text{ pies.}\end{aligned}$$

Observe que éste es mayor que el anterior estimado inferior de 360 pies.

Ahora obtenemos una estimación superior si consideramos la velocidad al final de cada segundo. Durante el primer segundo la velocidad es a lo sumo 26 pies/segundo, y así el automóvil avanza cuando mucho $26 \cdot 1 = 26$ pies; en el siguiente segundo recorre a lo sumo 30 pies, y así sucesivamente.

$$\begin{aligned}\text{Nueva estimación superior} &= 26 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 35 \cdot 1 + 38 \cdot 1 + 42 \cdot 1 \\ &\quad + 44 \cdot 1 + 46 \cdot 1 + 48 \cdot 1 + 49 \cdot 1 + 50 \cdot 1 \\ &= 408 \text{ pies.}\end{aligned}$$

Esto es menos que el anterior estimado superior de 420 pies. Ahora sabemos que

$$378 \text{ pies} \leq \text{ Distancia total recorrida} \leq 408 \text{ pies.}$$

Observe que la diferencia entre las nuevas estimaciones superior e inferior es ahora 30 pies, la mitad de lo que era antes. Si se reduce a la mitad el intervalo de medición, hemos reducido también a la mitad la diferencia entre las estimaciones superior e inferior.

Tabla 5.2 *Velocidad del automóvil cada segundo*

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Velocidad (pies/segundo)	20	26	30	35	38	42	44	46	48	49	50

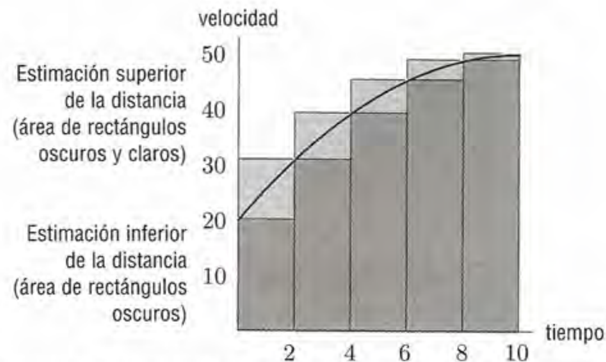


Figura 5.2. El área sombreada estima la distancia recorrida. Velocidad medida cada dos segundos.

Visualización de la distancia en la gráfica de la velocidad

Consideremos primero la información de cada dos segundos de la tabla 5.1. Podemos representar las estimaciones superior e inferior en una gráfica de la velocidad contra el tiempo. La velocidad se puede representar mediante una gráfica ubicando estos datos y trazando una curva suave que pase por tales puntos (véase la figura 5.2).

Tomamos en cuenta que, para un rectángulo, área = alto × ancho. El área del primer rectángulo oscuro es $20 \cdot 2 = 40$, que es la estimación inferior de la distancia recorrida durante los dos primeros segundos. El área del segundo rectángulo oscuro es $30 \cdot 2 = 60$, es la estimación inferior para la distancia recorrida en los siguientes dos segundos. El área total de los rectángulos oscuros representa la estimación inferior para la distancia recorrida total durante los diez segundos.

Si los rectángulos oscuro y claro se consideran en conjunto, la primer área es $30 \cdot 2 = 60$, que es la estimación superior para la distancia recorrida en los primeros dos segundos. La segunda área es $38 \cdot 2 = 76$, la estimación superior para los siguientes dos segundos. Continuando con este cálculo es natural considerar que la estimación superior para la distancia total está representada por la suma de las áreas de los rectángulos oscuros y claros. Por tanto, el área de los rectángulos claros solos representa la diferencia entre las dos estimaciones.

La figura 5.3 muestra una gráfica de los datos cada segundo. De nuevo el área de los rectángulos oscuros representa la estimación inferior, y el área de los rectángulos oscuros y claros juntos representan la estimación superior. El área total de los rectángulos claros es menor en la figura 5.3 que en la figura 5.2, así que la estimación por defecto (inferior) y la estimación por exceso (superior) están más cercanas para los datos cada segundo que para los datos cada dos segundos.

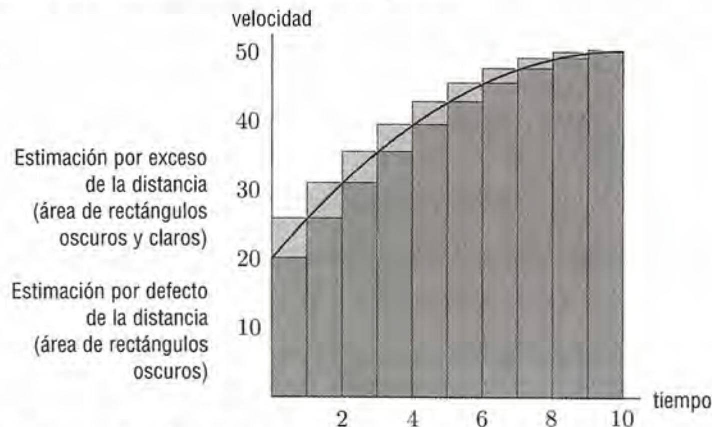


Figura 5.3. El área sombreada estima la distancia recorrida. Velocidad medida cada segundo.

Aproximación del cambio total a partir de una razón de cambio

Hemos visto cómo usar la razón de cambio de la distancia (la velocidad) para calcular la distancia total recorrida. Podemos usar el mismo método para encontrar el cambio total a partir de una razón de cambio de otras cantidades.

Ejemplo 2 La población de una ciudad crece a razón de 5,000 personas/año durante tres años y después crece a razón de 3,000 personas/año durante los siguientes cuatro años. ¿Cuál es el cambio total en la población de la ciudad durante este periodo de siete años?

Solución Las unidades de personas/año nos recuerdan que se nos está dando una razón de cambio de la población (personas) respecto al tiempo (años). Si la razón de cambio es constante, sabemos que

$$\text{Cambio total en población} = \text{razón de cambio por año} \times \text{número de años.}$$

Así, el cambio total en esta población es

$$\begin{aligned}\text{Cambio total} &= (5{,}000 \text{ personas/año})(3 \text{ años}) + (3{,}000 \text{ personas/año})(4 \text{ años}) \\ &= 15{,}000 \text{ personas} + 12{,}000 \text{ personas} \\ &= 27{,}000 \text{ personas.}\end{aligned}$$

El cambio en población fue de 27,000 personas. Observe que esto no nos dice la población al final de los siete años; nos dice el cambio en la población. Por ejemplo, si la población era inicialmente 100,000, sería de 127,000 al final del periodo de siete años.

Ejemplo 3 En la tabla 5.3 se muestra la tasa de ventas (en juegos por semana) de un nuevo juego de video. Suponiendo que la razón de ventas aumentó durante un periodo de 20 semanas, estime el número total de juegos vendidos durante este periodo.

Tabla 5.3 *Ventas semanales de un juego de video*

Tiempo (semanas)	0	5	10	15	20
Tasa de ventas (juegos por semana)	0	585	892	1,875	2,350

Solución Tomamos en cuenta que si la tasa de ventas es constante,

$$\text{Ventas totales} = \text{cantidad de ventas por semana} \times \text{número de semanas.}$$

¿Cuántos juegos se vendieron durante las primeras cinco semanas? Durante este tiempo, las ventas pasaron de 0 a 585 juegos por semana. Si suponemos que se vendieron 585 juegos cada semana, obtenemos una estimación por exceso para las ventas las primeras cinco semanas (585 juegos/semana)(5 semanas) = 2,925 juegos. Estimaciones superiores similares para cada uno de los periodos de cinco semanas nos dan una estimación por exceso para todo el periodo de 20 semanas:

$$\text{Estimación por exceso para las ventas totales} = 585 \cdot 5 + 892 \cdot 5 + 1{,}875 \cdot 5 + 2{,}350 \cdot 5 = 28{,}510 \text{ juegos.}$$

Hacemos una estimación por defecto para las ventas totales si tomamos el valor menor para la tasa de ventas durante cada periodo de cinco semanas:

$$\text{Estimación por defecto para las ventas totales} = 0 \cdot 5 + 585 \cdot 5 + 892 \cdot 5 + 1{,}875 \cdot 5 = 16{,}760 \text{ juegos.}$$

Entonces, las ventas totales del juego durante el periodo de 20 semanas está entre 16,760 y 28,510 juegos. Un buen estimado de ventas totales es el promedio de estos dos números:

$$\text{Ventas totales} \approx \frac{16{,}760 + 28{,}510}{2} = 22{,}635 \text{ juegos.}$$

Problemas para la sección 5.1

1. Un automóvil empieza a moverse en el instante $t = 0$ y aumenta su velocidad cada vez más. En la siguiente tabla se muestra su velocidad. Estime la distancia que recorre el automóvil al cabo de 12 segundos.

t (segundos)	0	3	6	9	12
Velocidad (pies/s)	0	10	25	45	75

2. Un automóvil se detiene seis segundos después de que el conductor aplica los frenos. En cuanto pisa los frenos, se registran las siguientes velocidades:

Tiempo desde que se aplicaron los frenos (s)	0	2	4	6
Velocidad (pies/s)	88	45	16	10

(a) Dé estimaciones inferior y superior para la distancia que recorrió el automóvil después que se aplicaron los frenos.

(b) En una gráfica de velocidad contra tiempo, muestre los estimaciones inferior y superior del inciso (a).

3. En la siguiente tabla aparece la razón de cambio de la población mundial, en millones de personas por año.
   (a) Use los datos para estimar el cambio total en la población mundial entre 1950 y 1990.
   (b) La población mundial era de 2,555 millones de personas en 1950 y de 5,295 millones de personas en 1990. Calcule el valor real del cambio total de la población. ¿Cómo se compara esto con su estimación del inciso (a)?

Año	1950	1960	1970	1980	1990
Razón de cambio	37	41	78	77	86

4. Un pueblo desea medir la cantidad de agua que se envía a una fabrica durante una mañana común y corriente. El medidor de la toma de agua da la razón de flujo (en metros cúbicos por hora) en cualquier instante. La razón de flujo es de aproximadamente 100 m^3/hr a las 6 a. m., y aumenta uniformemente a casi 280 m^3 a las 9 a. m. Usando sólo esta información, estime lo mejor posible el volumen total de agua usada en la fábrica entre las 6 y las 9 a. m.
5. (a) Trace una gráfica de la función velocidad para el recorrido descrito en el ejemplo 1 de la página 220.
   (b) En dicha gráfica represente la distancia total recorrida.
6. Bosqueje la razón de ventas en función del tiempo para los datos del juego de video del ejemplo 3. Represente gráficamente la estimación superior y la estimación inferior calculados en este ejemplo.
7. La figura 5.4 muestra la velocidad, v, de un objeto (en metros/segundo). Estime la distancia total que el objeto ha recorrido entre $t = 0$ y $t = 6$.

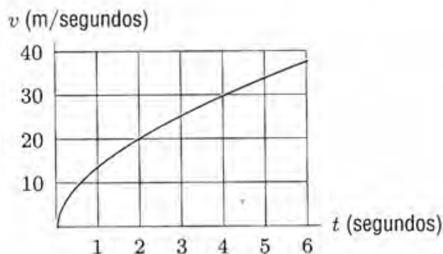


Figura 5.4.

8. A medida que se agotan los depósitos de carbón de este país, será necesario explotar áreas cada vez más grandes por cada tonelada de carbón. La gráfica de la figura 5.5 muestra un estimado del número de acres de tierra por millón de toneladas de carbón que serán estropeadas durante la extracción como función del número de millones de toneladas removidas, comenzando desde hoy.
   (a) Estime el número total de acres estropeados al extraer los siguientes cuatro millones de toneladas de carbón (medidas desde hoy). Trace cuatro rectángulos bajo la curva y calcule su área.
   (b) Vuelva a estimar el número de acres estropeados usando rectángulos arriba de la curva.
   (c) Use sus repuestas de los incisos (a) y (b) para obtener una mejor estimación del número real de acres estropeados.



Figura 5.5.

9. La siguiente tabla muestra los consumos de petróleo mundiales, en miles de millones de barriles por año.[1] Estime el consumo de petróleo total durante este periodo de 20 años.

Año	1980	1985	1990	1995	2000
Petróleo (miles de millones de barriles/año)	22.3	21.3	23.9	24.9	27.0

10. Se produce gas de carbón en una planta de elaboración. Los contaminantes del gas se eliminan mediante filtros que pierden su eficacia a medida que pasa el tiempo. Las siguientes mediciones, tomadas al comienzo de cada mes, muestran la tasa de contaminantes que escapan en el gas (en toneladas/mes):

Tiempo (meses)	0	1	2	3	4	5	6
Tasa de contaminantes que escapan	5	7	8	10	13	16	20

   (a) Haga una estimación por exceso y una estimación por defecto para la cantidad total de contaminantes que se escaparon durante el primer mes.
   (b) Haga una estimación por exceso y otra por defecto respecto a la cantidad total de contaminantes que escaparon durante seis meses.
11. Dos automóviles comienzan su recorrido al mismo tiempo y van en la misma dirección y sentido por un camino recto. La figura 5.6 da la velocidad, v, de cada automóvil como función del tiempo, t. ¿Cuál automóvil
   (a) alcanza la máxima velocidad?
   (b) se detiene primero?
   (c) viaja más lejos?

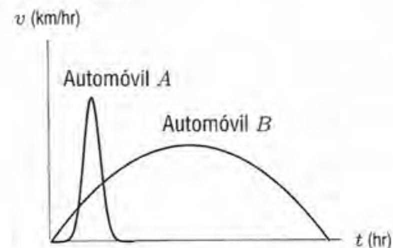


Figura 5.6.

[1] www.bp.com/centres/energy/world_stat_rev/oil/reserves.asp.

12. Dos automóviles viajan en la misma dirección y sentido por una carretera recta. La figura 5.7 muestra la velocidad, v, de cada automóvil en el tiempo t. El automóvil B inicia su recorrido dos horas después que el automóvil A, y el automóvil B alcanza una velocidad máxima de 50 km/hr.
   (a) Aproximadamente, ¿qué distancia recorre cada automóvil?
   (b) Estime la máxima velocidad que alcanza el automóvil A.
   (c) Aproximadamente, ¿qué tan lejos viaja cada automóvil?

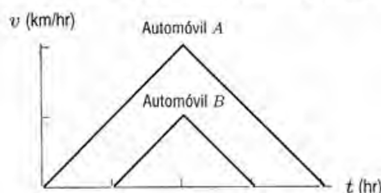


Figura 5.7.

13. Roger corre en una maratón. Su amigo Jeff viaja detrás de él en una bicicleta y registra su rapidez cada 15 minutos. Roger arranca con fuerza, pero después de hora y media está tan agotado que tiene que detenerse. Los datos que Jeff registró son los siguientes:

Tiempo desde el inicio (min)	0	15	30	45	60	75	90
Rapidez (mph)	12	11	10	10	8	7	0

   (a) Suponiendo que la rapidez de Roger nunca aumenta, dé estimaciones superior e inferior para la distancia que Roger corrió durante la primera media hora.
   (b) Dé estimaciones superior e inferior para la distancia que Roger corrió en total durante la hora y media.

14. Su velocidad está dada por $v(t) = t^2 + 1$ en m/s, con t en segundos. Estime la distancia, s, recorrida entre $t = 0$ y $t = 5$. Explique cómo obtuvo su estimado.

15. Un estudiante circula con exceso de velocidad por la carretera 11 en su poderoso Porsche cuando el sistema de radar le advierte que hay un obstáculo a 400 pies. De inmediato aplica los frenos, comienza a disminuir la velocidad con lentitud, y ve un zorrillo en la carretera exactamente frente a él. La "caja negra" del Porsche registra la rapidez del automóvil cada dos segundos, lo cual da como resultado la siguiente tabla. La rapidez disminuye durante los 10 segundos que le toma parar, aunque no necesariamente a un ritmo uniforme.

Tiempo desde que se aplicaron los frenos (segundos)	0	2	4	6	8	10
Rapidez (pies/s)	100	80	50	25	10	0

   (a) ¿Cuál es la mejor estimación de la distancia total que recorrió el automóvil del estudiante antes de quedar en reposo?
   (b) ¿Cuál de los siguientes enunciados se puede justificar a partir de la información dada?
      (i) El automóvil paró antes de atropellar al zorrillo.
      (ii) Los datos de la "caja negra" no son concluyentes. El zorrillo pudo ser atropellado o no serlo.
      (iii) El automóvil atropelló al zorrillo.

16. Un viejo bote de remos tiene una vía de agua. El agua penetra a una razón dada en la siguiente tabla.

t (minutos)	0	5	10	15
$r(t)$ litros/minuto	12	20	24	16

   (a) Determine estimaciones superior e inferior para el volumen de agua que penetra en el bote durante los 15 minutos.
   (b) Dibuje una gráfica que ilustre la estimación inferior.

17. La figura 5.8 muestra la razón de cambio de una población de peces. Estime el cambio total en la población durante un periodo de 12 meses.

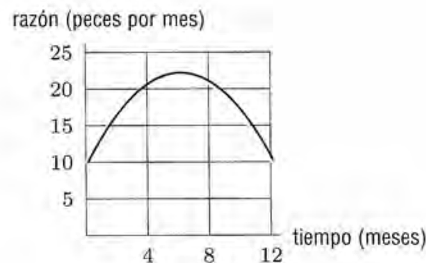


Figura 5.8.

18. El valor de un fondo mutuo aumentó a razón de $R = 500e^{0.04t}$ dólares por año, donde t son los años desde 2000.
   (a) Usando $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$, construya una tabla de valores para R.
   (b) Use la tabla para aproximar el cambio total en el valor del fondo mutuo entre 2000 y 2010.

5.2 INTEGRAL DEFINIDA

En la sección 5.1 vimos cómo calcular el cambio total a partir de la razón de cambio. Ahora veremos cómo hacer más precisa la aproximación.

Mejoramiento de la aproximación: el rol que desempeñan n y Δt

Para aproximar el cambio total, construimos una suma. Usamos la notación Δt para denotar el tamaño de los intervalos en t utilizados. Empleamos n para representar el número de subintervalos de longitud Δt. En el siguiente ejemplo vemos cómo, al decrecer Δt (y aumentar n) mejora la exactitud de la aproximación.

Ejemplo 1 Si t está dado en horas desde el inicio de un periodo de 20 horas, una población de bacterias aumenta a razón de

$$f(t) = 3 + 0.1t^2 \text{ millones de bacterias por hora.}$$

Realice un estimación por defecto para el cambio total en el número de bacterias en este periodo usando
(a) $\Delta t = 4$ horas **(b)** $\Delta t = 2$ horas **(c)** $\Delta t = 1$ hora

Solución **(a)** La razón de cambio es $f(t) = 3 + 0.1t^2$. Si utilizamos $\Delta t = 4$, medimos la razón cada cuatro horas y $n = 20/4 = 5$. Véase la tabla 5.4. Una estimación por defecto para el cambio de población durante las primeras cuatro horas es (3.0 millones/hora)(4 horas) = 12 millones. Al sumar las aportaciones de todos los subintervalos resulta la estimación por defecto siguiente:

$$\text{Cambio total } \approx 3.0 \cdot 4 + 4.6 \cdot 4 + 9.4 \cdot 4 + 17.4 \cdot 4 + 28.6 \cdot 4 = 252.0 \text{ millones de bacterias.}$$

La razón de cambio está graficada en la figura 5.9(a); el área de los rectángulos sombreados representa esta estimación por defecto. Observe que $n = 5$ es el número de rectángulos en la gráfica.

Tabla 5.4 *Razón de cambio con $\Delta t = 4$ usando $f(t) = 3 + 0.1t^2$ millones de bacterias/hora*

t (horas)	0	4	8	12	16	20
$f(t)$	3.0	4.6	9.4	17.4	28.6	43.0

(b) Si usamos $\Delta t = 2$, medimos $f(t)$ cada dos horas y $n = 20/2 = 10$. Véase la tabla 5.5. La estimación por defecto es

$$\text{Cambio total } \approx 3.0 \cdot 2 + 3.4 \cdot 2 + 4.6 \cdot 2 + \cdots + 35.4 \cdot 2 = 288.0 \text{ millones de bacterias.}$$

La figura 5.9(b) sugiere que esta estimación es más precisa que la estimación hecha en el inciso (a).

Tabla 5.5 *Razón de cambio con $\Delta t = 2$ usando $f(t) = 3 + 0.1t^2$ millones de bacterias/hora*

t (horas)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$f(t)$	3.0	3.4	4.6	6.6	9.4	13.0	17.4	22.6	28.6	35.4	43.0

(c) Si usamos $\Delta t = 1$, entonces $n = 20$ y un cálculo similar muestra que tenemos

$$\text{Cambio total } \approx 307.0 \text{ millones de bacterias.}$$

El área sombreada de la figura 5.9(c) representa esta estimación; es la más exacta de las tres.

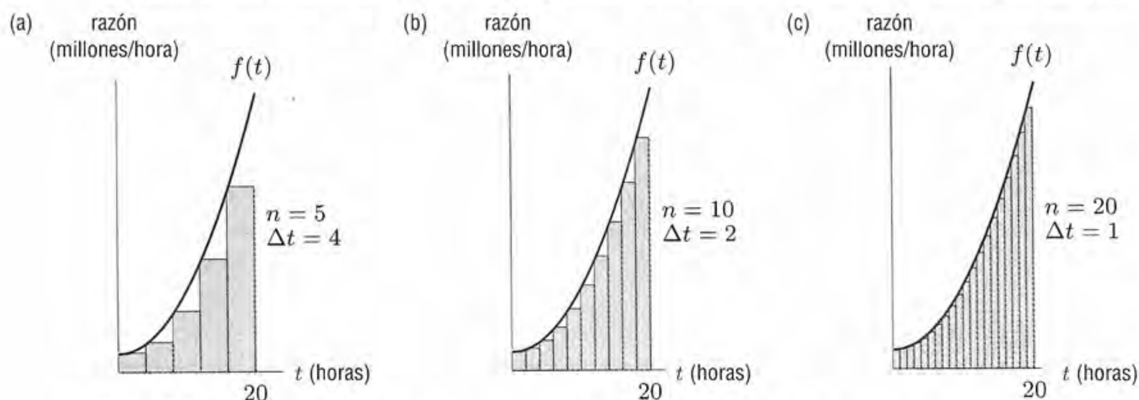


Figura 5.9. Estimaciones cada vez más precisas del cambio total a partir de la razón de cambio. En cada caso, $f(t)$ es la razón de cambio y el área sombreada aproxima el cambio total. La máxima n y la mínima Δt dan un mejor estimado.

Observe que conforme n se hace más grande, el estimado mejora y el área de los rectángulos sombreados se aproxima al área bajo la curva. Si tomamos n arbitrariamente grande, encontramos el cambio total exacto, y el límite del área de los rectángulos es el área exacta bajo la curva.

Cómo encontrar exactamente el cambio total

En el ejemplo 1 vimos cómo el cambio total puede aproximarse por sumas y cómo se puede mejorar la aproximación. Ahora demostramos cómo se puede hacer exacta la aproximación al tomar el límite.

Supongamos que tenemos una función $f(t)$ que es continua para $a \leq t \leq b$. Dividimos el intervalo de a a b en n subdivisiones iguales, cada una de ancho Δt, de modo que

$$\Delta t = \frac{b-a}{n}.$$

Sean $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ los puntos extremos de las subdivisiones, como se muestra en las figuras 5.10 y 5.11. Construimos dos sumas similares a las estimaciones por exceso y por defecto de la sección 3.1. Para una *suma por la izquierda*, usamos los valores de la función tomados en el extremo izquierdo del intervalo. Para una *suma por la derecha*, usamos los valores de la función tomados en el extremo derecho del intervalo. Tenemos:

$$\text{Suma por la izquierda} = f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\Delta t$$

y

$$\text{Suma por la derecha} = f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t.$$

Estas sumas representan las áreas sombreadas de las figuras 5.10 y 5.11, siempre que $f(t) \geq 0$. En la figura 5.10 el primer rectángulo tiene un ancho Δt y una altura $f(t_0)$, porque la parte superior de su borde izquierdo apenas toca la curva y por tanto tiene área $f(t_0)\Delta t$. El segundo rectángulo tiene ancho Δt y altura $f(t_1)$, por tanto tiene área $f(t_1)\Delta t$, y así sucesivamente. La suma de todas estas áreas es la suma por la izquierda. La suma por la derecha, que se muestra en la figura 5.11, se construye de la misma manera, excepto que cada rectángulo toca la curva en su borde derecho en lugar de su borde izquierdo.

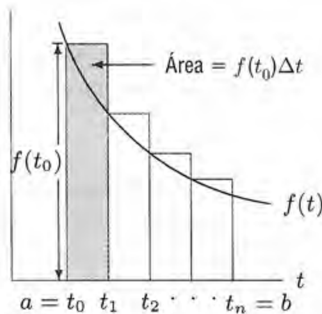


Figura 5.10. Suma por la izquierda: área de rectángulos.

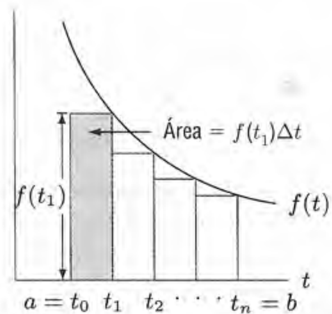


Figura 5.11. Suma por la derecha: área de rectángulos.

Sumas por la izquierda y por la derecha usando la notación sigma

Las sumas por la izquierda y por la derecha se pueden escribir en forma más compacta usando la notación sigma, o de suma. El símbolo $\sum$ es la sigma mayúscula, o la letra griega "S". Escribimos

$$\text{Suma por la derecha} = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t = f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t.$$

La $\sum$ nos indica que debemos sumar los términos de la forma $f(t_i)\Delta t$. La "$i = 1$" en la base del signo sigma nos dice que debemos iniciar en $i = 1$, y la "n" en la parte superior, que debemos detenernos en $i = n$.

En la suma por la izquierda empezamos en $i = 0$ y nos detenemos en $i = n - 1$, de modo que escribimos

$$\text{Suma por la izquierda} = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta t = f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\Delta t.$$

Paso al límite para obtener la integral definida

Si f es una razón de cambio de alguna cantidad, entonces la suma por la izquierda y la suma por la derecha aproximan el cambio total de la cantidad. Para la mayoría de las funciones f, la aproximación mejora al

aumentar el valor de n. Para encontrar exactamente el cambio total, tomamos valores de n cada vez más grandes y consideramos los valores aproximados por las sumas por la derecha y por la izquierda. Esto se conoce como *tomar el límite* de estas sumas a medida que n tiende al infinito y se escribe como $\lim_{n\to\infty}$. Si f es continua para $a \leq t \leq b$, los límites de las sumas por la izquierda y por la derecha existen y son iguales. La *integral definida* es el límite común de estas sumas.

> Supongamos que f es continua para $a \leq t \leq b$. La **integral definida** de f de a a b, que se denota
>
> $$\int_a^b f(t)\,dt,$$
>
> es el límite de las sumas por la izquierda o la derecha con n subintervalos de $[a, b]$ a medida que n se hace arbitrariamente grande. En otras palabras, si $t_0, t_1, \ldots, t_n$ son los puntos extremos de las subdivisiones,
>
> $$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \text{Suma por la izquierda} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta t\right)$$
>
> y
>
> $$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \text{Suma por la derecha} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t\right).$$
>
> Cada una de estas sumas se llama *suma de Riemann*, f se llama *integrando* y a y b se denominan *límites de integración.*

La notación "$\int$" proviene de una "S", en escritura antigua, que significa "suma" igual que $\sum$. La "dt" de la integral proviene del factor Δt. Observe que los límites en el símbolo $\sum$ son 0 y $n-1$ para la suma por la izquierda, y 1 y n para la suma por la derecha, mientras que los límites en el signo $\int$ son a y b.

Cuando $f(t)$ es positiva, las sumas por la izquierda y por la derecha están representadas por las sumas de las áreas de rectángulos, así que la integral definida está representada gráficamente por un área.

Cálculo de una integral definida

En la práctica, con frecuencia aproximamos integrales definidas numéricamente usando una calculadora o computadora. Éstas calculan sumas para valores cada vez más grandes de n y finalmente dan un valor para la integral. Las diferentes calculadoras y computadoras pueden dar estimados ligeramente diferentes, debido al error de redondeo y al hecho de que pueden usar diferentes métodos de aproximación.

Ejemplo 2 Calcule $\int_1^3 t^2\,dt$ y represente esta integral como un área.

Solución Usando una calculadora, se encuentra

$$\int_1^3 t^2\,dt = 8.667.$$

La integral representa el área entre $t = 1$ y $t = 3$ bajo la curva $f(t) = t^2$. Véase la figura 5.12.

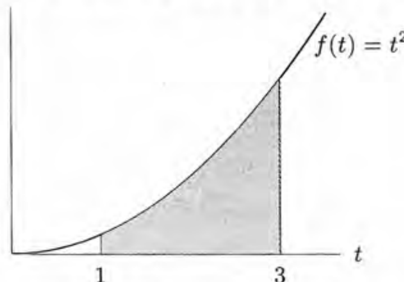


Figura 5.12. Área sombreada $\int_1^3 t^2\,dt$.

Estimación de una integral definida a partir de una tabla o una gráfica

Si tenemos una fórmula para el integrando, $f(x)$, podemos calcular la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ usando una calculadora o una computadora; pero si sólo tenemos una tabla de valores o una gráfica de $f(x)$ aún se puede estimar la integral.

Ejemplo 3 Los valores para una función $f(t)$ aparecen en la siguiente tabla. Estime $\displaystyle\int_{20}^{30} f(t)dt$.

t	20	22	24	26	28	30
$f(t)$	5	7	11	18	29	45

Solución Como sólo tenemos una tabla de valores, usamos las sumas por izquierda y la derecha para aproximar la integral. Los valores de $f(t)$ tienen 2 unidades de separación, de modo que $\Delta t = 2$ y $n = (30 - 20)/2 = 5$. El cálculo de las sumas por la izquierda y por la derecha resulta en

$$\begin{aligned}\text{Suma por la izquierda} &= f(20)\cdot 2 + f(22)\cdot 2 + f(24)\cdot 2 + f(26)\cdot 2 + f(28)\cdot 2\\ &= 5\cdot 2 + 7\cdot 2 + 11\cdot 2 + 18\cdot 2 + 29\cdot 2\\ &= 10 + 14 + 22 + 36 + 58\\ &= 140.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Suma por la derecha} &= f(22)\cdot 2 + f(24)\cdot 2 + f(26)\cdot 2 + f(28)\cdot 2 + f(30)\cdot 2\\ &= 7\cdot 2 + 11\cdot 2 + 18\cdot 2 + 29\cdot 2 + 45\cdot 2\\ &= 14 + 22 + 36 + 58 + 90\\ &= 220.\end{aligned}$$

Las sumas por la izquierda y por la derecha aproximan la integral. Generalmente obtenemos una mejor estimación al promediar las dos:

$$\int_{20}^{30} f(t)dt \approx \frac{140 + 220}{2} = 180.$$

Ejemplo 4 La función $f(x)$ está graficada en la figura 5.13. Estime $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx$.

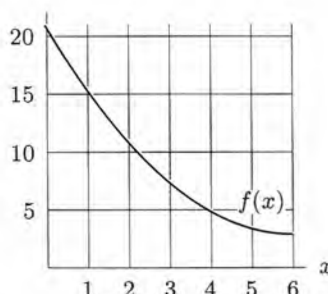


Figura 5.13. Estime $\int_0^6 f(x)\,dx$.

Solución Aproximamos la integral usando las sumas por la izquierda y la derecha con $n = 3$, así $\Delta x = 2$. Las figuras 5.14 y 5.15 dan

$$\text{Suma por la izquierda} = f(0)\cdot 2 + f(2)\cdot 2 + f(4)\cdot 2 = 21\cdot 2 + 11\cdot 2 + 5\cdot 2 = 74,$$
$$\text{Suma por la derecha} = f(2)\cdot 2 + f(4)\cdot 2 + f(6)\cdot 2 = 11\cdot 2 + 5\cdot 2 + 3\cdot 2 = 38.$$

Estimamos la integral tomando el promedio:

$$\int_0^6 f(x)\,dx \approx \frac{74+38}{2} = 56.$$

Alternativamente, como la integral es igual al área bajo la curva entre $x = 0$ y $x = 6$, podemos estimarla contando los rectángulos de la red. Cada rectángulo de la red tiene un área de $5\cdot 1 = 5$, la región bajo $f(x)$ incluye alrededor de 10.5 rectángulos de la red, así que el área aproximada es de $10.5\cdot 5 = 52.5$.

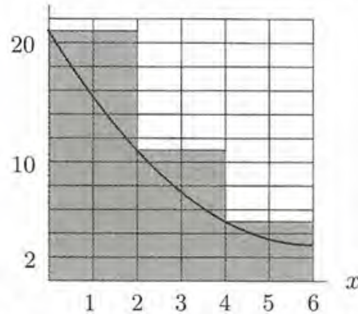


Figura 5.14. El área de la región sombreada es la suma por la izquierda con $n = 3$.

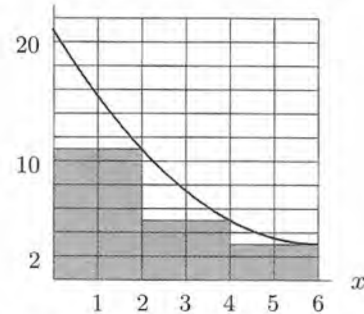


Figura 5.15. El área de la región sombreada es la suma por la derecha con $n = 3$.

Estimación aproximada de una integral definida

Cuando calculamos una integral usando una calculadora o computadora, es útil tener una idea aproximada del valor que esperamos. Esto nos ayuda a detectar errores que se introducen en la integral.

Ejemplo 5 Tres personas calculan $\int_1^3 \frac{1}{t}\,dt$ en una calculadora y obtienen los valores 0.023, 11.984 y 1.526. Explique cómo puede estar seguro que ninguno de estos valores es correcto.

Solución La figura 5.16 muestra las aproximaciones por la izquierda y por derecha de $\int_1^3 \frac{1}{t}\,dt$ con $n = 1$. Vemos que la suma por la derecha $2(1/3)$ es una estimación por defecto de $\int_1^3 \frac{1}{t}\,dt$. Como 0.023 es menor que $2/3$, este valor es erróneo. De igual manera, vemos que la suma por la izquierda $2(1)$ es una estimación por exceso de la integral. Como 11.984 es más grande que 2, este valor es erróneo. Como la curva es cóncava hacia arriba, el valor de la integral es más cercano al valor menor de las dos sumas, $2/3$, que al valor mayor, 2. Por consiguiente, la integral es menor que el promedio de las dos sumas, $4/3$. Ya que $1.526 > 4/3$, este valor también es erróneo.

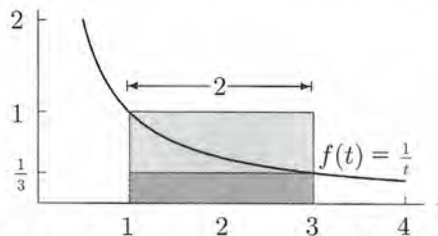


Figura 5.16. Sumas por la izquierda y por la derecha con $n = 1$.

Problemas para la sección 5.2

1. Usando la figura 5.17, dibuje rectángulos que representen cada una de las siguientes sumas de Riemann para la función f en el intervalo $0 \leq t \leq 8$. Calcule los valores de cada suma.

   (a) Suma por la izquierda con $\Delta t = 4$
   (b) Suma por la derecha con $\Delta t = 4$
   (c) Suma por la izquierda con $\Delta t = 2$
   (d) Suma por la derecha con $\Delta t = 2$

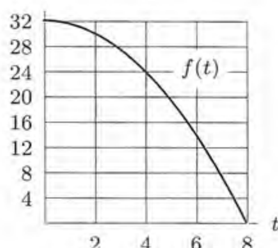


Figura 5.17.

2. En la figura 5.18 se muestra la gráfica de una función $f(t)$. ¿Cuál de los siguientes números podría ser una estimación de $\int_0^1 f(t)\,dt$ con una exactitud de dos cifras decimales? Explique cómo seleccionó la respuesta.

   (a) -98.35 (b) 71.84
   (c) 100.12 (d) 93.47

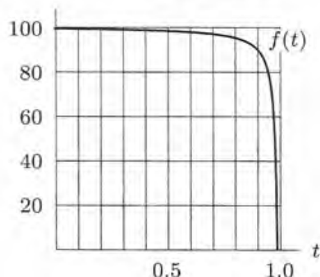


Figura 5.18.

En los problemas 3 al 6

(a) Use una gráfica del integrando para hacer una estimación aproximada de la integral. Explique su razonamiento.
(b) Use una computadora o calculadora para encontrar el valor de la integral definida.

3. $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$

4. $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x}\,dx$

5. $\displaystyle\int_0^1 3^t\,dt$

6. $\displaystyle\int_1^2 x^x\,dx$

7. Utilice la tabla para estimar $\int_0^{40} f(x)\,dx$. ¿Qué valores de n y de Δx usó?

x	0	10	20	30	40
$f(x)$	350	410	435	450	460

8. Use la siguiente tabla para estimar $\int_3^4 W(t)\,dt$. ¿Qué valores de n y de Δt usó?

t	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
$W(t)$	25	23	20	15	9	2

9. Utilice la siguiente tabla para estimar $\int_0^{15} f(x)\,dx$.

x	0	3	6	9	12	15
$f(x)$	50	38	44	36	24	8

10. Use la siguiente tabla para estimar $\int_{10}^{26} f(x)\,dx$.

x	10	14	18	22	26
$f(x)$	100	88	72	50	28

11. Utilice la figura 5.19 para estimar $\int_0^{20} f(x)\,dx$.

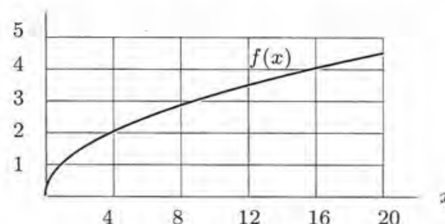


Figura 5.19.

12. Use la figura 5.20 para estimar $\int_{-10}^{15} f(x)\,dx$.

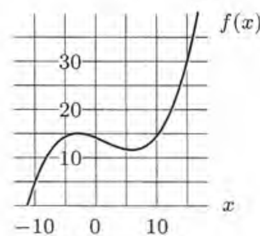
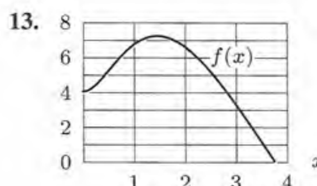


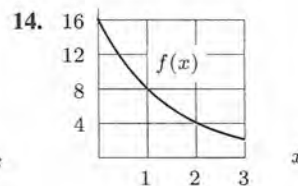
Figura 5.20.

Use las gráficas en los problemas 13 y 14 para estimar $\int_0^3 f(x)\,dx$.

13.



14.



En los problemas del 15 al 24, use una calculadora o computadora para estimar la integral.

15. $\int_0^5 x^2\,dx$

16. $\int_1^5 (3x+1)^2\,dx$

17. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

18. $\int_{-1}^1 \frac{1}{e^t}\,dt$

19. $\int_{1.1}^{1.7} 10(0.85)^t\,dt$

20. $\int_1^2 2^x\,dx$

21. $\int_1^2 (1.03)^t\,dt$

22. $\int_1^3 \ln x\,dx$

23. $\int_{1.1}^{1.7} e^t \ln t\,dt$

24. $\int_{-3}^3 e^{-t^2}\,dt$

25. La razón de cambio de una cantidad está dada por $f(t) = t^2 + 1$. Haga una estimación por defecto y una estimación por exceso del cambio total en la cantidad entre $t = 0$ y $t = 8$ usando

(a) $\Delta t = 4$ **(b)** $\Delta t = 2$ **(c)** $\Delta t = 1$

¿Cuál es el valor de n en cada caso? Trace una gráfica de $f(t)$ con rectángulos sombreados para representar cada una de las seis respuestas.

26. **(a)** Use una calculadora o computadora para encontrar $\int_0^6 (x^2+1)\,dx$. Represente este valor como el área bajo una curva.

(b) Estime $\int_0^6 (x^2+1)\,dx$ usando una suma por la izquierda con $n = 3$. Represente esta suma gráficamente en un dibujo de $f(x) = x^2 + 1$. ¿Esta suma es una estimación por exceso o por defecto del valor real encontrado en el inciso (a)?

(c) Estime $\int_0^6 (x^2+1)\,dx$ usando una suma por la derecha con $n = 3$. Represente esta suma en su dibujo. ¿Esta suma es una estimación por exceso o por defecto?

5.3 INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA

Integral definida como área: cuando $f(x)$ es positiva

Si $f(x)$ es continua y positiva, cada término $f(x_0)\Delta x$, $f(x_1)\Delta x$, ... en una suma de Riemann por la izquierda o por la derecha representa el área de un rectángulo. Véase la figura 5.21. A medida que el ancho Δx de los rectángulos se aproxima a cero, los rectángulos se ajustan más exactamente a la curva y la suma de sus áreas se acerca más al área sombreada de la figura 5.22. Es decir:

> Cuando $f(x)$ es positiva y $a < b$:
>
> $$\begin{array}{c}\text{Área bajo la gráfica de } f\\ \text{entre } a \text{ y } b\end{array} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

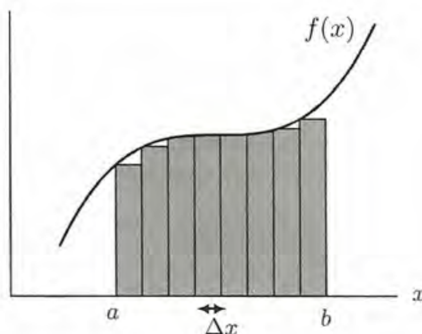


Figura 5.21. Área de rectángulos que aproxima el área bajo la curva.

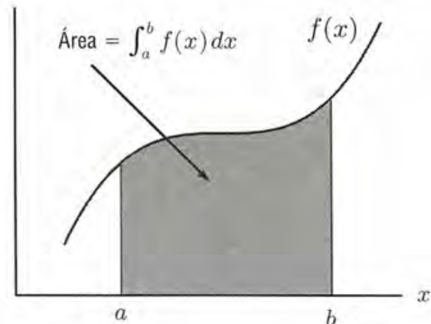


Figura 5.22. El área sombreada es la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ejemplo 1 Encuentre el área bajo la gráfica de $y = 10x(3^{-x})$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

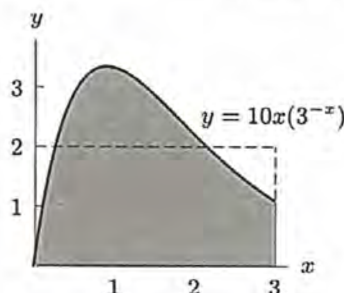


Figura 5.23. Área sombreada $= \int_0^3 10x(3^{-x})\,dx$.

Solución El área que buscamos está sombreada en la figura 5.23. Una estimación aproximada de esta área es 6, porque tiene aproximadamente la misma área que un rectángulo de ancho 3 y altura 2. Para encontrar el área en forma más precisa, decimos

$$\text{Área sombreada} = \int_0^3 10x(3^{-x})dx.$$

Usando una calculadora o computadora para evaluar la integral, obtenemos

$$\text{Área sombreada} = \int_0^3 10x(3^{-x})\,dx = 6.967 \approx 7 \text{ unidades cuadradas.}$$

Relación entre integral definida y área: cuando $f(x)$ no es positiva

En la figura 5.22 asumimos que la gráfica de $f(x)$ está encima del eje x. Si la gráfica está por debajo del eje x, entonces cada valor de $f(x)$ es negativo, de modo que $f(x)\Delta x$ es negativo y el área se cuenta negativamente. En ese caso, la integral definida es el valor del área entre la gráfica de f y el eje horizontal tomado con signo negativo.

Ejemplo 2 ¿Cuál es la relación entre la integral definida $\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx$ y el área de la región entre la parábola $y = x^2 - 1$ y el eje x?

Solución La parábola está abajo del eje x entre $x = -1$ y $x = 1$. (Véase la figura 5.24.) Por tanto,

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx = -\text{Área} = -1.33.$$

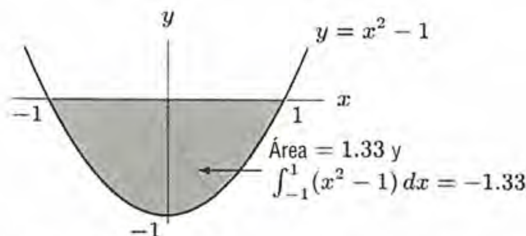


Figura 5.24. La integral $\int_{-1}^{1}(x^2 - 1)\,dx$ es el valor del área sombreada tomado con signo negativo.

En resumen, si suponemos que $f(x)$ es continua, tenemos:

> **Cuando $f(x)$ es positiva para algunos valores de x y negativa para otros,** y $a < b$:
>
> $\int_a^b f(x)\,dx$ es la suma de las áreas arriba del eje x, tomadas con signo positivo, y las áreas abajo del eje x, tomadas con signo negativo.

En el siguiente ejemplo, descomponemos la integral. Las propiedades que nos permiten hacer esto se enlistan en la página 253.

Ejemplo 3 Interprete la integral $\int_0^4 (x^3 - 7x^2 + 11x)\,dx$ en términos de áreas.

Solución La figura 5.25 muestra la gráfica de $f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x$ cruzando abajo del eje x en aproximadamente $x = 2.38$. La integral es el área arriba del eje x, A_1, menos el área abajo del eje x, A_2. Evaluando la integral con una calculadora o computadora vemos que

$$\int_0^4 (x^3 - 7x^2 + 11x)\,dx = 2.67.$$

Al descomponer la integral en dos partes y calcular cada una por separado resulta

$$\int_0^{2.38} (x^3 - 7x^2 + 11x)\,dx = 7.72 \quad \text{y} \quad \int_{2.38}^4 (x^3 - 7x^2 + 11x)\,dx = -5.05,$$

de modo que $A_1 = 7.72$ y $A_2 = 5.05$. Entonces, como esperábamos,

$$\int_0^4 (x^3 - 7x^2 + 11x)\,dx = A_1 - A_2 = 7.72 - 5.05 = 2.67.$$

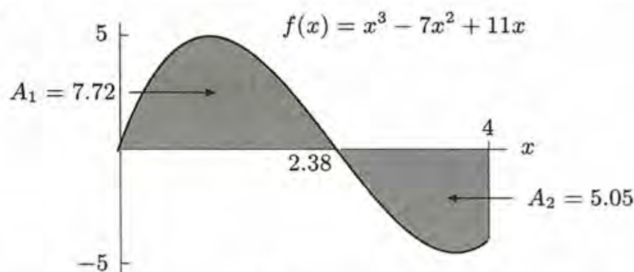


Figura 5.25. Integral $\int_0^4 (x^3 - 7x^2 + 11x)\,dx = A_1 - A_2$.

Ejemplo 4 Encuentre el área total de las regiones sombreadas de la figura 5.25.

Solución Vimos en el ejemplo 3 que $A_1 = 7.72$ y $A_2 = 5.05$. Por consiguiente, tenemos

$$\text{Área total sombreada} = A_1 + A_2 = 7.72 + 5.05 = 12.77.$$

Ejemplo 5 Para cada una de las funciones graficadas en la figura 5.26, decida si $\int_0^5 f(x)\,dx$ es positiva, negativa o aproximadamente cero.

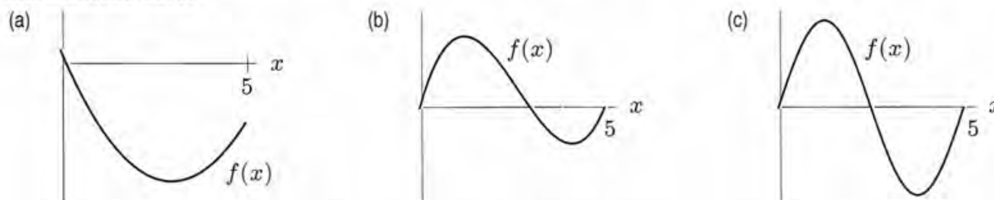


Figura 5.26. ¿$\int_0^5 f(x)\,dx$ es positiva, negativa o cero?

Solución
(a) La gráfica está casi completamente abajo del eje x, así que la integral es negativa.
(b) La gráfica está parcialmente abajo del eje x y parcialmente arriba del eje x. Sin embargo, el área arriba del eje x es mayor que el área abajo del eje x, por consiguiente la integral es positiva.
(c) La gráfica está parcialmente abajo del eje x y parcialmente arriba del eje x. Como las áreas arriba y abajo del eje x parecen ser casi iguales en tamaño, la integral es aproximadamente cero.

Área entre dos curvas

Es posible usar rectángulos para aproximar el área entre dos curvas. Si $g(x) \leq f(x)$, como se muestra en la figura 5.27, la altura de un rectángulo es $f(x) - g(x)$. El área del rectángulo es $(f(x) - g(x))\Delta x$ y tenemos el siguiente resultado:

> Si $g(x) \leq f(x)$ para $a \leq x \leq b$:
>
> $$\text{Área entre gráficas de } f(x) \text{ y } g(x) \text{ para } a \leq x \leq b = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

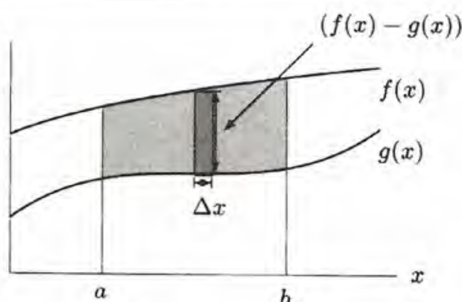


Figura 5.27. Área entre dos curvas $= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

Ejemplo 6 Las gráficas $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^{3/2}$ para $x \geq 0$ se muestran en la figura 5.28. Use una integral definida para calcular el área entre las gráficas de estas dos funciones.

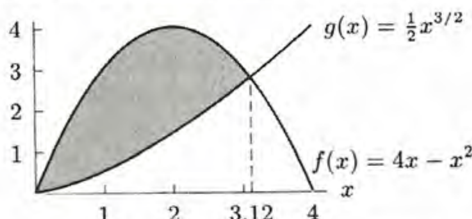


Figura 5.28. Encuentre el área entre $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^{3/2}$ usando una integral.

Solución La región entre las gráficas de las dos funciones está sombreada en la figura 5.28. Las dos gráficas se cruzan en $x = 0$ y en $x \approx 3.12$. Entre estos valores, la gráfica de $f(x) = 4x - x^2$ está arriba de la gráfica de $g(x) = \frac{1}{2}x^{3/2}$. Con una calculadora o una computadora para evaluar la integral, obtenemos

$$\text{Área entre gráficas} = \int_0^{3.12} \left((4x - x^2) - \tfrac{1}{2}x^{3/2}\right) dx = 5.906.$$

Problemas para la sección 5.3

1. Usando la figura 5.29 encuentre el valor de $\int_1^6 f(x)dx$.

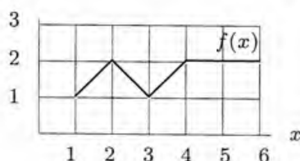


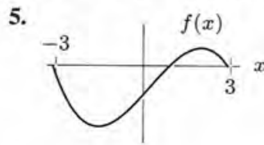
Figura 5.29.

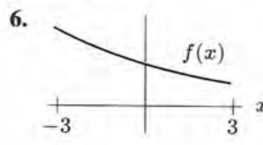
2. Encuentre el área bajo $y = x^3 + 2$ entre $x = 0$ y $x = 2$. Bosqueje esta área.

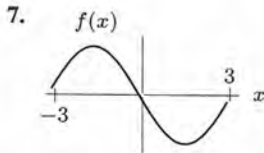
3. Encuentre el área bajo $P = 100(0.6)^t$ entre $t = 0$ y $t = 8$.

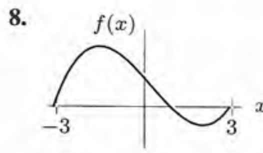
4. Encuentre el área bajo la gráfica de $f(x) = x^2 + 2$ entre $x = 0$ y $x = 6$.

Para las funciones de los problemas 5 al 8, decida si $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ es positiva, negativa o aproximadamente cero.

5.


6.


7.


8.


9. a) Estime (contando los rectángulos) el área total sombreada de la figura 5.30.
(b) Usando la figura 5.30, estime $\int_0^8 f(x)dx$.
(c) ¿Por qué sus respuestas a los incisos (a) y (b) son diferentes?

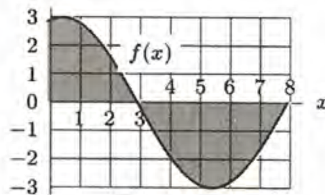


Figura 5.30.

En los problemas del 10 al 13, encuentre el área dada.

10. Entre $y = x^2$ y $y = x^3$ para $0 \leq x \leq 1$.
11. Entre $y = x^{1/2}$ y $y = x^{1/3}$ para $0 \leq x \leq 1$.
12. Entre $y = 3x$ y $y = x^2$.
13. Entre $y = x$ y $y = \sqrt{x}$.
14. Encuentre el área entre la gráfica de $y = x^2 - 2$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = 3$.
15. (a) Trace una gráfica de $f(x) = x(x + 2)(x - 1)$.
(b) Encuentre el área total entre la gráfica y el eje x entre $x = -2$ y $x = 1$.
(c) Encuentre $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ e interprete esto en términos de áreas.
16. Calcule la integral $\int_0^4 \cos\sqrt{x}\,dx$ e interprete el resultado en términos de áreas.
17. Dada $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.25$ y la figura 5.31, calcule:
(a) $\int_0^1 f(x)dx$ (b) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$
(c) El área total sombreada.

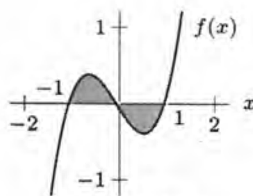


Figura 5.31.

18. Dada $\int_{-2}^{0} f(x)dx = 4$ y la figura 5.32 calcule:
(a) $\int_0^2 f(x)dx$ (b) $\int_{-2}^{2} f(x)dx$
(c) El área total sombreada.

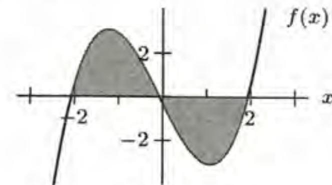


Figura 5.32.

19. Use la siguiente tabla para estimar el área entre $f(x)$ y el eje de las x en el intervalo $0 \leq x \leq 20$.

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	15	18	20	16	12

Para los problemas 20 y 21, calcule la integral definida e interprete los resultados en términos de áreas.

20. $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^2 - 3}{x}\,dx.$ 21. $\displaystyle\int_1^4 (x - 3\ln x)\,dx.$

22. Use la figura 5.33 para encontrar los valores de

(a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_b^c f(x)\,dx$
(c) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ (d) $\displaystyle\int_a^c |f(x)|\,dx$

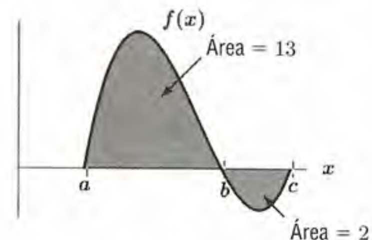
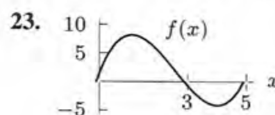
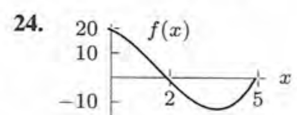


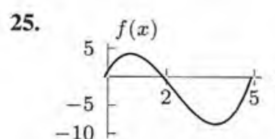
Figura 5.33.

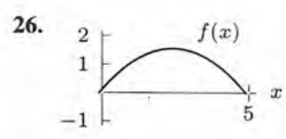
En los problemas 23 al 26, relacione la gráfica con uno de los siguientes valores posibles para la integral $\int_0^5 f(x)dx$

I. −10.4 **II.** −2.1 **III.** 5.2 **IV.** 10.4

23.


24.


25.


26.


27. Usando la figura 5.34, decida si cada una de las siguientes integrales definidas es positiva o negativa.

(a) $\int_{-5}^{-4} f(x)\,dx$ **(b)** $\int_{-4}^{1} f(x)\,dx$

(c) $\int_{1}^{3} f(x)\,dx$ **(d)** $\int_{-5}^{3} f(x)\,dx$

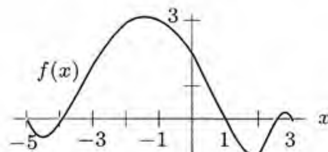


Figura 5.34.

28. Usando la figura 5.34, acomode las siguientes integrales definidas en orden ascendente:

$\int_{-5}^{-3} f(x)\,dx$, $\int_{-5}^{-1} f(x)\,dx$, $\int_{-5}^{1} f(x)\,dx$, $\int_{-5}^{3} f(x)\,dx$.

29. **(a)** Usando la figura 5.35, encuentre $\int_{-3}^{0} f(x)dx$.

(b) Si el área de la región sombreada es A, calcule $\int_{-3}^{4} f(x)dx$.

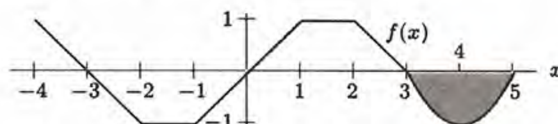


Figura 5.35.

30. Use una gráfica de $y = 2^{-x^2}$ para explicar por qué $\int_{-1}^{1} 2^{-x^2}\,dx$ debe estar entre 0 y 2.

31. **(a)** Trace una gráfica de $x^3 - 5x^2 + 4x$, haciendo $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

(b) Use su gráfica y la interpretación del área de la integral definida para decidir cuál de los cinco números

$$I_n = \int_0^n (x^3 - 5x^2 + 4x)\,dx \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, 4, 5$$

es el mayor. ¿Cuál es el menor? ¿Cuántos de los números son positivos? (No calcule las integrales.)

5.4 INTERPRETACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Notación y unidades para la integral definida

Así como en la notación de Leibniz para la derivada dy/dx nos recuerda que la derivada es el límite de un cociente de diferencias, la notación para la integral definida,

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

nos recuerda que una integral es el límite de una suma. El símbolo de integral es una S deformada. Como los términos que se suman son productos de la forma "$f(x)$ tiempo por una diferencia en x" tenemos el siguiente resultado:

> La unidad de medida para $\int_a^b f(x)\,dx$ es el producto de las unidades para $f(x)$ y de las unidades para x.

Por ejemplo, si x y $f(x)$ tienen las mismas unidades, entonces la integral $\int_a^b f(x)dx$ se mide en unidades al cuadrado, digamos cm × cm = cm^2. Es decir, es lo que esperaríamos puesto que la integral representa un área.

Análogamente, si $f(t)$ es velocidad en metros/segundos y t es el tiempo en segundos, entonces la integral

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

tiene unidades de (metros/s) × (s)= metros, que es lo que esperamos porque la integral representa cambio en posición. Vimos en la sección 5.1 que el cambio total podría aproximarse por una suma de Riemann formada usando la razón de cambio. En el límite, tenemos:

> Si $f(t)$ es una razón de cambio de una cantidad, entonces
>
> $$\text{Cambio total en la cantidad entre } t = a \text{ y } t = b = \int_a^b f(t)\,dt$$

Las unidades corresponden: si $f(t)$ es una razón de cambio, con unidades de cantidad/tiempo, entonces $f(t)\Delta t$ y la integral definida tienen unidades de (cantidad/tiempo) $\times$ (tiempo) = cantidad.

Ejemplo 1 Una colonia de bacterias inicialmente tiene una población de 14 millones. Suponga que t horas después la población está creciendo a razón de $f(t) = 2^t$ millones de bacterias por hora.

(a) Dé una integral definida que represente el cambio total en la población de bacterias para el tiempo transcurrido de $t = 0$ a $t = 2$.

(b) Encuentre la población en el tiempo $t = 2$.

Solución **(a)** Como $f(t) = 2^t$ da la razón de cambio de la población, tenemos

$$\text{Cambio en la población entre } t = 0 \text{ y } t = 2 = \int_0^2 2^t\,dt.$$

(b) Usando una calculadora, encontramos $\int_0^2 2^t\,dt = 4.328$. La población de bacterias fue de 14 millones al tiempo $t = 0$ y aumentó 4.328 millones entre $t = 0$ y $t = 2$. Por tanto, en el tiempo $t = 2$,

$$\text{Población} = 14 + 4.328 = 18.328 \text{ millones de bacterias.}$$

Ejemplo 2 Suponga que $C(t)$ representa el costo diario de calefacción de su casa en dólares por día, donde t es el tiempo medido en días y $t = 0$ corresponde al 1 de enero del 2000. Interprete $\int_0^{90} C(t)\,dt$.

Solución Las unidades para la integral $\int_0^{90} C(t)dt$ son (dólares/día) $\times$ (día)= dólares. La integral representa el costo total en dólares para calentar su casa durante los primeros 90 días del 2000, es decir, los meses de enero, febrero y marzo.

Ejemplo 3 Un hombre inicia un viaje en automóvil a 50 millas de distancia de su casa. Viaja en línea recta y su casa está sobre esta línea. En la figura 5.36 se indica la velocidad.

(a) ¿Cuándo está el hombre más cerca de su casa? Aproximadamente, ¿a qué distancia se encuentra de su casa en ese momento?

(b) ¿Cuándo está más lejos de su casa? ¿A qué distancia se encuentra entonces?

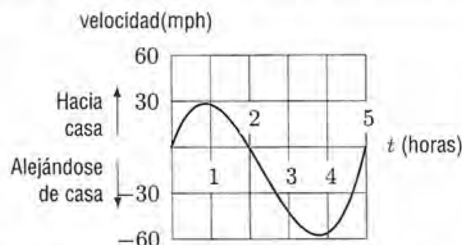


Figura 5.36. Velocidad de un viaje que comienza a 50 millas de casa.

Solución ¿Qué ocurre en este viaje? La función de velocidad es positiva durante las primeras dos horas y negativa entre $t = 2$ y $t = 5$. Por tanto, el hombre avanza hacia su casa durante las primeras dos horas, luego da media vuelta en $t = 2$ y se aleja de su casa. La distancia que recorre está representada por el área entre la gráfica de la velocidad y el eje t; como el área bajo el *eje* es mayor que el área arriba del eje, vemos que termina más alejado de su casa que cuando empezó. Por consiguiente, está más cerca de su casa en $t = 2$ y más lejos en $t = 5$. Podemos estimar la distancia que recorrió en cada dirección si estimamos las áreas.

(a) El hombre comienza a 50 millas de su casa. La distancia que recorre durante las primeras dos horas es el área bajo la curva entre $t = 0$ y $t = 2$. Esta área corresponde aproximadamente a un cuadro de la malla. Como cada cuadro tiene un área (30 millas/hora) (1 hora) = 30 millas, el hombre se desplaza unas 30 millas hacia su casa. Está más cerca de casa después de dos horas, y está a unas 20 millas de distancia en ese momento.

(b) Entre $t = 2$ y $t = 5$, el hombre se aleja de su casa. Como esta área es igual a unos 3.5 cuadros, que es (3.5) (30) = 105 millas, se ha alejado 105 millas de casa. Ya estaba a 20 millas de su casa, así en $t = 5$ está a unas 125 millas de casa. Está más lejos de su casa en $t = 5$.

Observe que el hombre ha recorrido una distancia total de 30 + 105 = 135 millas, pero se dirigió hacia su casa 30 millas y se alejó de ella 105 millas. Su cambio *neto* en posición es de 75 millas.

Ejemplo 4 En la figura 5.37 se muestran las tasas de crecimiento de población de dos especies de plantas (medidas en nuevas plantas por año). Suponga que las poblaciones de las dos especies son iguales en el tiempo $t = 0$.

(a) ¿Cuál población es mayor después de un año?, ¿después de dos años?

(b) ¿Cuánto aumenta la población de la especie 1 durante los primeros dos años?



Figura 5.37. Tasas de crecimiento de población para dos especies de plantas.

Solución **(a)** La tasa de crecimiento de la población para la especie 1 es mayor que la de la especie 2 durante el primer año, de modo que la población de la especie 1 es mayor después del primer año. Después de dos años, la situación es menos clara porque la población de la especie 1 aumentó más rápido el primer año y la de la especie 2 durante el segundo año. Sin embargo, si $r(t)$ es la razón de crecimiento de la población, tenemos que

$$\text{Cambio total en la población durante los primeros dos años} = \int_0^2 r(t)dt.$$

Esta integral es el área bajo la gráfica de $r(t)$. Para $t = 0$ a $t = 2$, el área bajo la gráfica de la especie 1 en la figura 5.37 es menor que el área bajo la gráfica de la especie 2, de modo que la población de la especie 2 es mayor después de dos años.

(b) El cambio de población para la especie 1 es el área de la región bajo la gráfica de $r(t)$ entre $t = 0$ y $t = 2$ en la figura 5.37. La región consta de unos 16.5 cuadros, cada uno de área (750 plantas/año) (0.25 años) = 187.5 plantas, dando un total de (16.5)(187.5) = 3,093.75 plantas. La población de la especie 1 aumenta unas 3,100 plantas durante los dos años.

Biodisponibilidad de medicamentos

En farmacología, la integral definida se usa para medir la *biodisponibilidad*, es decir, la presencia total de un medicamento en el torrente sanguíneo durante el curso de un tratamiento. La unidad de la biodisponibilidad representa 1 unidad de concentración del medicamento en la sangre durante 1 hora. Por ejemplo, una concentración de $3\mu g/cm^3$ en la sangre durante dos horas tiene una biodisponibilidad de (3)(2) = $6(\mu g/cm^3)$-horas.

Por lo general, la concentración de un medicamento en la sangre no es constante. Normalmente, la concentración en la sangre aumenta conforme el medicamento es absorbido en el torrente sanguíneo y después decrece a cero a medida que el medicamento se descompone y es excretado.[2] (Véase la figura 5.38.)

Supongamos que queremos calcular la biodisponibilidad de un medicamento que está en la sangre con concentración $C(t)\mu g/cm^3$ en el tiempo t para el periodo $0 \leq t \leq T$. Sobre un pequeño intervalo Δt, estimamos

$$\text{Biodisponibilidad} \approx \text{Concentración} \times \text{Tiempo} = C(t)\Delta t.$$

[2]Avery, Graeme, S., *Drug Treatment*, Adis Press, Sydney, 1976.

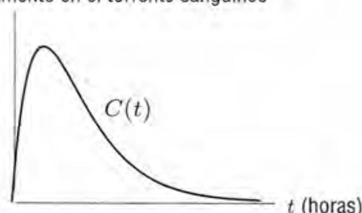


Figura 5.38. Curva que muestra la concentración de un medicamento como una función del tiempo.

Si sumamos en todos los subintervalos, tenemos

$$\text{Biodisponibilidad total} \approx \sum C(t)\Delta t.$$

En el límite cuando $n \to \infty$, donde n es el número de intervalos de ancho Δt, la suma se convierte en una integral. Por consiguiente, para $0 \leq t \leq T$, tenemos

$$\text{Biodisponibilidad} = \int_0^T C(t)dt.$$

Es decir, la biodisponibilidad de un medicamento es igual al área bajo la curva de concentración del medicamento.

Ejemplo 5 En la figura 5.39 se muestran las curvas de concentración en sangre[3] de dos medicamentos. Describa las diferencias y similitudes entre los dos medicamentos en términos de máxima concentración, rapidez de absorción en el torrente sanguíneo y la biodisponibilidad total.

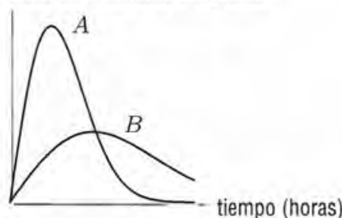


Figura 5.39. Curvas de concentración de dos medicamentos.

Solución El medicamento A tiene una máxima concentración superior del doble que el medicamento B. Debido a que el medicamento A alcanza una máxima concentración más pronto que el medicamento B, el medicamento A parece ser absorbido mas rápidamente en el torrente sanguíneo que el medicamento B. Finalmente, el medicamento A tiene mayor biodisponibilidad total, porque el área bajo la gráfica de la función de concentración para el medicamento A es mayor que el área bajo la gráfica del medicamento B.

Problemas para la sección 5.4

1. Si $f(t)$ se mide en millas por hora y t se mide en horas, ¿cuáles son las unidades de $\int_a^b f(t)\,dt$?
2. Si $f(t)$ se mide en metros/segundo^2 y t se mide en segundos, ¿cuáles son las unidades de $\int_a^b f(t)\,dt$?
3. Si $f(t)$ se mide en dólares por año y t se mide en años, ¿cuáles son las unidades de $\int_a^b f(t)\,dt$?
4. Si $f(x)$ se mide en libras y x se mide en pies, ¿cuáles son las unidades de $\int_a^b f(x)\,dx$?
5. Se fuga petróleo de un buque-tanque averiado a razón de $r = f(t)$ galones por minuto, donde t es en minutos. Escriba una integral definida que exprese la cantidad total de petróleo que se fuga del buque en la primera hora.
6. Un incendio forestal cubre 2,000 acres en el tiempo $t = 0$. El incendio está creciendo a razón de $8\sqrt{t}$ acres por hora, donde t está dado en horas. ¿Cuántos acres han sido consumidos 24 horas después?

[3] Avery, Graeme S., *Drug Treatment*, Adis Press, Sydney, 1976.

7. La figura 5.40 muestra la razón de cambio de la cantidad de agua en una torre de agua, en litros por día, durante el mes de abril. Si la torre tiene 12,000 litros de agua el primero de abril estime la cantidad agua que habrá en ésta el 30 de abril.

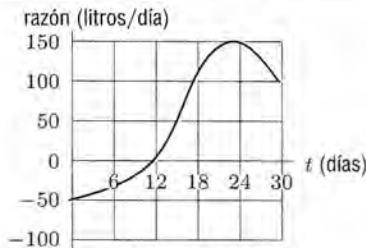


Figura 5.40.

8. En la tabla[4] se muestra la producción anual de carbón en Estados Unidos (en cuatrillones de BTU por año). Evalúe la cantidad total de carbón producida en Estados Unidos entre 1960 y 1990. Si $r = f(t)$ es la razón de la producción de carbón en t años desde 1960, escriba una integral que represente la producción de 1960 a 1990.

Año	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
Razón	10.82	13.06	14.61	14.99	18.60	19.33	22.46

9. La cantidad de basura, W, que produce una empresa en toneladas métricas por semana, está dada aproximadamente por $W = 3.75e^{-0.008t}$, donde t es en semanas desde el primero de enero del 2000. La eliminación de la basura le cuesta a la empresa \$15/ton. ¿Cuánto pagó para eliminar la basura durante el año 2000?

10. Una estación radioemisora de noticias dijo a principios de 1993 que el ingreso anual del estadounidense promedio estaba cambiando a razón de $r(t) = 40(1.002)^t$ dólares por mes, donde t está dado en meses desde el primero de enero de 1993. ¿Cuánto cambió el ingreso del estadounidense promedio durante 1993?

11. La figura 5.41 muestra el número de ventas por mes hechas por dos vendedores. ¿Cuál de ellos tiene más ventas totales después de seis meses? ¿Después del primer año? Aproximadamente, ¿en qué mes (si es el caso) han vendido la misma cantidad total? En cifras aproximadas, ¿cuántas ventas totales hizo cada uno al terminar el primer año?

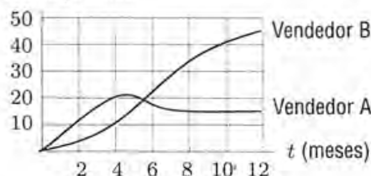


Figura 5.41.

12. Supongamos que una sustancia extraña se introduce en la sangre; la razón a la que se producen los anticuerpos está dada por:

$$r(t) = \frac{t}{t^2 + 1} \text{ miles de anticuerpos por minuto,}$$

donde el tiempo, t, está dado en minutos. Suponiendo que no hay anticuerpos presentes al tiempo $t = 0$, encuentre la cantidad total de anticuerpos en la sangre después de cuatro minutos.

13. Dos especies de plantas tienen la misma población al tiempo $t = 0$, y las tasas de crecimiento se muestran en la figura 5.42.

(a) ¿Cuál de las especies tiene una mayor población al final de cinco años? ¿Al final de 10 años?

(b) ¿Cuál de las especies considera usted que tendrá la mayor población después de 20 años? Explique.

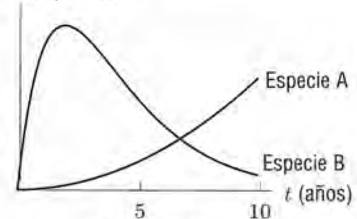


Figura 5.42.

14. Las gráficas de rapidez de crecimiento las usan los endocrinólogos para seguir el progreso de niños con deficiencias de crecimiento. La figura 5.43 muestra las curvas de rapidez de crecimiento de muchachos y muchachas promedio, de los tres a los 18 años.

(a) ¿Cuál curva es para muchachas y cuál para muchachos? Explique cómo estableció las diferencias.

(b) ¿Cuál es el promedio de crecimiento de los muchachos entre tres y 10 años?

(c) El crecimiento acelerado asociado con la adolescencia y el inicio de la pubertad ocurre entre los 12 y los 15 años para varones promedio, y entre los 10 y los 12.5 años para las muchachas promedio. Estime el aumento de estatura de muchachos y muchachas promedio durante esta etapa de crecimiento acelerado.

(d) Cuando el crecimiento ha terminado, ¿cuál es la diferencia de altura entre hombres y mujeres promedio? (Ambos miden aproximadamente lo mismo a la edad de tres años.)

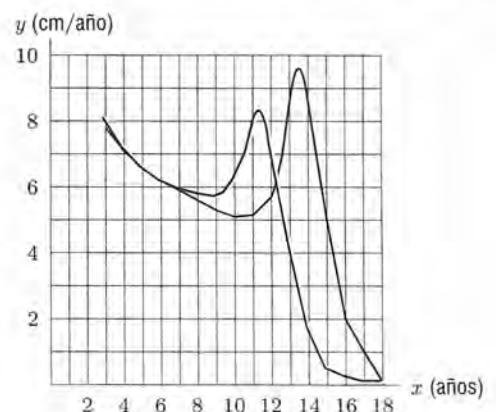


Figura 5.43.

[4] *World Almanac*, 1995.

15. Se bombea agua de una cisterna a razón de $5 - 5e^{-0.12t}$ litros/minuto, donde t está dado en minutos desde que la bomba empieza a funcionar. Si la cisterna tiene 1,000 litros de agua cuando la bomba comenzó a trabajar, ¿cuánta agua tiene una hora después?

16. La velocidad de un automóvil (en millas por hora) está dada por $v(t) = 40t - 10t^2$, donde t está en horas.

(a) Escriba una integral definida para hallar la distancia que el automóvil recorre durante las primeras tres horas.

(b) Trace una gráfica de la velocidad en función del tiempo y represente la distancia recorrida durante las primeras tres horas como un área en su gráfica.

(c) Use una computadora o calculadora para encontrar esta distancia.

17. En la figura 5.44 se representa la velocidad, v, a la cual usted viaja en bicicleta en un camino recto. Supongamos que arranca a 10 millas de su casa. Escriba un párrafo en el cual describa su viaje: ¿Lo inicia acercándose o alejándose de su casa? ¿Qué distancia viaja en esa dirección y que tan lejos está de su casa cuando da la vuelta? ¿Cuántas veces cambia de dirección? ¿Llega a su casa? ¿Dónde está usted al final del recorrido de cuatro horas en bicicleta?

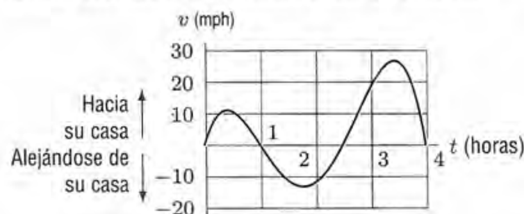


Figura 5.44.

18. Una ciclista pedalea a lo largo de un camino recto con la velocidad, v, que se muestra en la figura 5.45. Suponga que la ciclista comienza a cinco millas de distancia de un lago, y que las velocidades positivas la alejan del lago y las negativas la acercan al lago. ¿Cuándo está la ciclista más lejos del lago, y a qué distancia se encuentra entonces?

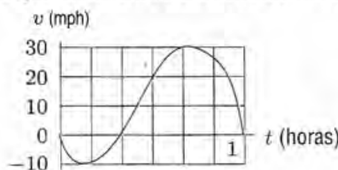


Figura 5.45.

19. La figura 5.46 compara la concentración en plasma sanguíneo para dos mitigadores de dolor. Compare los dos productos en términos del nivel de máxima concentración, el tiempo hasta la máxima concentración y la biodisponibilidad general.

concentración del medicamento en plasma

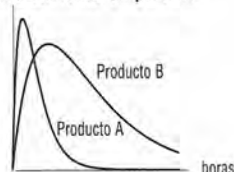


Figura 5.46.

20. La figura 5.47 muestra curvas de concentración en plasma para dos medicamentos que se usan para disminuir el ritmo cardiaco acelerado. Compare los dos productos en términos del nivel de máxima concentración, el tiempo hasta que alcanza la máxima concentración y la biodisponibilidad general.

concentración del medicamento en plasma

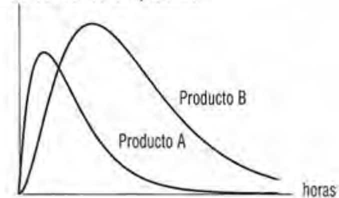


Figura 5.47.

21. Una limpieza ambiental de dos días inicia a las 9:00 a. m., el primer día. El número de trabajadores varía como se muestra en la figura 5.48. Si a los trabajadores se les pagó a $10 la hora, ¿cuánto se pagó al personal por la limpieza?



Figura 5.48.

22. Suponga en el problema 21 que a los trabajadores se les pagó a $10 la hora por trabajar de las 9:00 a.m. a las 5:00 p.m. y se les pagó a $15 la hora por trabajar durante el resto del día. ¿Cuánto se le pagaría al personal de limpieza bajo estas condiciones?

23. Un almacén le cobra a sus clientes $5 diarios por cada 10 pies cúbicos de espacio que utilizan para almacenaje. La figura 5.49 registra el almacenaje de una empresa en un mes. ¿Cuánto pagará dicha empresa?



Figura 5.49.

24. Uno de los primeros problemas de contaminación que se presentaron a la atención de la Agencia de Protección del Medio Ambiente (EPA, por sus siglas en inglés) fue el caso del Lago Sioux al sureste de Dakota. Durante años, una pequeña planta papelera ubicada en las cercanías había estado descargando desechos que contenían tetracloruro de carbono (CCl_4) en las aguas del lago. En el momento en el que la EPA se enteró de la situación, el producto químico estaba entrando en el agua a razón de 16 yardas cúbicas por año.

La agencia inmediatamente ordenó la instalación de filtros diseñados para disminuir (y finalmente detener) el flujo de CCl_4 proveniente de la fábrica. La aplicación de este programa tomó exactamente tres años, durante los cuales el flujo de contaminantes fue de 16 yardas cúbicas por año. Una vez que se instalaron los filtros, el flujo decayó. A partir de haberse instalado los filtros, hasta que el flujo se detuvo, la razón del caudal se aproximó por

$$\text{Razón (en yardas cúbicas/año)} = t^2 - 14t + 49,$$

donde t se midió en años desde que la EPA se enteró de la situación (así, $t \geq 3$).

(a) Dibuje una gráfica del caudal de CCl_4 que se descargó en el lago como función del tiempo; inicie en el momento en que la EPA se enteró por primera vez de la situación.
(b) ¿Cuántos años transcurrieron entre el tiempo en que la EPA supo del caso y el tiempo en el se detuvo por completo el caudal de contaminación?
(c) ¿Cuánto CCl_4 entró a las aguas durante el tiempo que se muestra en el inciso (a) de la gráfica?

5.5 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

En la sección 5.2 vimos que la integral definida proporciona el cambio total en una cantidad a partir de la razón de cambio. Sabemos que la razón de cambio de una cantidad $F(t)$ está dada por la derivada $F'(t)$.

Para calcular el cambio total, dividimos el intervalo $a \leq t \leq b$ en n subintervalos iguales según $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$. Tomamos $t_0 = a$ y $t_n = b$ y escribimos Δt como la longitud de cada subintervalo, así

$$\Delta t = \frac{b-a}{n}.$$

En este primer subintervalo la razón de cambio de F se puede aproximar por $F'(t_1)$. Por tanto,

$$\text{Cambio en } F = \text{Razón} \times \text{Tiempo} \approx F'(t_1)\Delta t.$$

Análogamente, para el segundo subintervalo, la razón de cambio de F se puede aproximar con $F'(t_2)$, de modo que

$$\text{Cambio en } F = \text{Razón} \times \text{Tiempo} \approx F'(t_2)\Delta t.$$

Continuando de esta manera, vemos que el cambio total se puede aproximar con la suma por la derecha.

$$\begin{matrix}\text{Cambio total en } F \\ \text{entre } a \text{ y } b\end{matrix} \approx F'(t_1)\Delta t + F'(t_2)\Delta t + \cdots + F'(t_n)\Delta t = \sum_{i=1}^{n} F'(t_i)\Delta t.$$

Esta aproximación mejora a medida que n se haga más grande. Cuando tomamos el límite, la suma se convierte en una integral y tenemos

$$\begin{matrix}\text{Cambio total en } F \\ \text{entre } a \text{ y } b\end{matrix} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F'(t_i)\Delta t = \int_a^b F'(t)\, dt.$$

Por otra parte, el cambio total en F entre a y b también está dado por $F(b) - F(a)$, así que tenemos el siguiente resultado:

El teorema fundamental del cálculo

Si $F'(t)$ es continua para $a \leq t \leq b$, entonces

$$\int_a^b F'(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

Es decir:
La integral definida de una derivada proporciona el cambio total.

El teorema fundamental del cálculo se puede usar cuando se conoce la razón, $F'(t)$, y se quiere encontrar el cambio total $F(b) - F(a)$. La sección Enfoque teórico, de la página 252, da otra versión del teorema fundamental.

Ejemplo 1 La figura 5.50 muestra $F'(t)$, la razón de cambio del valor, $F(t)$, de una inversión en un periodo de cinco meses.

(a) ¿Cuándo aumenta el valor de la inversión y cuándo disminuye?

(b) ¿Aumenta o disminuye el valor de la inversión durante los cinco meses?

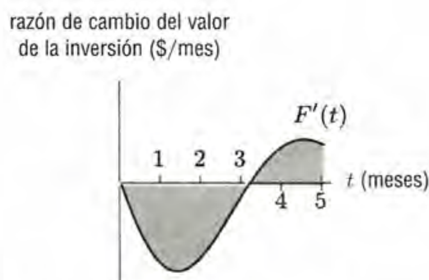


Figura 5.50. ¿Aumentó o disminuyó el valor de la inversión en estos cinco meses?

Solución

(a) La inversión disminuyó en valor durante los primeros tres meses, porque la razón de cambio de valor entonces fue negativa. El valor aumentó durante los últimos dos meses.

(b) Queremos hallar el cambio total en el valor de la inversión entre $t = 0$ y $t = 5$. Como el cambio total es la integral de la razón de cambio, $F'(t)$, buscamos

$$\text{Cambio total en valor } = \int_0^5 F'(t)dt.$$

La integral es igual al área sombreada sobre el eje t menos el área sombreada abajo del eje t. Como en la figura 5.50 el área abajo del eje es mayor que el área arriba del eje, la integral es negativa. El cambio total en el valor de la inversión durante este tiempo es negativo, de modo que decrece en valor.

Costo marginal y cambio en costo total

Supongamos que $C(q)$ representa el costo de producir q artículos. La derivada $C'(q)$ es el costo marginal. Debido a que el costo marginal $C'(q)$ es la razón de cambio de la función de costos respecto a la cantidad, por el teorema fundamental, la integral

$$\int_a^b C'(q)\,dq$$

representa el cambio total en la función de costos entre $q = a$ y $q = b$. Es decir, la integral proporciona la cantidad que cuesta aumentar la producción de a unidades a b unidades.

El costo de producción de 0 unidades es el costo fijo $C(0)$. El área bajo la curva de costo marginal entre $q = 0$ y $q = b$ es el aumento total en el costo entre una producción de 0 y una de b. A esto se le llama *costo variable total*. Al agregar esto al costo fijo se obtiene el costo total de producir b unidades. En resumen,

Si $C'(q)$ es una función de costos marginal y $C(0)$ es el costo fijo,

$$\text{El costo para aumentar la producción de } a \text{ unidades a } b \text{ unidades} = C(b) - C(a) = \int_a^b C'(q)\,dq$$

$$\text{El costo variable total de producir de } b \text{ unidades} = \int_0^b C'(q)\,dq$$

$$\text{Costo total de producir } b \text{ unidades} = \text{Costo fijo} + \text{Costo variable total}$$

$$= C(0) + \int_0^b C'(q)\,dq$$

Ejemplo 2 En la figura 5.51 hay una curva de costo marginal. Si el costo fijo es de \$1,000, estime el costo total de producir 250 artículos.

Solución El costo total de producción es Costo fijo + Costo variable. El costo variable de producir 250 artículos está representado por el área bajo la curva de costo marginal. El área en la figura 5.51 entre $q = 0$ y $q = 250$ es de unos 20 cuadros. Cada cuadro de la malla tiene un área de (2 dólares/artículo)(50 artículos) = 100 dólares, así que

$$\text{Costo variable total} = \int_0^{250} C'(q)\,dq \approx 20(100) = 2{,}000.$$

El costo total de producir 250 artículos está dado por:

$$\begin{aligned}\text{Costo total} &= \text{Costo fijo} + \text{Costo variable total}\\ &\approx \$1{,}000 + \$2{,}000\\ &= \$3{,}000.\end{aligned}$$

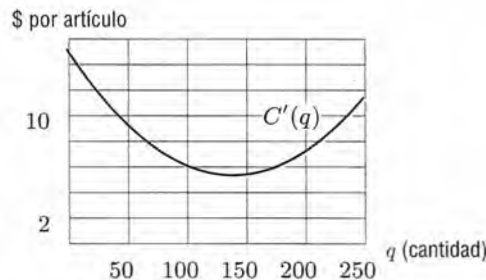


Figura 5.51. Una curva de costo marginal.

Problemas para la sección 5.5

1. Si la función costo marginal $C'(q)$ se mide en dólares por tonelada, y q representa la cantidad en toneladas, ¿cuáles son las unidades de medida para $\int_{800}^{900} C'(q)dq$? ¿Qué representa esta integral?

2. La figura 5.52 muestra $P'(t)$, la razón de cambio del precio de las existencias de una cierta empresa en el tiempo t.
   (a) En un periodo de cinco semanas, ¿cuándo tuvieron las existencias el valor más alto? ¿Y el valor más bajo?
   (b) Si $P(t)$ representa el precio de las existencias, ordene las cantidades siguientes en orden ascendente:

$$P(0),\ P(1),\ P(2),\ P(3),\ P(4),\ P(5).$$

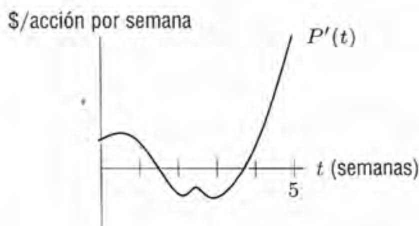


Figura 5.52.

3. En la figura 5.53 se muestra una función de costo marginal $C'(q)$. Si los costos fijos son \$10,000, calcule:
   (a) El costo total de producción de 30 unidades.
   (b) El costo adicional si la compañía aumenta la producción de 30 a 40 unidades.
   (c) El valor de $C'(25)$. Interprete su respuesta en términos de costos de producción.

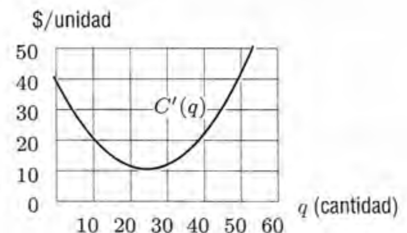


Figura 5.53.

4. La función de costo marginal para una compañía está dada por

$$C'(q) = q^2 - 16q + 70 \text{ dólares/unidad},$$

donde q es la cantidad producida. Si $C(0) = 500$, encuentre el costo total de producir 20 unidades. ¿Cuál es el costo fijo y cuál el costo variable total para esta cantidad?

5. El costo marginal $C'(q)$ (en dólares por unidad) de producir q unidades se muestra en la siguiente tabla.
   (a) Si el costo fijo es \$10,000, calcule el costo de producir 400 unidades.
   (b) ¿Cuánto aumentaría el costo total si la producción se incrementara una unidad, para alcanzar 401 unidades?

q	0	100	200	300	400	500	600
$C'(q)$	25	20	18	22	28	35	45

6. El costo marginal de perforación de un pozo petrolero depende de la profundidad a la que se está perforando; la perforación será más cara, por metro, conforme se perfora más en el terreno. Los costos fijos son 1,000,000 de riales (el rial es la unidad monetaria de Arabia Saudita), y si x es la profundidad en metros, los costos marginales son
$$C'(x) = 4{,}000 + 10x \text{ riales/metro.}$$
Encuentre el costo total de perforar un pozo de 500 metros.

7. La función ingreso marginal de ventas de q unidades de un producto es $I'(q) = 200 - 12\sqrt{q}$ dólares por unidad.
   (a) Trace la gráfica de $I'(q)$.
   (b) Calcule el ingreso total al vender 100 unidades.
   (c) ¿Cuál es el ingreso marginal en las 100 unidades. Use este valor y su respuesta en el inciso (b) para evaluar el ingreso total si las ventas son 101 unidades.

8. La función costo marginal de fabricar q bicicletas de montaña es
$$C'(q) = \frac{600}{0.3q + 5}.$$
   (a) Si el costo fijo de producir las bicicletas es de \$2,000, encuentre el costo total de producir 30 bicicletas.
   (b) Si las bicicletas se venden a \$200 cada una, ¿cuál es la utilidad (o pérdida) de las primeras 30 bicicletas?
   (c) Encuentre la ganancia marginal de la bicicleta número 31.

Para los problemas del 9 al 11, suponga $F(0) = 0$ y $F'(x) = 4 - x^2$.

9. Calcule $F(b)$ para $b = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$.

10. Usando una gráfica de F', decida dónde está creciendo F y dónde F está disminuyendo para $0 \le x \le 2.5$.

11. ¿F tiene un valor máximo para $0 \le x \le 2.5$? Si es así, ¿cuál es y en qué valor de x ocurre?

12. En la figura 5.54 se muestra la gráfica de una derivada $f'(x)$. Llene en la tabla los valores para $f(x)$ cuando $f(0) = 2$.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2						

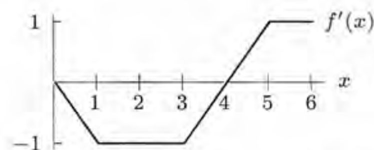


Figura 5.54. Gráfica de f', no de f.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

- **Integral definida como límite de sumas por la derecha y por la izquierda**
- **Interpretaciones de la integral definida**
  Cambio total a partir de razón de cambio, cambio en la posición dada la velocidad, área, biodisponibilidad, costo total variable.
- **Trabajo con la integral definida**
  Calcular integrales definidas a partir de una gráfica, una tabla de valores, o una fórmula.
- **Teorema fundamental del cálculo**

PROBLEMAS DE REPASO

1. Los filtros en una planta de tratamiento de agua pierden su efectividad con el paso del tiempo. La tasa a la cual la contaminación pasa por los filtros hasta desembocar en un lago cercano se muestra en la tabla siguiente.
   (a) Estime la cantidad total de contaminación que entra al lago durante un periodo de 30 días.
   (b) Su respuesta del inciso (a) es sólo una estimación. Dé los límites (las estimaciones inferior y superior) a los cuales debe llegar la contaminación total. (Suponga que la razón de contaminación está creciendo continuamente.)

Día	0	6	12	18	24	30
Razón (kg/día)	7	8	10	13	18	35

2. La siguiente tabla muestra las emisiones E, de óxidos de nitrógeno en millones de toneladas métricas por año en Estados Unidos.[5] Sea t el número de años desde 1940 y $E = f(t)$.
   (a) ¿Cuáles son las unidades y el significado de $\int_0^{50} f(t)\,dt$?
   (b) Estime $\int_0^{50} f(t)\,dt$.

Año	1940	1950	1960	1970	1980	1990
E	6.9	9.4	13.0	18.5	20.9	19.6

[5] *Resumen estadístico de Estados Unidos*, 1992.

3. Usando la figura 5.55, estime $\int_{-3}^{5} f(x)dx$.

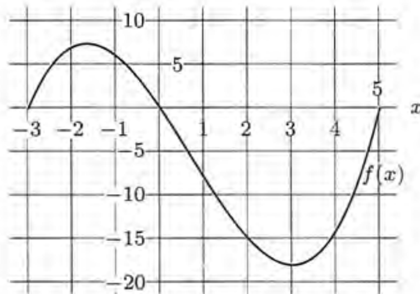


Figura 5.55.

4. **(a)** ¿Cuál es el área entre la curva de $f(x)$ en la figura 5.56 y el eje x, entre $x = 0$ y $x = 5$?

(b) ¿Cuál es el valor de $\int_{0}^{5} f(x)\,dx$?

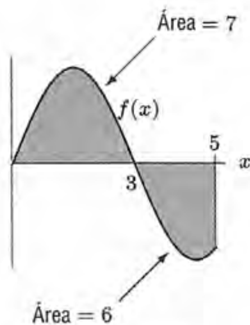


Figura 5.56.

Para los problemas del 5 al 10, use una calculadora o computadora para calcular la integral

5. $\displaystyle\int_{0}^{10} 2^{-x}\,dx$

6. $\displaystyle\int_{1}^{5} (x^2+1)\,dx$

7. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1+t^2}\,dt$

8. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2+1}{x^2-4}\,dx$

9. $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{-1}{(r+1)^2}\,dr$

10. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{z^2+1}{z}\,dz$

11. Use la siguiente tabla para estimar $\int_{0}^{25} f(x)dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	100	82	69	60	53	49

12. Un automóvil acelera suavemente de 0 a 60 mph en 10 segundos con la velocidad dada en la figura 5.57. Estime la distancia que recorre el auto durante el periodo de 10 segundos.

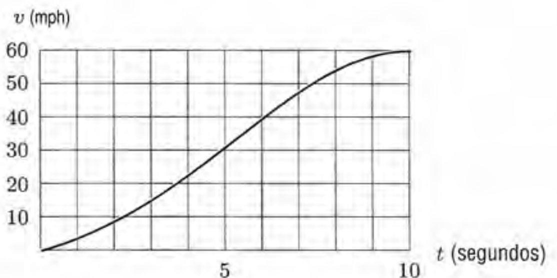


Figura 5.57.

13. La figura 5.58 muestra la tasa de crecimiento de dos árboles. Si ambos son de la misma altura en el tiempo $t = 0$, ¿cuál árbol es más alto después de cinco años? ¿Después de 10 años?

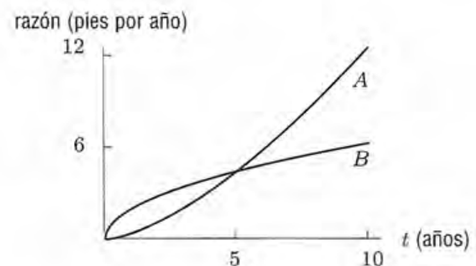


Figura 5.58.

14. Con t dado en segundos, la velocidad de un objeto está dada por $v(t) = 10 + 8t - t^2$ m/s.

(a) Exprese la distancia que recorre durante los primeros cinco segundos como una integral definida y como un área.

(b) Estime la distancia que recorre el objeto durante los primeros cinco segundos, mediante un estimado aproximado del área.

(c) Calcule la distancia recorrida.

15. Se está formando hielo en un estanque a una razón dada por

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{t}}{2} \text{ pulgadas por hora,}$$

donde y es el grosor del hielo en pulgadas en el tiempo t medido en horas desde que empezó a formarse el hielo.

(a) Calcule el grosor del hielo después de ocho horas.

(b) ¿A qué razón está aumentando el grosor del hielo después de ocho horas?

16. Desde 1987 el promedio de ingresos *per capita* en Estados Unidos, que era de $26,000, se ha incrementado a razón de

$$r(t) = 480(1.024)^t \text{ dólares por año.}$$

Evalúe el ingreso promedio *per capita* en 1995.

17. Use la figura 5.59 para ordenar las siguientes integrales en orden ascendente (de la más pequeña a la más grande). ¿Cuáles integrales son negativas y cuáles son positivas? Exponga razones.

I. $\int_a^b f(x)\,dx$ **II.** $\int_a^c f(x)\,dx$ **III.** $\int_a^e f(x)\,dx$
IV. $\int_b^e f(x)\,dx$ **V.** $\int_b^c f(x)\,dx$

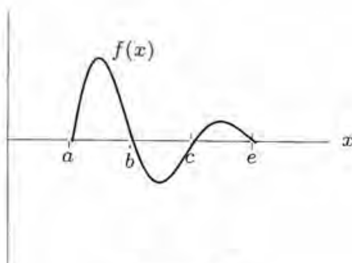


Figura 5.59.

18. El consumo de petróleo en el mundo está aumentando a una razón $f(t)$ constante (en miles de millones de barriles por año), donde t se mide en años desde el inicio de 1990.

(a) Escriba una integral definida que represente la cantidad total de petróleo usada entre el inicio de 1990 y principios de 1995.
(b) Suponga que $r = 32(1.05)^t$. Usando una suma por la izquierda con cinco subdivisiones, encuentre un valor aproximado para la cantidad total de petróleo usada entre el inicio de 1990 y el de 1995.
(c) Interprete cada uno de los cinco términos en la suma del inciso (b) en términos de consumo de petróleo.

19. El valor neto, $f(t)$, de una compañía está creciendo a razón de $f'(t) = 2{,}000 - 12t^2$ dólares por año, donde t está dado en años desde 1990. ¿Cómo cambia el valor neto de la compañía entre 1990 y 2000? Si el valor de la compañía era de $40,000, ¿cuál fue su valor en el año 2000?

20. La velocidad a la que usted viaja es $v(t) = \ln(t^2+1)$ para $0 \le t \le 3$. Calcule la distancia que recorre durante este tiempo.

21. La figura 5.60 muestra la velocidad durante un viaje que usted inicia desde su casa. La velocidad es positiva cuando se aleja de su casa y negativa cuando se acerca a su casa. ¿Dónde se encuentra al final de las cinco horas? ¿Cuándo está más lejos de su casa? ¿A qué distancia de su casa se encuentra en ese momento?

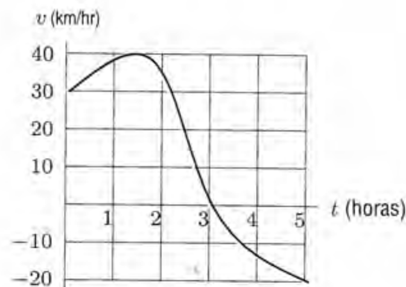


Figura 5.60.

22. Una ciclista pedalea a lo largo de un camino recto durante una hora a una velocidad v, como se muestra en la figura 5.61. Inicia a cinco kilómetros del lago y la velocidad es positiva cuando va hacia el lago. (**Nota:** Las rectas verticales sobre la gráfica están a intervalos de 10 minutos (1/6 hora).)

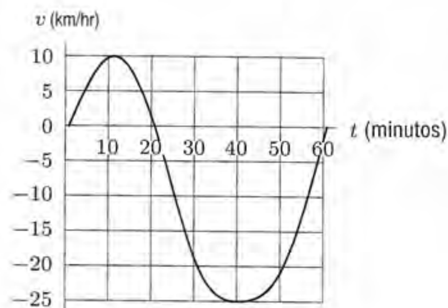


Figura 5.61.

(a) ¿La ciclista se da la vuelta? Si es así, ¿en qué momentos?
(b) ¿Cuándo va más rápido? ¿A qué velocidad va entonces? ¿Se acerca o se aleja del lago?
(c) ¿Cuándo está más cerca del lago? ¿Aproximadamente cuánto se acerca al lago?
(d) ¿Cuándo está más lejos del lago? ¿Aproximadamente a qué distancia está entonces del lago?

23. Una tasa de café calentada a 90 °C se pone a temperatura ambiente en un cuarto que está a 20 °C, cuando $t = 0$. La temperatura del café está cambiando a una razón de $r(t) = -7(0.9^t)$ °C por minuto, donde t es en minutos. Calcule la temperatura del café cuando $t = 10$.

24. La función costo marginal de un producto, en dólares por unidad, es $C'(q) = q^2 - 50q + 700$. Si los costos fijos son $500, encuentre el costo total de producir 50 unidades.

25. El costo total en dólares de producción de q unidades de un producto es $C(q)$. Los costos fijos son $20,000. El costo marginal es

$$C'(q) = 0.005q^2 - q + 56.$$

(a) En una gráfica de $C'(q)$, ilustre el costo variable total de producir 150 unidades.
(b) Calcule $C(150)$, el costo total de producir 150 unidades.
(c) Encuentre el valor de $C'(150)$, e interprete su respuesta en términos de costos de producción.
(d) Use los incisos (b) y (c) para evaluar $C(151)$.

26. Dibuje las curvas de concentración en plasma para dos medicamentos A y B, si el producto A tiene la mayor concentración pico, pero el producto B es absorbido más rápidamente y tiene una mayor biodisponibilidad total.

27. En el lugar de un vertedero de yodo radiactivo, los niveles de radiación fueron de cuatro veces el límite máximo aceptable; por consiguiente, se ordenó una evacuación. Si R_0 es el nivel de radiación inicial (en $t = 0$) y t es tiempo dado en horas, el nivel de radiación $R(t)$, en milirrems/hora, está dado por

$$R(t) = R_0(0.996)^t.$$

(a) ¿En qué tiempo alcanzará el lugar el nivel de radiación aceptable de 0.6 milirrems/hora?

(b) ¿Cuánta radiación total (en milirrems) se habrá emitido hasta ese tiempo?

28. Un automóvil se desplaza en línea recta a una velocidad, en pies/segundo, de

$$v(t) = 6 - 2t \quad \text{para } t \geq 0.$$

(a) Describa verbalmente el movimiento del automóvil. (¿Cuándo se mueve hacia adelante, hacia atrás, y así sucesivamente?)

(b) La posición del automóvil se mide desde su punto de partida. ¿Cuándo está lo más lejos hacia delante? ¿Y lo más lejos hacia atrás?

29. Suponga que salta de un avión y el paracaídas no se abre. Su velocidad hacia abajo (en metros por segundo) con t dado en segundos después de que saltó está aproximadamente dada por

$$v(t) = 49(1 - (0.8187)^t).$$

(a) Exprese la distancia que recorre en su caída en T segundos.

(b) Si usted salta desde 5,000 metros sobre el suelo, estime, usando prueba y error, ¿cuántos segundos cae antes de tocar tierra?

30. La razón de nacimientos, B, en nacimientos por hora, de una población de bacterias se muestra en la figura 5.62. La curva indicada por D da la tasa de mortalidad, en muertes por hora, de dicha población.

(a) Explique qué indica la forma de cada una de estas gráficas acerca de la población.

(b) Use las gráficas para encontrar el tiempo en el que la tasa neta de aumento de la población está al máximo.

(c) En el momento $t = 0$ la población tiene un tamaño N. Trace la gráfica del número total de nacimientos al tiempo t. También dibuje la gráfica del número de bacterias vivas en el tiempo t. Estime el momento en el que la población está al máximo.

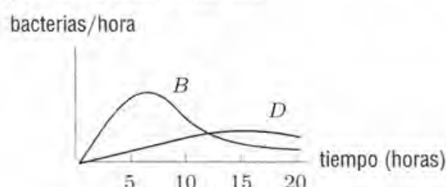


Figura 5.62.

31. Un automóvil acelera a una razón constante de 10 a 70 mph en un lapso de media hora. En la tabla se muestra el rendimiento del combustible (en millas por galón) a diferentes velocidades. Haga las estimaciones inferior y superior de la cantidad de combustible usada durante la media hora.

Velocidad (mph)	10	20	30	40	50	60	70
Rendimiento de combustible (millas por galón)	15	18	21	23	24	25	26

32. Los hermanos Montgolfier (Joseph y Etienne) fueron pioneros en el siglo XVIII en el campo de elevarse en globos de aire caliente. Si hubieran tenido instrumentos adecuados, podrían haber dejado un registro parecido al que se muestra en la figura 5.63, de uno de sus primeros experimentos. La gráfica muestra la velocidad vertical, v, siendo positivo el movimiento hacia arriba.

(a) ¿En qué intervalos fue positiva la aceleración? ¿Negativa?

(b) ¿Cuál fue la máxima altitud alcanzada y en qué tiempo?

(c) Este vuelo en particular finalizó en la cima de una colina. ¿Cómo sabe que así ocurrió, y cuál era la altura de la cima sobre el punto de partida?

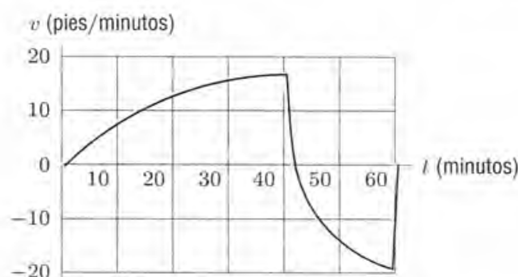


Figura 5.63.

33. Un ratón avanza y retrocede en un túnel recto, atraído por trozos de queso Cheddar que le son introducidos y retirados alternadamente desde los extremos (izquierdo y derecho) del túnel. En la figura 5.64 se muestra la gráfica de la velocidad, v, del ratón con la velocidad positiva correspondiendo al movimiento hacia el extremo derecho. Si se supone que el ratón inicia ($t = 0$) en el centro del túnel, use la gráfica para estimar los tiempos en los cuales:

(a) El ratón cambia de dirección.

(b) El ratón se mueve más rápidamente a la derecha; a la izquierda.

(c) El ratón está más lejos a la derecha del centro; más lejos a la izquierda.

(d) La rapidez del ratón (es decir, la magnitud de la velocidad) está disminuyendo.

(e) El ratón está en el centro del túnel.

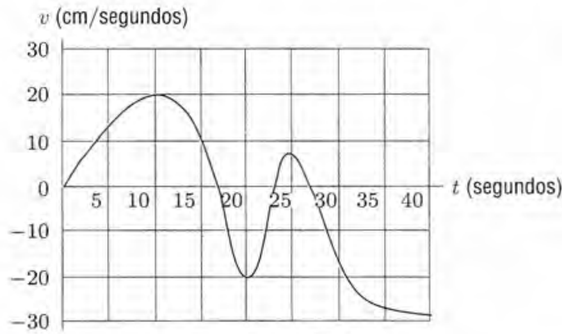


Figura 5.64.

34. Supongamos que alguien vierte contaminantes en un lago a una razón que aumenta a una tasa constante desde 10 kg/año hasta 50 kg/año hasta que se vierten en el lago un total de 270 kg. Dibuje una gráfica de la razón a la que ha llegado la contaminación al lago en función del tiempo. ¿Cuánto tiempo le tomó a esa persona verter los 270 kg?

PROYECTOS

1. **Bióxido de carbono en el agua de un estanque.** La actividad biológica en un estanque se refleja en la razón a la cual el bióxido de carbono, CO_2, se añade o se retira del agua. Las plantas extraen CO_2 del agua durante el día para la fotosíntesis y lo agregan durante la noche. Los animales agregan CO_2 al agua todo el tiempo mientras respiran. Los biólogos están interesados en saber cómo varía la razón neta a la que el CO_2 entra en un estanque durante el día. La figura 5.65 muestra esta cantidad como función de la hora del día.[6] La cantidad se mide en milimoles (mmol) de CO_2 por litro de agua por hora; el tiempo se mide en horas después del amanecer. Al amanecer, hubo 2.600 mmol de CO_2 por litro de agua.

   (a) ¿Qué puede concluir a partir del hecho de que la razón es negativa durante el día y positiva en la noche?

   (b) Algunos científicos han sugerido que las plantas respiran a un ritmo constante en la noche y que realizan la fotosíntesis a un ritmo también constante durante el día. ¿La figura 5.65 apoya esta opinión?

   (c) ¿Cuándo fue mínimo el contenido de CO_2 en el agua? ¿A cuánto bajó?

   (d) ¿Cuánto CO_2 fue liberado en el agua durante las 12 horas de la noche? Compare esta cantidad con la cantidad de CO_2 extraída del agua durante las 12 horas del día. ¿Cómo puede usted determinar, al observar la gráfica, si el CO_2 del charco está en equilibrio?

   (e) Estime el contenido de CO_2 en el agua a intervalos de tres horas durante el día. Use sus estimaciones para bosquejar una gráfica del contenido de CO_2 durante todo el día.

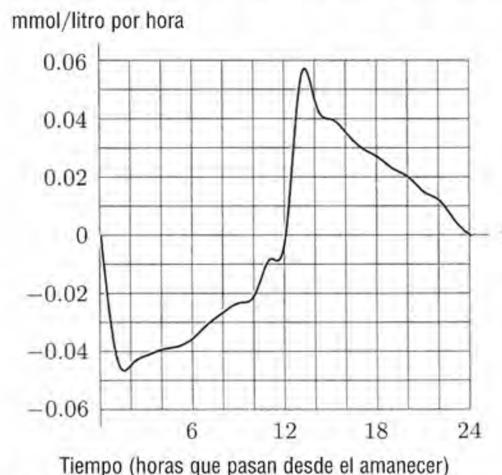


Figura 5.65. Razón a la cual está entrando el CO_2 en el estanque.

[6]Datos tomados de R. J. Beyers. *The Pattern of Photosynthesis and Respiration in Laboratory Microsystems* (Mem. 1, Ital., Idrobiol., 1965.)

2. Inundación en el Gran Cañón

La presa del cañón Glen en una región alta del Gran Cañón impide inundaciones naturales. En 1996 los científicos determinaron que era necesaria una inundación artificial para restaurar el equilibrio del medio ambiente. Se liberó agua de la presa a una razón controlada[7] que se muestra en la figura 5.66. Esta cantidad también muestra la razón de flujo de la última inundación natural en 1957.

(a) ¿A qué razón pasaba el agua a través de la presa en 1996 antes de la inundación artificial?

(b) ¿A qué razón pasaba el agua hacia el río en el periodo previo a la inundación en 1957?

(c) Estime las máximas razones de descarga para las inundaciones de 1996 y 1957.

(d) Aproximadamente, ¿cuánto duró la inundación de 1996? ¿Cuánto duró la inundación de 1957?

(e) Estime cuánta agua adicional pasó aguas abajo por el río en 1996 como resultado de la inundación artificial.

(f) Estime cuánta agua adicional pasó aguas abajo por el río en 1957 como resultado de la inundación.

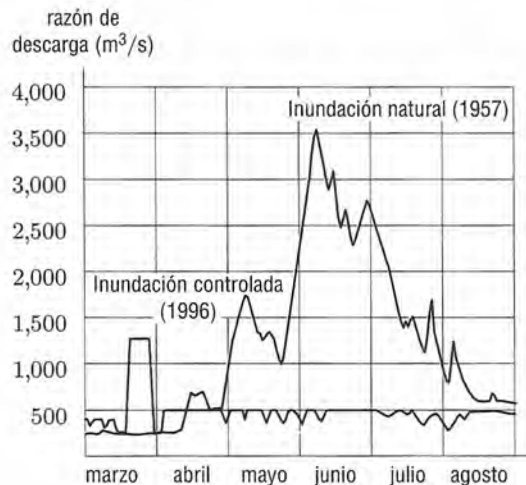


Figura 5.66.

[7] Adaptado de M. Collier, R. Webb, E. Andrews, "Experimental Flooding in Grand Canyon", en *Scientific American*, enero de 1997.

ENFOQUE TEÓRICO

TEOREMAS DE INTEGRALES DEFINIDAS

Segundo teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo nos dice que si tenemos una función F cuya derivada es una función f continua, entonces la integral definida de f está dada por

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Ahora veamos un punto de vista diferente. Si a es fija y el límite superior es x, entonces el valor de la integral es una función de x. Definimos una nueva función G por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Para visualizar G, supongamos que f es positiva y que $x > a$. Entonces $G(x)$ es el área bajo la curva de la gráfica de f en la figura 5.67. Si f es continua en un intervalo que contenga a, entonces se puede demostrar que G esta definida para toda x en ese intervalo.

Ahora consideremos la derivada de G. Usando la definición de la derivada,

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}.$$

Supongamos que f y h son positivas. Entonces es posible visualizar

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

y

$$G(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt$$

como áreas, lo que nos lleva a representar

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

como una diferencia de dos áreas.

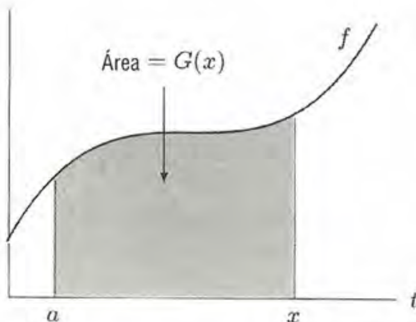


Figura 5.67. Representación de $G(x)$ como área.

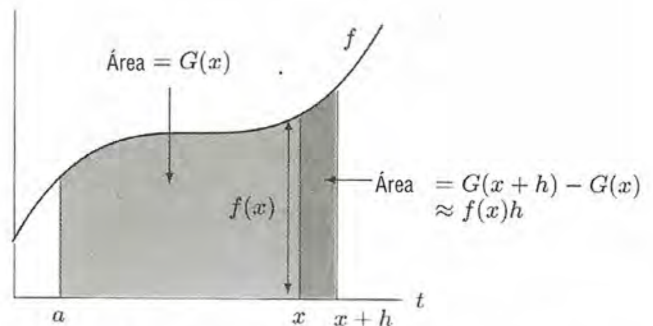


Figura 5.68. $G(x+h) - G(x)$ es el área de una región casi rectangular.

De la figura 5.68 vemos que, si h es pequeña, $G(x+h) - G(x)$ es casi el área de un rectángulo de altura $f(x)$ y ancho h (sombreado más oscuro en la figura 5.68), de modo que tenemos

$$G(x+h) - G(x) \approx f(x)h,$$

de donde

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} \approx f(x).$$

El mismo resultado se cumple cuando h es negativa, lo cual sugiere que

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x).$$

Este resultado es otra forma del teorema fundamental del cálculo. Por lo general, se expresa como sigue:

Segundo teorema fundamental del cálculo

Si f es una función continua en un intervalo, y si a es cualquier número en ese intervalo, entonces la función G definida por

$$G'(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

tiene derivada f, esto es, $G'(x) = f(x)$

Propiedades de la integral definida

En este capítulo hemos usado las siguientes propiedades para descomponer integrales definidas.

Sumas y múltiplos de integrales definidas

Si a, b y c son cualesquier números y f y g son funciones continuas, entonces

1. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$

2. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$

Expresado en palabras:

1. La integral de a a c más la integral de c a b es la integral de a a b.

2. La integral de la suma (o diferencia) de dos funciones es la suma (o diferencia) de sus integrales.

3. La integral de una constante multiplicada por una función es esa constante multiplicada por la integral de la función.

Estas propiedades se pueden visualizar mejor si se consideran las integrales como áreas, o como el límite de la suma de áreas de rectángulos.

Problemas para el segundo teorema fundamenal del cálculo

Para los problemas del 1 al 4, encuentre $G'(x)$.

1. $G(x) = \int_a^x t^3\, dt$

2. $G(x) = \int_a^x 3^t\, dt$

3. $G(x) = \int_a^x te^t\, dt$

4. $G(x) = \int_a^x \ln y\, dy$

5. Sea $F(b) = \int_0^b 2^x\, dx$.

(a) ¿Cuál es $F(0)$?
(b) ¿El valor de F aumenta o disminuye a medida que b aumenta?(Suponga que $b \geq 0$.)
(c) Calcule $F(1)$, $F(2)$ y $F(3)$.

6. Haga una tabla de valores para $x = 0, 0.5, 1.0, 1.5$ y 2.0 de la función $I(x) = \int_0^x \sqrt{t^4+1}\, dt$.

7. Suponga que $F'(t) = \text{sen}\, t \cos t$ y $F(0) = 1$. Encuentre $F(b)$ para $b = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ y 3.

Sea $\int_a^b f(x)\, dx = 8$, $\int_a^b (f(x))^2\, dx = 12$, $\int_a^b g(t)\, dt = 2$, y $\int_a^b (g(t))^2\, dt = 3$. Encuentre las integrales en los problemas del 8 al 11.

8. $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx$

9. $\int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) dx$

10. $\int_a^b (f(x))^2\, dx - (\int_a^b f(x)\, dx)^2$

11. $\int_a^b cf(z)\, dz$

Capítulo 6

USO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

En el capítulo 5 vimos la forma en que puede utilizarse una integral definida para calcular un área o un cambio total. En este capítulo, utilizaremos las integrales definidas para resolver problemas que impliquen valor promedio, excedente del consumidor y del productor, valor presente y futuro, así como crecimiento poblacional. En cada caso, iniciaremos con la evaluación de la cantidad por medio de una suma de Riemann.

6.1 VALOR PROMEDIO

En esta sección mostraremos la forma de interpretar la integral definida como el valor promedio de una función.

Integral definida como promedio

Sabemos cómo determinar el promedio de n números: sumarlos y dividirlos entre n. Pero, ¿cómo encontramos el valor promedio de una función que varía continuamente? Consideremos un ejemplo. Supongamos que $f(t)$ es la temperatura en el tiempo t, medida en horas desde la medianoche, y que deseamos calcular la temperatura promedio a lo largo de un periodo de 24 horas. Una forma de comenzar sería promediar las temperaturas en n tiempos igualmente espaciados, $t_1, t_2, \ldots, t_n$, durante el día.

$$\text{Temperatura promedio} \approx \frac{f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_n)}{n}.$$

Entre más grande sea n se tendrá una mejor aproximación. Podemos reescribir esta expresión como una suma de Riemann sobre el intervalo $0 \leq t \leq 24$ si utilizamos el hecho de que $\Delta t = 24/n$, de modo que $n = 24/\Delta t$:

$$\begin{aligned}\text{Temperatura promedio} &\approx \frac{f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_n)}{24/\Delta t} \\ &= \frac{f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t}{24} \\ &= \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t.\end{aligned}$$

Cuando $n \longrightarrow \infty$, la suma de Riemann tiende a una integral y la aproximación mejora. Esperamos que

$$\begin{aligned}\text{Temperatura promedio} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t \\ &= \frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Al generalizar para cualquier función f, si $a < b$, tenemos

$$\begin{array}{c}\text{Valor promedio de } f \\ \text{en el intervalo de } a \text{ a } b\end{array} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Las unidades de $f(x)$ son las mismas que las unidades del valor promedio de $f(x)$.

Cómo visualizar el promedio en una gráfica

La definición del valor promedio nos indica que

$$(\text{Valor promedio de } f)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Interpretemos la integral como el área bajo la curva de f. Si $f(x)$ es positiva, entonces el valor promedio de f es la altura de un rectángulo cuya base es $(b - a)$ y cuya área es la misma que el área entre la gráfica de f y el eje x (véase la figura 6.1).

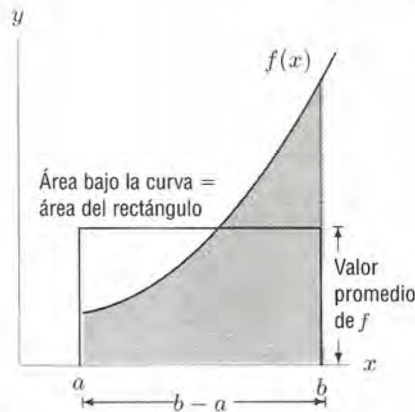


Figura 6.1. Área y valor promedio.

Ejemplo 1 Suponga que $C(t)$ representa el costo diario de calefacción de su casa, medido en dólares por día, donde t es el tiempo dado en días y $t = 0$ corresponde al primero de enero del 2002. Interprete $\dfrac{1}{90-0}\displaystyle\int_0^{90} C(t)\,dt$.

Solución Las unidades de la integral $\int_0^{90} C(t)dt$ son (dólares/día)×(días) = dólares. La integral representa el costo total en dólares para la calefacción de su hogar en los primeros 90 días del 2002, es decir, los meses de enero, febrero y marzo. La expresión $\frac{1}{90-0}\int_0^{90} C(t)\,dt$ representa el costo promedio por día para la calefacción de su casa durante los primeros 90 días del 2002. Éste se mide en (1/días) × (dólares) = dólares/día, las mismas unidades que $C(t)$.

Ejemplo 2 En la página 32 vimos que se podía modelar la población de México por medio de la función

$$P = f(t) = 67.38(1.026)^t,$$

donde P está dado en millones de habitantes y t está medido en años a partir de 1980. Use esta función para pronosticar la población promedio de México entre los años 2000 y 2020.

Solución Deseamos encontrar el valor promedio de $f(t)$ entre $t = 20$ y $t = 40$. Usando una calculadora para evaluar la integral, obtenemos

$$\text{Población promedio} = \frac{1}{40-20}\int_{20}^{40} f(t)\,dt = \frac{1}{20}(2{,}942.66) = 147.1.$$

Se estima que la población promedio de México entre el 2000 y el 2020 será de aproximadamente 147 millones de habitantes.

Ejemplo 3 **(a)** Para la función $f(x)$, cuya gráfica se muestra en la figura 6.2, evalúe $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$.

(b) Encuentre el valor promedio de $f(x)$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 5$. Compruebe gráficamente su respuesta.

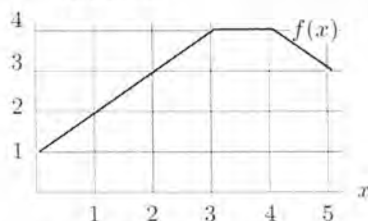


Figura 6.2. Estime $\int_0^5 f(x)dx$.

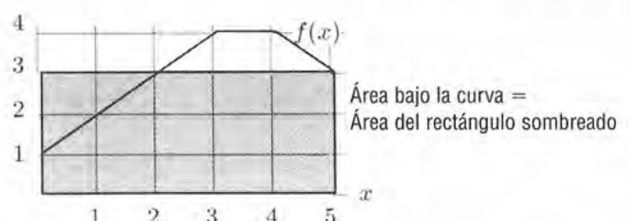


Figura 6.3. El valor promedio de $f(x)$ es 3.

Solución **(a)** Como $f(x) \geq 0$, la integral definida es el área de la región que está bajo la curva de $f(x)$ entre $x = 0$ y $x = 5$. La figura 6.2 muestra que esta región consta de 13 cuadrados completos de la malla y cuatro mitades de cuadrados, cada uno de área 1, para un área total de 15

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 15.$$

(b) El valor promedio de $f(x)$ en el intervalo de 0 a 5 está dado por

$$\text{Valor promedio} = \frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)\,dx = \frac{1}{5}(15) = 3.$$

Para comprobar gráficamente la respuesta, trace una recta horizontal en $y = 3$ sobre la gráfica de $f(x)$ (véase la figura 6.3). Después, observe que, entre $x = 0$ y $x = 5$, el área bajo la curva de $f(x)$ es igual al área del rectángulo con altura 3.

Problemas para la sección 6.1

1. ¿Cuál es el valor promedio de la función f en el intervalo $1 \leq x \leq 6$ de la figura 6.4?

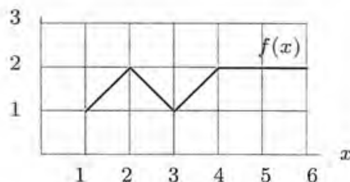


Figura 6.4.

2. Utilice la figura 6.5 para evaluar lo siguiente:

(a) La integral $\int_0^5 f(x)\,dx$.

(b) El valor promedio de f entre $x = 0$ y $x = 5$ al estimar visualmente la altura promedio.

(c) El valor promedio de f entre $x = 0$ y $x = 5$, usando su respuesta al inciso (a).

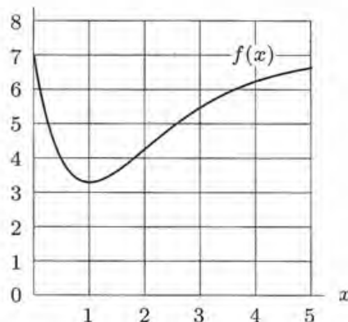


Figura 6.5.

3. Encuentre el valor promedio de $g(t) = 1 + t$ en el intervalo $[0, 2]$.

4. Encuentre el valor promedio de $g(t) = 2^t$ en el intervalo $[0, 10]$.

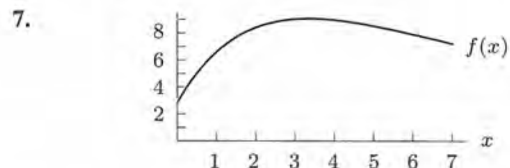
5. Encuentre el valor promedio de $g(t) = e^t$ en el intervalo $0 \leq t \leq 10$.

6. **(a)** ¿Cuál es el valor promedio de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$?

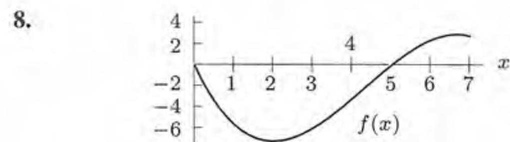
(b) ¿Cómo puede usted saber si el valor promedio es mayor o menor a 0.5 sin hacer ningún cálculo?

En los problemas 7 y 8 estime el valor promedio de la función entre $x = 0$ y $x = 7$.

7.



8.



9. Si t se mide en días desde el primero de junio, el inventario $I(t)$ de un artículo de un almacén está dado por

$$I(t) = 5{,}000(0.9)^t.$$

(a) Encuentre el inventario promedio del almacén durante 90 días después del primero de junio.

(b) Trace una gráfica de la función $I(t)$ e ilustre gráficamente el promedio.

10. Un taller mecánico ordena 100 cajas de aceite para motor cada seis meses. Se puede hacer modelar el número de cajas de aceite que quedan t meses después de que se recibe el pedido, mediante

$$f(t) = 100e^{-0.5t}.$$

(a) ¿Cuántas cajas hay al inicio del periodo de seis meses? ¿Cuántas cajas quedarán al final del periodo de seis meses?

(b) Encuentre el número promedio de cajas en el inventario en el periodo de seis meses.

11. El valor, V, de una lámpara de Tiffany, valuada en \$225 en 1965, aumenta 15% cada año. Su valor en dólares t años después de 1965 se encuentra mediante

$$V = 225(1.15)^t.$$

Encuentre el valor promedio de la lámpara en el periodo 1965–2000.

12. Se predice que la población mundial t años después del 2000 será de $P = 6.1e^{0.0125t}$ miles de millones.

(a) ¿Cuánta población se pronostica que habrá en el 2010?
(b) ¿Cuál es la población promedio que se pronostica habrá entre el 2000 y el 2010?

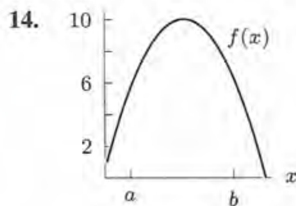
13. La cantidad de cierta sustancia radiactiva en el tiempo t se encuentra mediante

$$Q(t) = 4(0.96)^t \text{ gramos.}$$

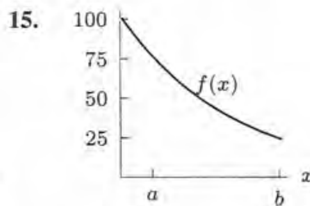
(a) Encuentre $Q(10)$ y $Q(20)$.
(b) Encuentre el promedio de $Q(10)$ y $Q(20)$.
(c) Encuentre el valor promedio de $Q(t)$ en el intervalo $10 \leq t \leq 20$.
(d) Utilice la gráfica de $Q(t)$ para explicar las cantidades relativas en sus respuestas a los incisos (b) y (c).

En los problemas 14 y 15 estime el valor promedio de la función $f(x)$ en el intervalo de $x = a$ a $x = b$.

14.



15.



16. Para la función par f de la figura 6.6, escriba una expresión donde aparezca una o más integrales definidas que denoten:

(a) El valor promedio de f para $0 \leq x \leq 5$.
(b) El valor promedio de $|f|$ para $0 \leq x \leq 5$.

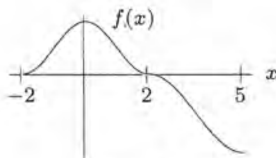


Figura 6.6.

17. La función f en la figura 6.6 es simétrica respecto al eje y. Considere el valor promedio de f en los siguientes intervalos:

I. $0 \leq x \leq 1$ **II.** $0 \leq x \leq 2$
III. $0 \leq x \leq 5$ **IV.** $-2 \leq x \leq 2$

(a) ¿En qué intervalo es mínimo el valor promedio de f?
(b) ¿En qué intervalo es máximo el valor promedio de f?
(c) ¿En qué par de intervalos son iguales los valores promedio?

18. Utilizando la figura 6.7, ordene los siguientes números de menor a mayor:

(a) $f'(1)$.
(b) El valor promedio de f sobre $0 \leq x \leq 4$.
(c) $\int_0^1 f(x)dx$.

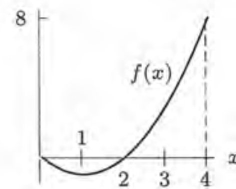


Figura 6.7.

19. Utilizando la figura 6.8, ordene los siguientes números de menor a mayor:

(a) $f'(1)$.
(b) El valor promedio de $f(x)$ sobre $0 \leq x \leq a$.
(c) El valor promedio de la razón de cambio de $f(x)$, para $0 \leq x \leq a$.
(d) $\int_0^a f(x)\,dx$.

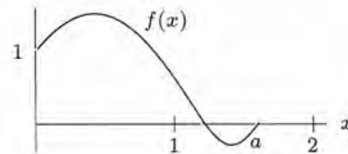


Figura 6.8.

6.2 EXCEDENTES DEL CONSUMIDOR Y DEL PRODUCTOR

Curvas de oferta y demanda

Como vimos en el capítulo 1, la cantidad de cierto artículo producido y vendido se puede describir con las curvas de oferta y demanda del artículo. La *curva de oferta* muestra qué cantidad, q, del artículo

venden los productores a diferentes precios, p. El comportamiento del consumidor se refleja en la *curva de demanda*, que muestra la cantidad de artículos comprados a diferentes precios. Véase la figura 6.9.

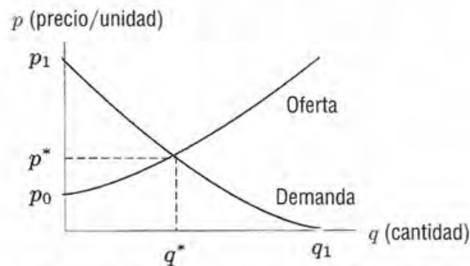


Figura 6.9. Curvas de oferta y demanda.

Se supone que el mercado se estabiliza en el *precio de equilibrio* p^* y la *cantidad de equilibrio* q^* donde se cruzan ambas curvas. En equilibrio, se produce y se vende una cantidad q^* de un artículo a un precio de p^* cada uno.

Excedente del consumidor y del productor

Observe que, en equilibrio, cierto número de consumidores han comprado el artículo a un precio menor del que estarían dispuestos a pagar. (Por ejemplo, hay algunos consumidores que hubieran estado dispuestos a pagar precios hasta p_1.) Del mismo modo, hay algunos proveedores que hubieran estado dispuestos a producir el artículo a un menor precio (de hecho, hasta p_0). Definimos los siguientes términos:

- El **excedente del consumidor** mide la ganancia de los consumidores por la compra. Es la cantidad total que ganan los consumidores al comprar el artículo al precio actual, en lugar de haberlo comprado al precio que hubieran estado dispuestos a pagar.
- El **excedente del productor** mide la ganancia de los proveedores por la venta. Es la cantidad total que ganan los productores por vender al precio actual en lugar de al precio que hubieran estado dispuestos a aceptar.

En ausencia de controles de precio, se supone que el precio actual es el precio de equilibrio.

Tanto los consumidores como los productores se han enriquecido con la compraventa. El excedente del consumidor y del productor mide la riqueza de ambos.

Supongamos que todos los consumidores compran el artículo al precio máximo que están dispuestos a pagar. Subdivida el intervalo entre 0 y q^* en intervalos de longitud Δq. La figura 6.10 muestra que una cantidad Δq de artículos se venden a un precio cercano a p_1, otra Δq se vende a un precio poco menor de alrededor de p_2, la siguiente Δq a un precio cercano a p_3 y así sucesivamente. Por consiguiente, el gasto total de los consumidores es de aproximadamente

$$p_1\Delta q + p_2\Delta q + p_3\Delta q + \cdots = \sum p_i\Delta q.$$

Si la curva de demanda tiene la ecuación[1] $p = f(q)$, y si todos los consumidores que estaban dispuestos a pagar un precio mayor que p^* pagaron lo que estaban dispuestos a pagar, entonces, a medida que $\Delta q \to 0$, tendríamos

$$\begin{array}{c}\text{Gasto del}\\ \text{consumidor}\end{array} = \int_0^{q^*} f(q)\,dq = \begin{array}{c}\text{Área bajo la curva de}\\ \text{demanda de 0 a } q^*.\end{array}$$

[1]Observe que aquí p se escribe como función de q.

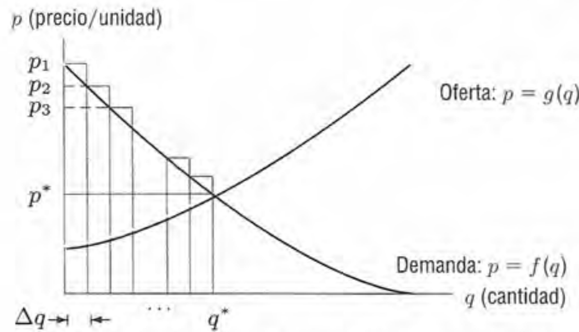


Figura 6.10. Cálculo del excedente del consumidor.

Si todos los artículos se venden al precio de equilibrio, el gasto real de los consumidores es sólo p^*q^*, que es el área del rectángulo entre el eje q y la recta $p = p^*$ que va de $q = 0$ a $q = q^*$. El excedente del consumidor es la diferencia entre el gasto total del consumidor, si todos los consumidores pagaran el precio máximo que están dispuestos a pagar, y el gasto real del consumidor, si todos los consumidores pagaran el precio real. El excedente del consumidor se representa por el área de la figura 6.11. Similarmente, el excedente del consumidor se representa en el área de la figura 6.12 (véanse los problemas 11 y 12). Por tanto:

Excedente del consumidor al precio p^*	=	Área entre la curva de demanda y la recta horizontal en p^*.
Excedente del productor al precio p^*	=	Área entre la curva de oferta y la recta horizontal en p^*.

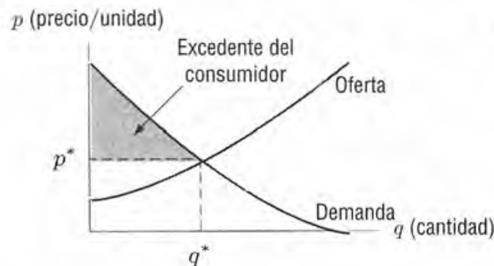


Figura 6.11. Excedente del consumidor.

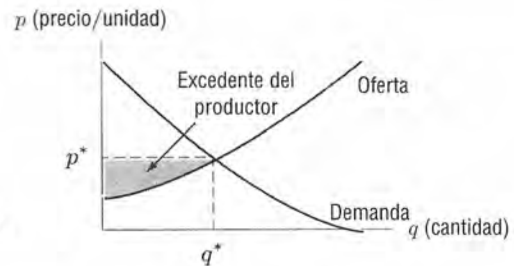


Figura 6.12. Excedente del productor.

Ejemplo 1 Las curvas de oferta y demanda de un producto se muestran en la figura 6.13.

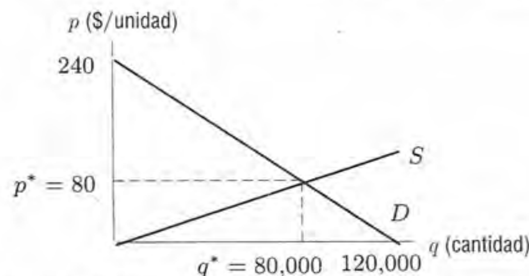


Figura 6.13. Curvas de oferta y demanda de un producto.

(a) ¿Cuál es el precio y la cantidad de equilibrio?
(b) Al precio de equilibrio, calcule e interprete los excedentes del consumidor y del productor.

Solución (a) El precio de equilibrio es $p^* = \$80$ y la cantidad de equilibrio es $q^* = 80{,}000$ unidades.

(b) El excedente del consumidor es el área bajo la curva de demanda y arriba de la recta $p = 80$ (véase la figura 6.14). Tenemos

$$\text{Excedente del consumidor} = \text{área del triángulo} = \frac{1}{2}\ \text{Base} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{2}80{,}000 \cdot 160 = \$6{,}400{,}000.$$

Esto indica que los consumidores ganan \$6,400,000 cuando compran artículos al precio de equilibrio en lugar del precio que estarían dispuestos a pagar.

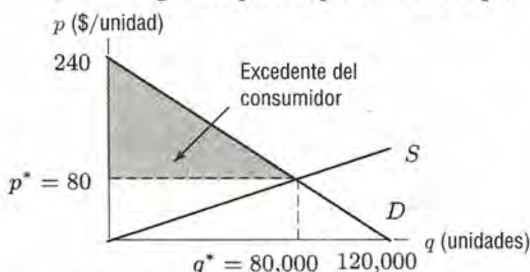


Figura 6.14. Excedente del consumidor.

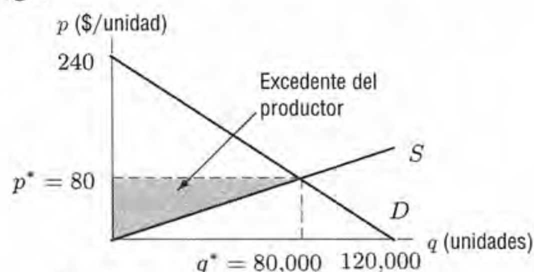


Figura 6.15. Excedente del productor.

El excedente del productor es el área arriba de la curva de oferta y debajo de la recta $p = 80$ (véase la figura 6.15). Tenemos

$$\text{Excedente del productor} = \text{área del triángulo} = \frac{1}{2}\ \text{Base} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{2}80{,}000 \cdot 80 = \$3{,}200{,}000.$$

En consecuencia, los productores ganan \$3,200,000 al vender los artículos al precio de equilibrio en lugar del precio al que estarían dispuestos a venderlos.

Controles de salarios y precios

En un libre mercado, por lo general el precio de un producto se mueve al precio de equilibrio, a menos que fuerzas externas mantengan el precio artificialmente alto o bajo. Por ejemplo, el control de las rentas mantiene los precios abajo del valor de mercado, mientras que los precios por convenio o la ley de salario mínimo hacen que los precios suban por encima del valor de mercado. ¿Qué pasa al excedente del productor y del consumidor a precios fuera de equilibrio?

Ejemplo 2 La industria lechera tiene precios por convenio: el gobierno ha fijado precios artificialmente altos a los productos lácteos. ¿Qué efecto tiene forzar hacia arriba el precio a p^+, sobre el precio de equilibrio, en:

(a) el excedente del consumidor? (b) el excedente del productor?

(c) las ganancias totales por la compraventa (es decir, excedente del consumidor + excedente del productor)?

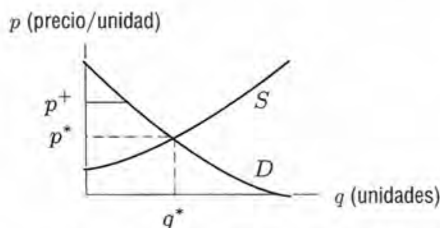


Figura 6.16. ¿Cuál es el efecto del precio artificialmente alto, p^+, en el excedente del consumidor y del productor? (q^* y p^* son valores de equilibrio).

Solución (a) En la figura 6.16 se muestra una posible gráfica de las curvas de oferta y de demanda de la industria lechera. Suponga que el precio se fija en p^+, arriba del precio de equilibrio. El excedente del consumidor

es la diferencia entre la cantidad (p^+) que pagaron los consumidores y la cantidad que hubieran estado dispuestos a pagar (la que indica la curva de demanda). Ésta es el área sombreada en la figura 6.17. Este excedente del consumidor es menor que el excedente del consumidor al precio de equilibrio, que se muestra en la figura 6.18.

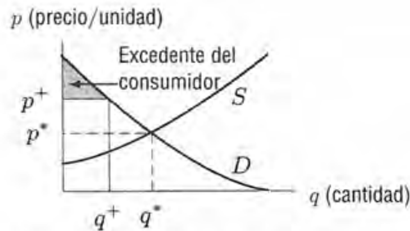


Figura 6.17. Excedente del consumidor: precio artificial.

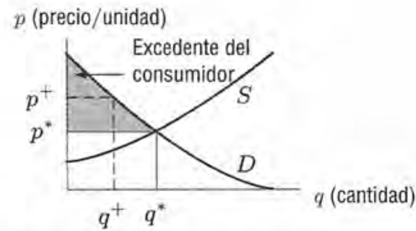


Figura 6.18. Excedente del consumidor: precio de equilibrio.

(b) A un precio de p^+, la cantidad vendida, q^+, es menor que la que hubiera sido al precio de equilibrio. El excedente del productor está representado por el área entre p^+ y la curva de oferta de esta demanda reducida. Esta área está sombreada en la figura 6.19. Compare este excedente del productor (a un precio artificialmente alto) con el excedente del productor de la figura 6.20 (al precio de equilibrio). En este caso, el excedente del productor parece mayor al precio artificial que al precio de equilibrio. (Sin embargo, curvas diferentes de oferta y de demanda pueden llevar a respuestas diferentes.)

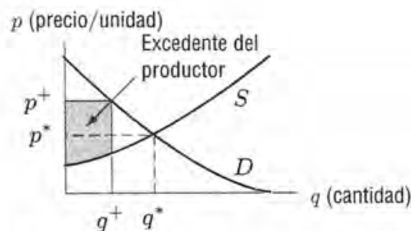


Figura 6.19. Excedente del productor: precio artificial.

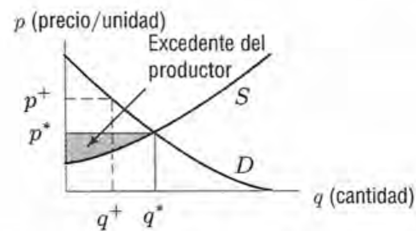


Figura 6.20. Excedente del productor: precio de equilibrio.

(c) Las ganancias totales de la compraventa (excedente del consumidor + excedente del productor) al precio de p^+ es el área sombreada en la figura 6.21. Las ganancias totales de la compraventa al precio de equilibrio de p^* es el área sombreada de la figura 6.22. Bajo condiciones de precios artificiales, disminuyen las ganancias totales de la compraventa. El efecto financiero total del precio artificialmente alto sobre todos los productores y consumidores combinados es negativo.

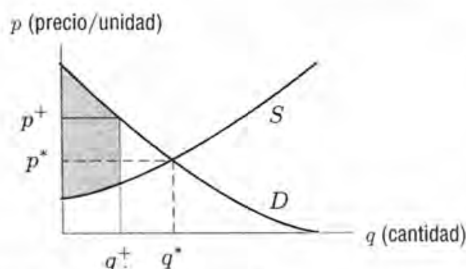


Figura 6.21. Ganancias totales por la compraventa: precio artificial.

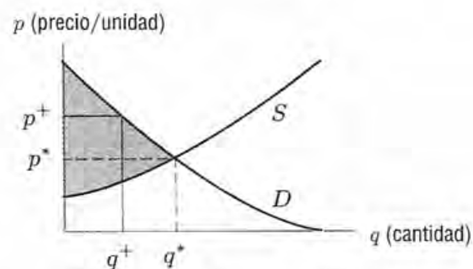


Figura 6.22. Ganancias totales por la compraventa: precio de equilibrio.

Problemas para la sección 6.2

1. Las curvas de oferta y demanda de un producto se ilustran en la figura 6.23.

(a) Estime el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio.

(b) Estime el excedente del consumidor y del productor. Sombréelos.

(c) ¿Cuáles son las ganancias totales por la compraventa de este producto?

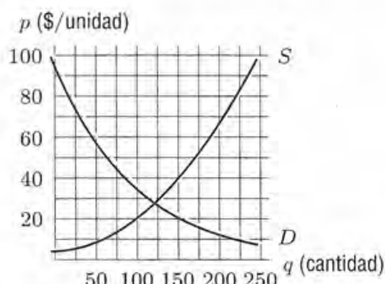


Figura 6.23.

2. La figura 6.23 muestra las curvas de oferta y demanda de un producto. Se fija artificialmente un precio de $40.

(a) Al precio de $40, calcule el excedente del consumidor, el del productor y las ganancias totales de la compraventa.

(b) Compare sus respuestas en este problema con sus respuestas al problema 1. Analice el efecto que, en este caso, tienen los controles de precios sobre el excedente del consumidor, el excedente del productor y las ganancias totales por la compraventa.

3. **(a)** Estime el precio y la cantidad de equilibrio para las curvas de oferta y demanda que se ilustran en la figura 6.24.

(b) Estime los excedentes del consumidor y del productor.

(c) Se fija de forma artificial un precio menor $p^- = 4$ dólares por unidad. Determine los excedentes del consumidor y del productor a dicho precio. Compare sus respuestas con los excedentes del consumidor y del productor al precio de equilibrio.

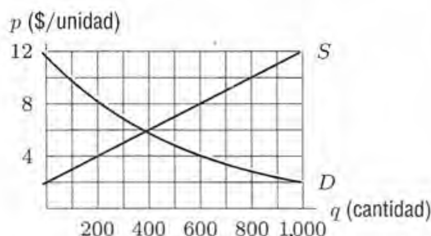


Figura 6.24.

4. La curva de demanda de un producto está dada por la ecuación $p = 20e^{-0.002q}$ y la curva de oferta está dada por la ecuación $p = 0.02q + 1$ para $0 \leq q \leq 1{,}000$, donde q es la cantidad y p es el precio en $/unidad.

(a) ¿Cuál es mayor, el precio al que se venden 300 artículos o el precio al que se demandan 300 artículos? Encuentre ambos precios.

(b) Haga una gráfica de las curvas de oferta y demanda. Estime el precio y la cantidad de equilibrio.

(c) Empleando el precio y la cantidad de equilibrio, calcule e interprete los excedentes del consumidor y del productor.

5. En las tablas 6.1 y 6.2 se muestran datos de oferta y demanda.

(a) ¿Cuál tabla representa la oferta y cuál la demanda?

(b) Estime el precio y la cantidad de equilibrio.

(c) Estime los excedentes del consumidor y del productor.

Tabla 6.1

q (cantidad)	0	100	200	300	400	500	600
p ($/unidad)	60	50	41	32	25	20	17

Tabla 6.2

q (cantidad)	0	100	200	300	400	500	600
p ($/unidad)	10	14	18	22	25	28	34

6. La curva de demanda de un producto está dada por la ecuación $p = 100e^{-0.008q}$ y la curva de oferta está dada por la ecuación $p = 4\sqrt{q} + 10$ para $0 \leq q \leq 500$, donde q es la cantidad y p es el precio en dólares por unidad.

(a) A un precio de $50, ¿qué cantidad estarán dispuestos a comprar los consumidores y qué cantidad estarán dispuestos a vender los productores? ¿El mercado subirá o bajará los precios?

(b) Determine el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio. Su respuesta al inciso (a), ¿apoya el hecho de que las fuerzas del mercado tenderán a acercar los precios al precio de equilibrio?

(c) Al precio de equilibrio, calcule e interprete el excedente del consumidor y el del productor.

7. En mayo de 1991, la revista *Car and Driver* describió un automóvil Jaguar que se vendió en $980,000. A ese precio sólo se habían vendido 50 unidades. Se estima que se podrían haber vendido 350 si el precio hubiera sido de $560,000. Suponiendo que la curva de demanda es una recta, y que $560,000 y 350 son el precio y la cantidad de equilibrio, respectivamente, encuentre el excedente del consumidor al precio de equilibrio.

8. Trace posibles curvas de oferta y de demanda en las que el excedente del consumidor al precio de equilibrio sea:

(a) mayor que el excedente del productor.

(b) menor que el excedente del productor.

9. Demuestre gráficamente que las ganancias máximas totales del comercio están en el precio de equilibrio. Haga esto mostrando que si fuerzas externas mantienen artificialmente alto o bajo al precio, las ganancias totales de la compraventa (excedente del consumidor + excedente del productor) son menores que el precio de equilibrio.

10. Los controles de renta de departamentos son un ejemplo de controles de precios de una mercancía. Mantienen el precio artificialmente bajo (abajo del precio de equilibrio). Trace una gráfica de las curvas de oferta y demanda y marque en ella un precio p^- abajo del precio de equilibrio. ¿Qué efecto tiene forzar hacia abajo el precio a p^- sobre:

(a) el excedente del productor?

(b) el excedente del consumidor?

(c) las ganancias totales de compraventa (excedente del consumidor + excedente del productor)?

En los problemas del 11 al 13, las curvas de oferta y demanda tienen las ecuaciones $p = S(q)$ y $p = D(q)$, respectivamente, con el equilibrio en (q^*, p^*).

11. Usando sumas de Riemann, explique la importancia económica de $\int_0^{q^*} S(q)\,dq$ para los productores.

12. Empleando sumas de Riemann, dé una interpretación del excedente del productor, $\int_0^{q^*} (p^* - S(q))\,dq$ que sea análoga a la interpretación del excedente del consumidor.

13. Tomando como base las figuras 6.11 y 6.12, de la página 261, indique las regiones que representen las siguientes cantidades, y explique su significado económico:

(a) $p^* q^*$ **(b)** $\int_0^{q^*} D(q)\,dq$

(c) $\int_0^{q^*} S(q)\,dq$ **(d)** $\int_0^{q^*} D(q)\,dq - p^* q^*$

(e) $p^* q^* - \int_0^{q^*} S(q)\,dq$ **(f)** $\int_0^{q^*} (D(q) - S(q))\,dq$

6.3 VALOR PRESENTE Y FUTURO

En el capítulo 1, en la página 47, introdujimos el valor presente y futuro de un solo pago. En esta sección, veremos cómo calcular el valor presente y futuro de una serie o flujo continuo de pagos.

Flujo de ingresos

Cuando consideramos pagos que se hacen a una persona, o que ésta hace, con frecuencia se piensa en pagos *discretos*, es decir, pagos que se llevan a cabo en momentos específicos. No obstante, podemos pensar en pagos *continuos* que realiza una empresa. Por ejemplo, los ingresos que obtiene una gran empresa, ingresan esencialmente todo el tiempo y, por tanto, se pueden representar como un *flujo de ingresos* continuo. Como la razón a la que se ganan los ingresos puede variar en el tiempo, el flujo de ingresos se puede describir con

$$S(t) \text{ dólares/año.}$$

Observe que $S(t)$ es una *razón* a la que se realizan los pagos (por ejemplo, sus unidades son dólares por año) y que la razón depende del tiempo, t, por lo general medido en años a partir del presente.

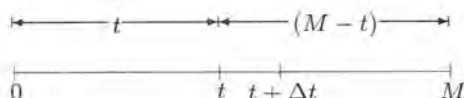
Valores presente y futuro de un flujo de ingresos

En la misma forma en que podemos encontrar los valores presente y futuro de un solo pago, así podemos hallar los valores presente y futuro de un flujo de pagos. Al igual que antes, el valor futuro representa la cantidad total de dinero que tendríamos en una fecha futura si depositamos el ingreso de un flujo de pagos en una cuenta bancaria a medida que lo recibamos y lo dejemos ganar intereses hasta esa fecha futura. El valor presente representa la cantidad de dinero que tendríamos que depositar hoy (en una cuenta bancaria que genere intereses) con el fin de igualar lo que obtendríamos del flujo de ingresos en esa fecha futura.

Cuando trabajamos con un flujo de ingresos continuo, suponemos que el interés se compone continuamente. Si la tasa de interés es r, el valor presente, P, de un depósito, B, hecho a t años en el futuro es

$$P = Be^{-rt}.$$

Suponga que deseamos calcular el valor presente del flujo de ingresos descrito por una cantidad de $S(t)$ dólares por año, y que estamos interesados en el periodo desde ahora hasta M años en el futuro. Con el propósito de utilizar lo que sabemos sobre los depósitos individuales para calcular el valor presente de un flujo de ingresos, primero debemos dividir el flujo en muchos depósitos pequeños, cada uno de los cuales se realiza en aproximadamente un instante. Dividimos el intervalo $0 \le t \le M$ en subintervalos, cada uno de longitud Δt:



Suponiendo que Δt es pequeña, la razón, $S(t)$, a la que se hacen los depósitos no varía demasiado dentro de un subintervalo. En consecuencia, entre t y $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned}\text{Cantidad pagada} &\approx \text{razón de depósitos} \times \text{tiempo}\\ &\approx (S(t)\ \text{dólares/año})\ (\Delta t\ \text{años})\\ &= S(t)\Delta t\ \text{dólares.}\end{aligned}$$

El depósito de $S(t)\Delta t$ se hace t años después. Por tanto, si suponemos una tasa de interés continua r,

$$\begin{matrix}\text{Valor presente del dinero depositado}\\ \text{en el intervalo de } t \text{ a } t + \Delta t\end{matrix} \approx S(t)\Delta t e^{-rt}.$$

Sumando sobre todos los subintervalos, se obtiene

$$\text{Valor presente total} \approx \sum S(t)e^{-rt}\Delta t\ \text{dólares.}$$

En el límite, cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos la siguiente integral:

$$\boxed{\text{Valor presente} = \int_0^M S(t)e^{-rt}dt.}$$

Al igual que en la sección 1.7, el valor M años después está dado por

$$\boxed{\text{Valor futuro} = \text{Valor presente} \cdot e^{rM}.}$$

Ejemplo 1 Encuentre los valores presente y futuro de un flujo de ingresos continuo de $1,000 por año durante un periodo de 20 años, suponiendo una tasa de interés de 6% compuesta continuamente.

Solución Si utilizamos a $S(t) = 1{,}000$ y $r = 0.06$ tenemos

$$\text{Valor presente} = \int_0^{20} 1{,}000e^{-0.06t}dt = \$11{,}647.$$

Podemos obtener el valor futuro, B, a partir del valor presente, P, mediante $B = Pe^{rt}$, por lo que

$$\text{Valor futuro} = 11{,}647e^{0.06(20)} = \$38{,}669.$$

Observe que como se depositó dinero a razón de $1,000 por año durante 20 años, la cantidad total depositada fue de $20,000. El valor futuro es $38,669, de modo que el dinero casi se duplicó debido a los intereses.

Ejemplo 2 Suponga que desea tener $50,000 al cabo de ocho años en una cuenta bancaria que genera un interés de 2% capitalizado continuamente.

(a) Si usted hace un único depósito en este momento, ¿cuánto debe depositar?
(b) Si deposita dinero continuamente durante ocho años, ¿a qué razón debe depositarlo?

Solución **(a)** Si usted deposita una sola suma de $\$P$, entonces $\$P$ es el valor presente de $50,000. Por tanto, utilizando $B = Pe^{rt}$ con $B = 50{,}000$ y $r = 0.02$ y $t = 8$:

$$\begin{aligned}50{,}000 &= Pe^{0.02(8)}\\ P &= \frac{50{,}000}{e^{0.02(8)}} = 42{,}607.\end{aligned}$$

Si usted ahora deposita $42,607 en la cuenta, dentro de ocho años tendrá $50,000.

(b) Suponga que deposita dinero a una razón constante de $\$S$ por año. Entonces

$$\text{Valor presente de los depósitos} = \int_0^8 Se^{-0.02t}\,dt$$

Puesto que S es una constante, podemos sacarla del signo de integral:

$$\text{Valor presente} = S\int_0^8 e^{-0.02t}\,dt \approx S(7.3928).$$

Sin embargo, el valor presente del depósito continuo debe ser el mismo que el valor presente del depósito de la cantidad total, es decir, \$42,607. Por tanto,

$$42{,}607 \approx S(7.3928)$$
$$S \approx \$5{,}763.$$

Para alcanzar su meta de \$50,000, necesitaría depositar dinero a una razón continua de \$5,763 por año, o aproximadamente \$480 al mes.

Problemas para la sección 6.3

1. Trace una gráfica, con el tiempo en años en el eje horizontal, de la forma que podría tener un flujo de ingresos de una empresa que vende bronceadores en el noreste de Estados Unidos.

2. Encuentre los valores presente y futuro de un flujo de ingresos de \$3,000 por año durante un periodo de 15 años, suponiendo una tasa de interés anual de 6% compuesta continuamente.

3. Cierto bono garantiza pagar $100 + 10t$ dólares al año durante 10 años, donde t está dado en años a partir del presente. Encuentre el valor presente de este flujo de ingresos, dada una tasa de interés de 5% compuesta continuamente.

4. Un pequeño negocio espera tener un flujo de ingresos de \$5,000 al año durante un periodo de cuatro años.
   (a) Encuentre el valor presente del negocio si la tasa de interés anual compuesta continuamente es de
   (i) 3% **(ii)** 10%
   (b) En cada caso, encuentre el valor del negocio al final del periodo de cuatro años.

5. **(a)** Encuentre el valor presente y futuro de un flujo de ingresos de \$6,000 por año durante un periodo de 10 años si la tasa de interés compuesta continuamente es de 5%.
   (b) ¿Qué parte del valor futuro proviene del flujo de ingresos? ¿Qué parte proviene de los intereses?

6. ¿A qué razón continua constante debe depositarse el dinero en una cuenta si ésta debe tener \$20,000 en cinco años? La cuenta gana una tasa de interés de 6% compuesta continuamente.

7. **(a)** Una cuenta bancaria gana 10% de interés compuesto continuamente. ¿A qué razón continua constante debe un padre depositar dinero en dicha cuenta para ahorrar \$100,000 en 10 años para los gastos en la universidad de su hijo?
   (b) Si, en vez de lo anterior, el padre decide depositar, en este momento, la cantidad total para alcanzar el objetivo de tener \$100,000 en 10 años, ¿cuánto debe depositar ahora?

8. El 15 de abril de 1999 María Grasso ganó el premio más grande de la lotería hasta esa fecha. Se le dio la opción de elegir entre \$197 millones, pagados continuamente durante 26 años, o un solo pago inmediato de \$104 millones.
   (a) ¿Qué opción es mejor si la tasa de interés es de 6% compuesta continuamente? ¿Una tasa de interés de 5%?
   (b) La ganadora eligió la opción del pago total. ¿Qué suposición hizo ella respecto a las tasas de interés?

9. Corporación Intel es un fabricante líder de circuitos integrados.[2] En 1995, Intel obtuvo ganancias a una razón continua de 7,035 millones de dólares por año. Suponga que las ganancias continúan a la misma razón y que la tasa de interés es de 8.5% al año compuesta continuamente.
   (a) ¿Cuál es el valor presente de las ganancias de Intel en un periodo de un año?
   (b) Al final de un año, ¿cuál es el valor de las ganancias de Intel en un periodo de un año?

10. Harley-Davidson Inc. fabrica motocicletas. Durante 1996 y 1997 la cantidad de ventas fue de aproximadamente $1{,}431e^{0.134t}$ millones de dólares por año, donde t es el tiempo en años desde el primero de enero de 1996. Suponga que está razón de ventas continúa hasta el primero de enero del 2003 (cuando la compañía cumple 100 años). Usando una tasa de interés compuesta continuamente de 7.5% por año, determine el valor, al primero de enero de 1996, de las ventas de Harley-Davidson del primero de enero de 1996 al primero de enero del 2003.

11. Hershey Foods Inc. es el mayor productor de chocolate en Estados Unidos. Durante 1995 y 1996, Hershey obtuvo una ganancia neta a razón de aproximadamente $28.5t + 265.75$ millones de dólares por año, donde t es el tiempo en años desde el primero de enero de 1995. Suponga que esta situación continúa hasta el año 2000 y que la tasa de interés es de 2% anual compuesta continuamente. Encuentre el valor, al primero de enero del 2000, de la ganancia neta de Hershey del primero de enero de 1995 al primero de enero del 2000.

[2]Los problemas del 9 al 12 están basados en el *Value Line Investment Survey*.

12. La Corporación McDonald's otorga licencias y maneja una cadena de 21,022 restaurantes de comida rápida en todo el mundo. En los últimos años, McDonald's ha estado obteniendo ingreso a razones continuas de entre 10,600 y 12,600 millones de dólares por año. Suponga que la tasa de ingresos de McDonald's permanece dentro de este rango. Utilice una tasa de interés de 9% anual capitalizada continuamente. Llene los espacios en blanco:
    (a) El valor presente de ingresos de McDonald's durante un periodo de cinco años es entre ____________ y ____________ millones de dólares.
    (b) El valor presente del ingreso de McDonald's durante un periodo de 25 años es entre ____________ y ____________ millones de dólares.
13. Su empresa está considerando comprar nueva maquinaria de producción. Usted desea saber cuánto tiempo tardará la maquinaria en pagarse, es decir, usted busca el intervalo de tiempo para el cual el valor presente de la ganancia generada por la nueva maquinaria es igual al costo de ésta. Supongamos que la nueva maquinaria cuesta $130,000 y genera ganancias a razón continua de $80,000 por año. Utilice una tasa de interés de 8.5% anual compuesta continuamente.
14. Una máquina recién instalada genera a la compañía un ingreso a razón continua de $60{,}000t + 45{,}000$ dólares por año durante los primeros seis meses de operación, y a razón continua de 75,000 dólares por año después de los primeros seis meses. El costo de la máquina es de $150,000, la tasa de interés es de 7% anual compuesta continuamente y t es el tiempo en años desde que fue instalada la máquina.
    (a) Encuentre el valor presente del ingreso que se obtuvo por la máquina durante el primer año de operación.
    (b) Determine cuánto tardará la máquina en pagarse, es decir, ¿cuánto tiempo se requiere para que el valor presente del ingreso iguale el costo de la máquina?
15. El valor de un vino bueno aumenta con su edad. Por tanto, si usted es un comerciante de vinos, tiene el problema de decidir si vender vino ahora, a un precio de $\$P$ por botella, o venderlo después a un precio más alto. Suponga que sabe que la cantidad que está dispuesto a pagar el bebedor de vinos por una botella de este vino, t años a partir de este momento, es de $\$P(1+20\sqrt{t})$. Suponga composición continua y una tasa de interés de 5% por año, ¿cuándo es el mejor momento para que venda el vino?
16. Una compañía petrolera descubre reservas de petróleo de 100 millones de barriles. Para un tiempo $t > 0$, en años, el plan de extracción de la compañía es una función lineal decreciente en el tiempo como sigue:
$$q(t) = a - bt,$$
donde $q(t)$ es la razón de extracción de petróleo en millones de barriles por año en el tiempo t, $b = 0.1$ y $a = 10$.
    (a) ¿Cuánto tarda en agotarse la reserva?
    (b) El precio del petróleo tiene un valor constante de $20 por barril, el costo de extracción por barril tiene un valor constante de $10 por barril y la tasa de interés del mercado es de 10% por año compuesta continuamente. ¿Cuál es el valor presente de la ganancia de la compañía?

6.4 TASAS DE CRECIMIENTO RELATIVAS

Tasa de crecimiento de población

En el capítulo 5 vimos cómo calcular el cambio en una población, P, a partir de su derivada, dP/dt, mediante el teorema fundamental del cálculo.

Sin embargo, con frecuencia las tasas de crecimiento poblacional no se dan en términos de la derivada dP/dt. Por ejemplo, podríamos saber que en 1990 la población, P, de Nicaragua estaba creciendo a razón del 3.4% por año. El 3.4% por año es la *razón de cambio relativa* (o razón de crecimiento relativa) de la población, pero no es la derivada. A veces se denomina a la derivada *razón (o tasa) de cambio absoluta*. La razón (o tasa) de cambio relativa es la razón de cambio absoluta dividida entre la población, de modo que tenemos la siguiente definición:

Suponga que P es una función de t,

$$\begin{array}{c}\text{Razón de cambio (absoluta)}\\ \text{de } P \text{ respecto a } t\end{array} = \frac{dP}{dt} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c}\text{Razón de cambio (relativa)}\\ \text{de } P \text{ respecto a } t\end{array} = \frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt}$$

Observe que las razones de cambio absoluta y relativa miden cantidades distintas. Si P es la población y t son los años, la razón de cambio (absoluta) es un cambio en la población por año, mientras que la razón de cambio relativa es un cambio porcentual por año. Para una cantidad que crece linealmente, la razón de cambio absoluta es constante. Para una cantidad que crece exponencialmente, la razón de cambio relativa es constante.

No se puede determinar el cambio en una población a partir de la razón de crecimiento relativa sin información adicional; sin embargo, se puede calcular el cambio porcentual en la población.

Puesto que

$$\frac{d}{dt}(\ln P(t)) = \frac{P'(t)}{P(t)} = \text{Razón de crecimiento relativa},$$

la razón de crecimiento relativa de P es la razón de cambio de $\ln(P)$. De acuerdo con el teorema fundamental del cálculo, la integral de la razón de crecimiento relativa produce el cambio total en $\ln(P)$:

$$\int_a^b \frac{P'(t)}{P(t)} dt = \ln(P(b)) - \ln(P(a)) = \ln\left(\frac{P(b)}{P(a)}\right).$$

Ejemplo 1 La razón de crecimiento relativa $P'(t)/P(t)$ de una población $P(t)$ durante un periodo de 50 años se muestra en la figura 6.25. ¿A qué factor aumenta la población durante el periodo?

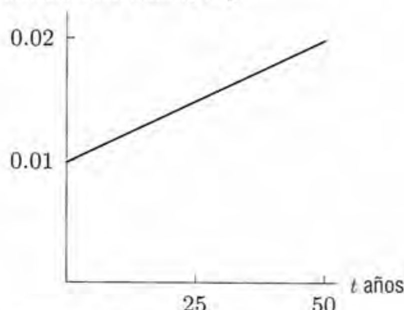


Figura 6.25. Razón de crecimiento relativa de la población.

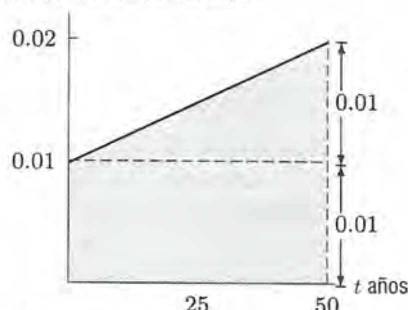


Figura 6.26. Cálculo del cambio en la población a partir de la razón de crecimiento relativa de la población.

Solución Tenemos

$$\ln\left(\frac{P(50)}{P(0)}\right) = \int_0^{50} \frac{P'(t)}{P(t)} dt.$$

Esta integral es igual al área abajo de la gráfica de $P'(t)/P(t)$ entre $t = 0$ y $t = 50$. Véase la figura 6.26. El área del rectángulo y del triángulo arrojan

$$\text{Área} = 50(0.01) + \frac{1}{2} \cdot 50(0.01) = 0.75.$$

Por consiguiente,

$$\ln\left(\frac{P(50)}{P(0)}\right) = 0.75$$

$$\frac{P(50)}{P(0)} = e^{0.75} = 2.1$$

$$P(50) = 2.1P(0).$$

La población creció más del doble durante los 50 años, aumentando en un factor de aproximadamente 2.1. No podemos determinar la cantidad en que aumentó la población a menos que sepamos el tamaño inicial de la población.

Si todo lo demás permanece constante, la razón de crecimiento relativa aumenta si se eleva la tasa de natalidad relativa o disminuye la tasa de mortalidad relativa. Incluso si disminuyera la tasa de natalidad, todavía podríamos ver un aumento en la tasa de crecimiento relativa si disminuye con más rapidez la tasa de mortalidad. Actualmente, esto es lo que sucede con la población mundial. La diferencia entre la tasa de natalidad y la de mortalidad es una variable importante.

Ejemplo 2 La figura 6.27 muestra tasas de natalidad relativas y tasas de mortalidad relativas para países desarrollados y en desarrollo.[3]

(a) ¿Cuál está cambiando más rápido, la tasa de natalidad o la de mortalidad? ¿Qué le indica esto sobre la forma en que cambia la población?

(b) ¿En qué porcentaje aumentó la población de los países en desarrollo entre 1800 y 1900?

(c) ¿A qué porcentaje la población de los países en desarrollo aumentó entre 1950 y 1977?

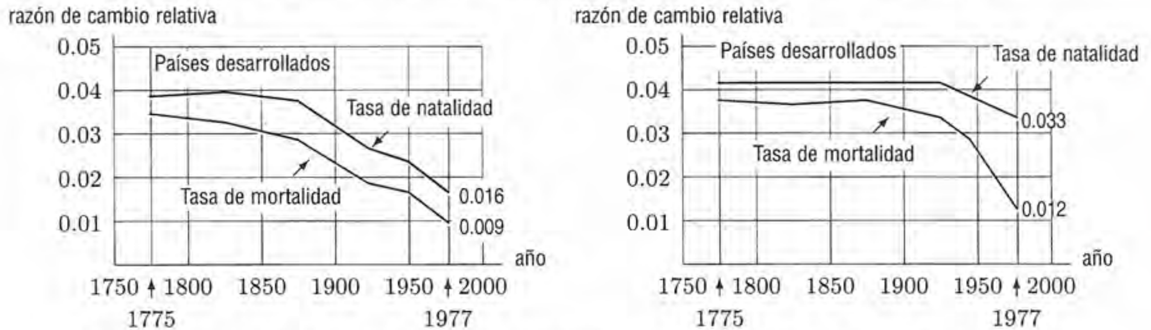


Figura 6.27. Tasas de natalidad y mortalidad en los países desarrollados y en desarrollo, 1775-1977.

Solución **(a)** En países desarrollados, la tasa de natalidad es mayor que la de mortalidad, de modo que la población está aumentando. Tanto la tasa de natalidad como la tasa de mortalidad son decrecientes y aproximadamente a una tasa similar, de modo que la población de los países desarrollados es creciente a una tasa relativa constante.

En países en desarrollo, la tasa de natalidad es más alta que la de mortalidad y ambas han estado decreciendo aproximadamente desde 1925. En años recientes, la tasa de mortalidad ha estado disminuyendo más rápido que la tasa de natalidad, de modo que la tasa de crecimiento poblacional relativa es creciente. La disminución en la tasa de mortalidad ha contribuido en forma importante al reciente crecimiento poblacional de los países en desarrollo.

(b) La tasa de crecimiento relativa de la población es la diferencia entre la tasa de natalidad relativa y la tasa de mortalidad relativa, de modo que está representada en la figura 6.27 por una distancia vertical entre la curva de la tasa de natalidad y la curva de la tasa de mortalidad. El área de la región entre las dos curvas de 1800 a 1900, que se muestra en la figura 6.28, da el cambio en ln $P(t)$. La región tiene un área aproximadamente igual a la de un rectángulo de altura 0.005 y ancho 100, por lo cual el área es 0.5. Tenemos

$$\ln\left(\frac{P(1900)}{P(1800)}\right) = \int_{1800}^{1900} \frac{P'(t)}{P(t)}\,dt = 0.5$$

$$\frac{P(1900)}{P(1800)} = e^{0.5} = 1.65$$

Durante el siglo XIX la población de los países en desarrollo aumentó aproximadamente 65%, un factor de 1.65.

(c) En la figura 6.28 el área sombreada entre las curvas de la tasa de natalidad y la de mortalidad de 1950 a 1977 está formada por aproximadamente 1.5 rectángulos, cada uno con área de (0.01)(27) = 0.27. El área de la región es alrededor de (1.5)(0.27) = 0.405. Tenemos

$$\ln\left(\frac{P(1977)}{P(1950)}\right) = \int_{1950}^{1977} \frac{P'(t)}{P(t)}\,dt = 0.405,$$

por tanto,

$$\frac{P(1977)}{P(1950)} = e^{0.405} = 1.50$$

Entre 1950 y 1977 la población de los países en desarrollo aumentó aproximadamente 50%, un factor de 1.5.

[3]Murphy, Elaine, *Food and Population: A Global Concern*, Population Reference Bureau, Inc., Washington, D. C., 1984, p. 2.

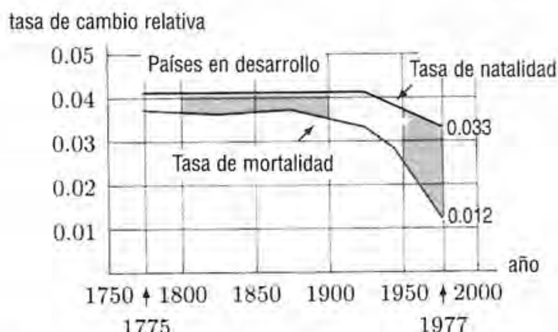


Figura 6.28. Tasa de crecimiento relativa de la población = Tasa de natalidad relativa − Tasa de mortalidad relativa.

Problemas para la sección 6.4

1. La tabla 6.3 muestra el número acumulado de muertes por SIDA en el mundo.[4] Encuentre el aumento absoluto de muertes por SIDA entre 1995 y 1996 y entre 1999 y 2000. Encuentre el aumento relativo entre 1995 y 1996 y entre 1999 y 2000.

Tabla 6.3 *Número acumulado de muertes por SIDA en el mundo, en millones*

Año	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Casos	8.2	10.6	13.2	15.9	18.8	21.8

2. El artículo "Escenario del trabajo: lo que estará y no estará en boga durante los próximos 10 años" ("Job Scene: What's Hot, What's Not in the Next 10 Years"), que apareció en el *Chicago Tribune* en julio de 1996, contenía la siguiente cita sobre el cambio que se esperaba en el empleo entre 1995 y 2005:

- Se pronostica que el empleo aumentará a 144.7 millones, a partir de 127 millones, es decir, sólo el **14** por ciento. La tasa de crecimiento fue del **24%** de 1983 a 1994.
- Se espera que los trabajos en servicios y en el comercio al menudeo aumenten en **16.2** millones. Los servicios de negocios, salud y educación crearan **9.1** millones de nuevos empleos.
- La industria manufacturera perderá **1.3** millones de empleos, como continuación de su caída.
- Los empleos para quienes cuenten con título de maestría crecerán más que ningún otro: **28** por ciento.

(a) El primer número en negritas es 14. ¿Éste es un cambio absoluto, un cambio relativo, una razón de cambio absoluta, o una razón de cambio relativa? Determine cada una de las otras tres medidas de cambio, correspondientes a 14.

(b) Identifique cada uno de los números en negritas como un cambio absoluto, un cambio relativo, una razón de cambio absoluta o una razón de cambio relativa.

3. Un pueblo tiene una población de 1,000 habitantes. Llene la siguiente tabla suponiendo que la población crece a razón de

(a) 50 personas por año. **(b)** 5% por año.

Año	0	1	2	3	4	...	10
Población	1,000					...	

4. El tamaño de una población de bacterias es de 4,000. Encuentre una fórmula para hallar el tamaño, P, de la población t horas después si disminuye en

(a) 100 bacterias por hora. **(b)** 5% por hora.

¿En qué caso la población de bacterias llega primero a 0?

5. Con frecuencia, las tasas de natalidad y mortalidad se registran como nacimientos o fallecimientos por mil miembros de la población. ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativa de una población con una tasa de natalidad de 30 nacimientos por 1,000 y una tasa de mortalidad de 20 fallecimientos por 1,000?

6. Una población tiene 100 habitantes en el tiempo $t = 0$, con t en años.

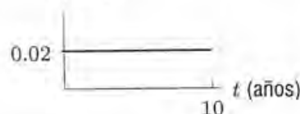
(a) Si la población tiene una tasa de crecimiento absoluta constante de 10 personas por año, encuentre una fórmula para el tamaño de la población en el tiempo t.

(b) Si la población tiene una tasa de crecimiento relativa constante de 10% por año, encuentre una fórmula para el tamaño de la población en el tiempo t.

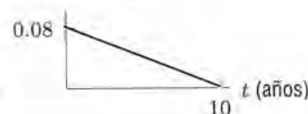
(c) Trace una gráfica de ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas.

En los problemas del 7 al 10 se muestra una gráfica de la tasa de cambio relativa de una población. ¿Aproximadamente en qué porcentaje cambia la población en un periodo de 10 años?

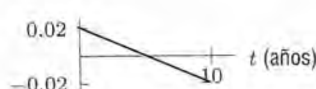
7.



8.



9.



10.



[4] Brown, Lester R., *et al., Vital Signs 2001*, W. W. Norton, Nueva York, 2001, p. 79.

11. El número de robos reportados en Estados Unidos ha estado disminuyendo desde 1986.[5] Sea $P(t)$ el número de robos registrados como función del tiempo t, la razón de cambio relativa por año, $P'(t)/P(t)$, se muestra en la tabla.

(a) Estime la integral de la tasa de cambio relativa:

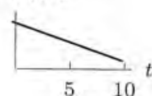
$$\int_{1987}^{1996} \frac{P'(t)}{P(t)}\, dt.$$

(b) ¿En qué porcentaje cambió el número de robos durante el periodo 1987-1996?

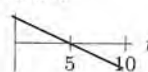
Año	1987	1988	1989	1990	1991
Tasa relativa	−0.002	−0.006	−0.016	−0.031	−0.015
Año	1992	1993	1994	1995	1996
Tasa relativa	−0.060	−0.051	−0.045	−0.046	−0.037

Los problemas del 12 al 15 muestran la tasa de cambio relativa de f para $0 \leq t \leq 10$. Indique los intervalos en los cuales f es creciente y en los que f es decreciente.

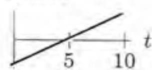
12.



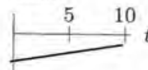
13.



14.



15.



16. En lenguaje cotidiano, crecimiento exponencial significa crecimiento muy rápido. En este problema, usted verá que cualquier función que crece de modo exponencial, finalmente lo hace con más rapidez que cualquier función potencial.

(a) Demuestre que la tasa de crecimiento relativa de la función $f(x) = x^n$, para $n > 0$ fija y para $x > 0$, disminuye a medida que x aumenta.

(b) Suponga que $k > 0$ es fija. Explique por qué, para valores altos de x, la tasa de crecimiento relativa de la función $g(x) = e^{kx}$ es mayor que la tasa de crecimiento relativa de $f(x)$.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

- **Valor promedio**
- **Excedente del consumidor y excedente del productor**
  Controles de salarios y de precios
- **Valor presente y futuro**
  Flujo de ingresos
- **Tasas de crecimiento relativas**

PROBLEMAS DE REPASO

1. Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = 5 + 4x - x^2$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

2. (a) Utilice la figura 6.29 para encontrar $\int_0^6 f(x)\, dx$.

(b) ¿Cuál es el valor promedio de f en el intervalo de $x = 0$ a $x = 6$?

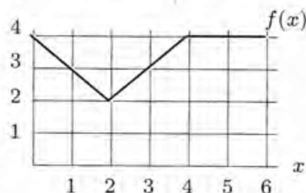


Figura 6.29.

3. La tasa de ventas (en ventas por mes) de una empresa, durante t en meses desde el primero de enero, está dada por

$$r(t) = t^4 - 20t^3 + 118t^2 - 180t + 200.$$

(a) Trace una gráfica de la tasa de ventas mensuales durante el primer año ($t = 0$ a $t = 12$). ¿Se realizaron más compras durante el primer semestre del año, o durante el segundo semestre?

(b) Estime las ventas totales de la empresa durante los primeros seis meses del año y durante los últimos seis meses del año.

(c) ¿Cuáles fueron las ventas totales de todo el año?

(d) ¿Cuáles fueron las ventas promedio mensuales de la empresa durante el año?

4. (a) Utilice la figura 6.30 para estimar $\int_{-3}^{3} f(x)\, dx$.

(b) ¿Cuál de los siguientes valores promedio de $f(x)$ es mayor?

(i) Entre $x = -3$ y $x = 3$.

(ii) Entre $x = 0$ y $x = 3$.

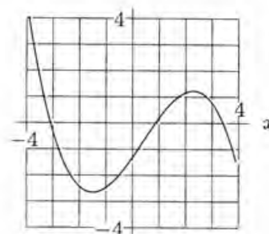


Figura 6.30.

[5]Datos del FBI, *Uniform Crime Reports*, 1996, y *The World Almanac*, 1998, p. 958.

5. Una barra de metal se enfría de 1,000 °C a una temperatura ambiente de 20 °C. La temperatura, H, de la barra t minutos después de que comienza a enfriarse está dada, en °C, por

$$H = 20 + 980e^{-0.1t}.$$

(a) Encuentre la temperatura de la barra al cabo de una hora.
(b) Determine el valor promedio de la temperatura durante la primera hora.
(c) ¿Su respuesta al inciso (b) es mayor o menor que el promedio de las temperaturas al inicio y al final de la hora? Explique esto en términos de la concavidad de la gráfica de H.

6. La figura 6.31 muestra la tasa, $f(x)$, en miles de algas por hora, a la que está creciendo una población de algas, donde x es en horas.

(a) Evalúe el valor promedio de la tasa en el intervalo $x = -1$ a $x = 3$.
(b) Evalúe el cambio total en la población en el intervalo $x = -3$ a $x = 3$.

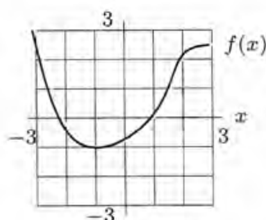


Figura 6.31.

7. El número de horas, H, en las que hay luz de día en Madrid como función de la fecha se aproxima por medio de la fórmula

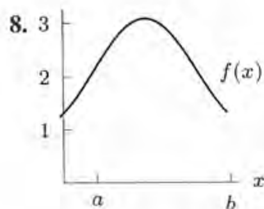
$$H = 12 + 2.4 \text{ sen } [0.0172(t - 80)],$$

donde t es el número de días desde principios del año. Determine el número de horas promedio de luz del día en Madrid:

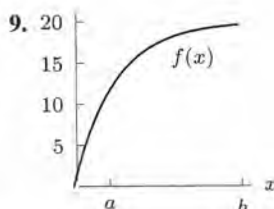
(a) en enero. **(b)** en junio. **(c)** en todo el año.
(d) Explique por qué las magnitudes relativas de sus respuestas a los incisos (a), (b) y (c) son razonables.

En los problemas 8 y 9 evalúe el valor promedio de $f(x)$ de $x = a$ a $x = b$.

8.



9.



10. Para t, en años desde 1980, la población, P, de México (en millones), está dada por

$$P = 67.38(1.026)^t.$$

(a) ¿Cuál fue la población promedio de México entre 1980 y 1990?
(b) ¿Cuál es el promedio de la población de México medida en los años 1980 y 1990?
(c) Explique, en términos de la concavidad de la curva de P (figura 1.60, en la página 33), por qué su respuesta al inciso (b) es mayor o menor que su respuesta al inciso (a).

11. En la mayoría de los años del siglo XX el consumo anual de electricidad en Estados Unidos aumentó exponencialmente a una razón continua de 7% anual. Suponga que esta tendencia continúa y que la energía eléctrica que se consumió en 1900 fue de 1.4 millones de horas-megavatios.

(a) Escriba una expresión para el consumo anual de energía eléctrica como función del tiempo, t, en años desde 1900.
(b) Determine el consumo promedio anual de energía eléctrica durante el siglo XX.
(c) ¿En qué año el consumo eléctrico se aproxima más al promedio del siglo?
(d) Sin tomar en cuenta los cálculos del inciso (c), ¿cómo puede usted haber pronosticado en qué mitad del siglo estaría la respuesta?

12. Las curvas de oferta y demanda de un producto se muestran en la figura 6.32. Evalúe el precio y la cantidad de equilibrio, así como el excedente del consumidor y el excedente del productor. Sombree las áreas que representan el excedente del consumidor y el excedente del productor.

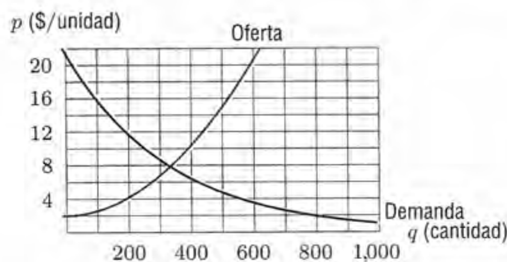


Figura 6.32.

13. **(a)** ¿Cuáles son el precio y la cantidad de equilibrio de las curvas de oferta y demanda de la figura 6.33?
(b) Sombree las áreas que representan el excedente del consumidor y el excedente del productor y estime ambos.

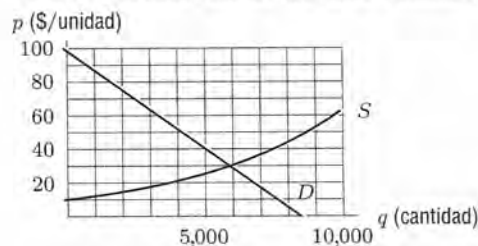


Figura 6.33.

14. Para un producto, la curva de oferta es $p = 5 + 0.02q$ y la curva de demanda es $p = 30e^{-0.003q}$, donde p es el precio y q es la cantidad que se vende a ese precio. Encuentre:
   (a) El precio y la cantidad de equilibrio.
   (b) El excedente del consumidor y el excedente del productor.

15. Las ganancias totales que se obtienen por compraventa (excedente del consumidor + excedente del productor) son superiores al precio de equilibrio. ¿Qué pasa si tomamos por separado el excedente del consumidor y el excedente del productor?
   (a) Suponga que el precio se mantiene alto de manera artificial. ¿El excedente del consumidor al precio artificial puede ser superior al excedente del consumidor a precio de equilibrio? ¿Qué sucede con el excedente del productor? Trace una gráfica de las posibles curvas de oferta y de demanda para ilustrar sus respuestas.
   (b) Suponga que el precio es artificialmente menor que el precio de equilibrio. ¿El excedente del consumidor al precio artificial puede ser mayor que el excedente del consumidor al precio de equilibrio? ¿Qué sucede con el excedente del productor? Trace una gráfica de las posibles curvas de oferta y de demanda para ilustrar sus respuestas.

16. Calcule el valor presente de un flujo de ingresos continuo de \$1,000 por año durante cinco años a una tasa de interés de 9% anual compuesta continuamente.

17. Encuentre los valores presente y futuro de un flujo de ingresos de \$12,000 por año, durante un periodo de 20 años. La tasa de interés es de 6% compuesta continuamente.

18. Determine el flujo constante de ingresos que se necesita invertir en un periodo de 10 años a una tasa de interés de 5% por año compuesta continuamente para tener un valor presente de \$5,000.

19. Se espera que una empresa tenga ganancias por \$50,000 al año, a una razón continua, durante ocho años. Usted puede invertir las ganancias a una tasa de interés de 7% compuesta continuamente. Tiene, en este momento, la oportunidad de comprar los derechos de las ganancias de la empresa a \$350,000. ¿Debe usted comprarlos? Explique su decisión.

20. Su empresa necesita \$500,000 en dos años para hacer renovaciones y puede ganar 9% de interés en las inversiones.
   (a) ¿Cuál es el valor presente de las renovaciones?
   (b) Si su empresa deposita dinero continuamente a una razón constante durante un periodo de dos años, ¿a qué razón se debe depositar el dinero para que usted tenga los \$500,000 cuando los necesite?

21. Las ventas de la versión 6.0 de un paquete de *software* de cómputo comienzan altas y disminuyen exponencialmente. Las ventas en función del tiempo t medido en años son $s(t) = 50e^{-t}$ miles de dólares al año. Después de dos años, se lanza al mercado la versión 7.0 del *software* y reemplaza a la versión 6.0. Usted puede invertir las ganancias a una tasa de interés de 6% compuesta continuamente. Calcule el valor presente de las ventas de la versión 6.0 durante un periodo de dos años.

22. En 1980 Alemania Occidental le prestó 20 mil millones de marcos alemanes a la Unión Soviética para la construcción de una tubería de gas natural para enlazar Siberia con el occidente de Rusia, y continuar hacia Alemania Occidental (Urengoi-Uschgorod-Berlín). Suponga que el convenio fue el siguiente: en 1985, después que terminó la construcción del gasoducto, la Unión Soviética entregaría gas natural a Alemania Occidental a una razón constante para todos los años por venir. Suponiendo un precio constante de 0.10 marcos alemanes por metro cúbico de gas natural, y suponiendo que Alemania Occidental espera obtener un interés anual del 10% sobre por su inversión (compuesto continuamente), ¿a qué tasa tiene que entregar el gas la Unión Soviética en miles de millones de metros cúbicos por año? Recuerde que la entrega del gas no podría comenzar hasta que el gasoducto estuviera terminado. Por tanto, Alemania Occidental no recibiría resultados de su inversión hasta que hayan transcurrido cinco años. (**Nota:** en realidad se hizo un convenio más complejo entre los dos países.)

23. La tasa de crecimiento relativa de una población se muestra en la figura 6.34. ¿En qué porcentaje cambia la población durante un periodo de 10 años?

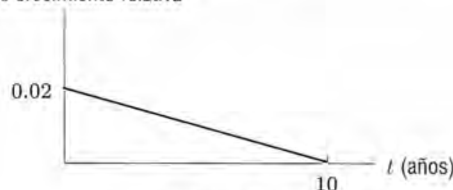


Figura 6.34.

24. La tasa de crecimiento relativa de una población $P(t)$ se muestra en la figura 6.35. ¿En qué porcentaje cambia la población durante un periodo de ocho años? Si la población constaba de 10,000 habitantes en el tiempo $t = 0$, ¿cuál será la población ocho años después?

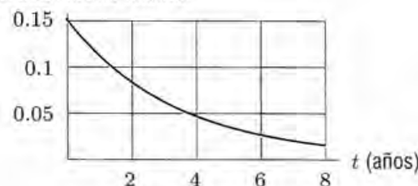


Figura 6.35.

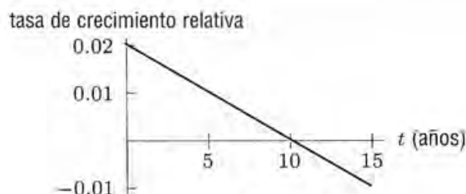
25. La población, P, de Nicaragua era de 3.6 millones en 1990 y crecía a una tasa anual de 3.4 por ciento.
   (a) Escriba una fórmula para P como función de t, donde t son los años desde 1990.
   (b) Encuentre la tasa promedio de cambio (o la razón de crecimiento absoluta) de la población de Nicaragua entre 1990 y 1991, y entre 1991 y 1992. Explique por qué son diferentes sus respuestas.
   (c) Utilice sus respuestas al inciso (b) para confirmar que la tasa de cambio relativa (o la razón de crecimiento relativa) en ambos intervalos de tiempo fue de 3.4 por ciento.

26. La figura 6.36 muestra la tasa de crecimiento relativa de una población.

(a) ¿En qué intervalo la población está aumentando? ¿En qué porcentaje aumenta la población durante este intervalo?

(b) ¿En qué intervalo la población está disminuyendo? ¿En qué porcentaje disminuye la población durante este intervalo?

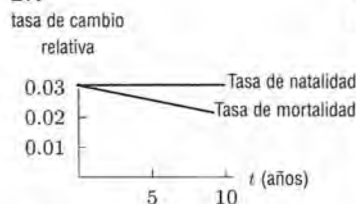
(c) ¿En qué porcentaje cambia la población durante el periodo de 15 años mostrado?



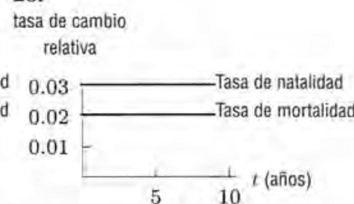
Figuras 6.36.

En los problemas 27 y 28, la gráfica muestra las tasas relativas de natalidad y de mortalidad de una población $P(t)$. Determine si la población es creciente o decreciente y calcule el porcentaje al que ésta cambia durante el periodo de 10 años.

27.



28.



29. En 1990, los humanos generaron $1.4 \cdot 10^{20}$ joules de energía con el petróleo. En ese entonces, se estimó que todo el petróleo de la Tierra generaría aproximadamente 10^{22} joules. Suponiendo que el uso de energía generada por el petróleo aumentara 2% cada año, ¿en cuánto tiempo se agotarían los recursos petroleros?

PROYECTOS

1. Distribución de recursos

Con frecuencia, la distribución equitativa de un recurso entre los miembros de una población es una cuestión de importancia política o económica. ¿Cómo medir esto? ¿Cómo podemos determinar si la distribución de la riqueza en este país es más o menos equitativa con el paso del tiempo? ¿Cómo se puede medir qué país tiene la distribución de ingreso más equitativa? Este problema describe una forma de realizar dichas mediciones. Suponga que el recurso se distribuye equitativamente. Entonces, cualquier 20% de la población tendrá el 20% del recurso. En forma similar, cualquier 30% tendrá 30% del recurso, y así sucesivamente. Sin embargo, si el recurso no se distribuye de manera equitativa, el $p\%$ más pobre de la población (en términos de este recurso) no tendrá el $p\%$ de los bienes. Suponga que $F(x)$ representa la fracción de los recursos que posee la fracción x más pobre de la población. Por consiguiente, $F(0.4) = 0.1$ significa que el 40% más pobre de la población tiene el 10% del recurso.

(a) ¿Cuál sería F si el recurso se distribuyera equitativamente?

(b) ¿Qué debe ser verdadero de cualquier F? ¿A qué deben ser iguales $F(0)$ y $F(1)$? ¿F es creciente o decreciente? ¿La gráfica de F es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?

(c) El índice de desigualdad de Gini, G, es una forma de medir qué tan equitativamente se distribuye un recurso. Está definido por

$$G = 2\int_0^1 [x - F(x)]\,dx.$$

Muestre gráficamente lo que representa G.

(d) En las figuras 6.37 y 6.38 se muestran las representaciones gráficas del índice de Gini para dos países. ¿Qué país tiene la distribución de riqueza más equitativa? Analice la distribución de riqueza en ambos países.

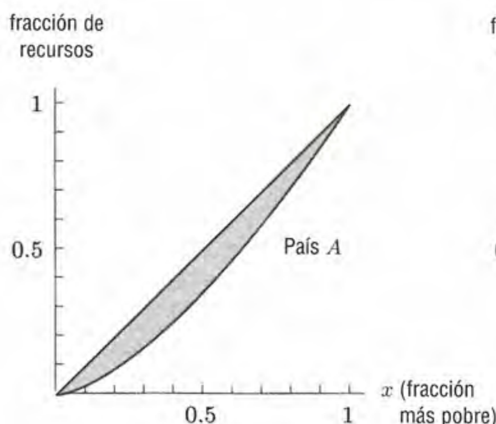


Figura 6.37. País A.

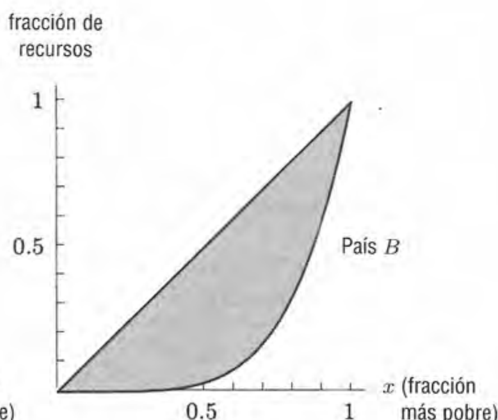


Figura 6.38. País B.

(e) ¿Cuál es el máximo valor posible del índice de desigualdad de Gini, G? ¿Cuál es el mínimo valor posible? Trace gráficas en cada caso. En cada caso, ¿cuál es la distribución de recursos?

2. Producción de una huerta de manzanas

La figura 6.39 es una gráfica de la producción anual, $y(t)$, en bushels por año de un manzanal t años después de haberlo plantado. Los árboles necesitan 10 años en aclimatarse, pero en los siguientes 20 años dan una producción considerable. No obstante, después de aproximadamente 30 años, la edad y las plagas comienzan a hacer efecto y la producción anual decrece.[6]

(a) Represente en la gráfica de la figura 6.39 la producción total, $F(M)$, hasta M años, con $0 \leq M \leq 60$. Escriba una expresión para $F(M)$ en términos de $y(t)$.

(b) Trace una gráfica de $F(M)$ en términos de M para $0 \leq M \leq 60$.

(c) Escriba una expresión de la producción anual promedio, $a(M)$, hasta M años.

(d) ¿Cuándo cortar los árboles y volver a plantar otros? Suponga que se desea maximizar el ingreso promedio por año y que los precios de la fruta permanecen constantes, de modo que esto se logra al maximizar la producción anual promedio. Utilice la gráfica de $y(t)$ para calcular el tiempo en el que la producción anual promedio es máxima. Explique su respuesta en forma geométrica y simbólica.

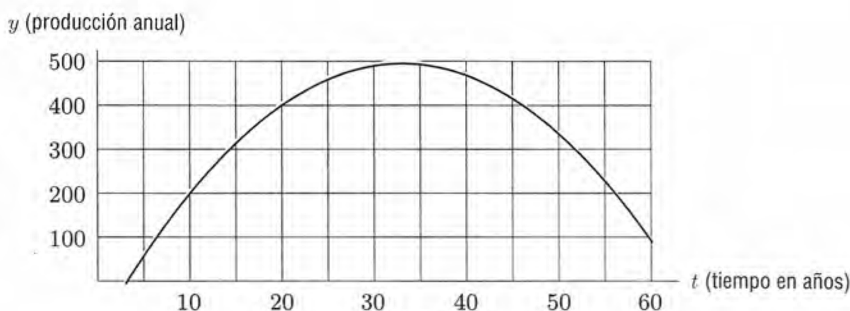


Figura 6.39.

[6]Taylor, Peter D., *Calculus: The Analysis of Functions*, Wall & Emerson, Inc., Toronto, 1992.

Capítulo 7

ANTIDERIVADAS

En este capítulo veremos con más detalle cómo reconstruir una función a partir de su derivada utilizando el teorema fundamental del cálculo. Introduciremos las antiderivadas y mostraremos cómo construirlas analítica, numérica y gráficamente.

7.1 CONSTRUCCIÓN ANALÍTICA DE LAS ANTIDERIVADAS

¿Qué es una antiderivada?

Si la derivada de $F(x)$ es $f(x)$, es decir, si $F'(x) = f(x)$, entonces denominamos a $F(x)$ *antiderivada* de $f(x)$. Por ejemplo, la derivada de x^2 es $2x$; por tanto, podemos decir que

$$x^2 \text{ es una antiderivada de } 2x.$$

¿Puede usted pensar en otra función cuya derivada sea $2x$? ¿Qué sucede con $x^2 + 1$? ¿O $x^2 + 17$? En vista de que, para cualquier constante C,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x + 0 = 2x,$$

cualquier función de la forma $x^2 + C$ es una antiderivada de $2x$. Se puede demostrar que todas las antiderivadas de $2x$ son de esta forma, por lo que se puede afirmar que

$$x^2 + C \text{ es la familia de antiderivadas de } 2x.$$

Una vez que conocemos una antiderivada $F(x)$ para una función $f(x)$ en un intervalo, entonces todas las otras antiderivadas de $f(x)$ son de la forma $F(x) + C$.

La integral indefinida

Se presenta una notación para la familia de antiderivadas que se parece a la integral definida sin los límites. Si todas las antiderivadas de $f(x)$ son de la forma $F(x) + C$, denominamos $\int f(x)\,dx$ la *integral indefinida de* $f(x)$ y escribimos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Es importante comprender la diferencia entre

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int f(x)\,dx.$$

La primera es un número y la segunda es una familia de funciones. Debido a que la notación es similar, frecuentemente se utiliza la palabra "integración" para referir el proceso de hallar antiderivadas así como al cálculo de integrales definidas. En general, el contexto aclara de cuál se trata.

Búsqueda de fórmulas para antiderivadas

Encontrar las antiderivadas de funciones es como tomar raíces cuadradas de números: si elegimos un número al azar, por ejemplo, 7 o 493, podemos tener problemas para decidir su raíz cuadrada si no usamos una calculadora. Pero si escogemos un número como el 25 o el 64 que sabemos son cuadrados perfectos, entonces podemos hallar su raíz cuadrada exacta. Del mismo modo, si escogemos una función que reconozcamos como una derivada, entonces podemos determinar su antiderivada con toda facilidad.

Por ejemplo, observar que $2x$ es la derivada de x^2 indica que x^2 es la antiderivada de $2x$. Si dividimos entre 2, entonces vemos que

$$\text{Una antiderivada de } x \text{ es } \frac{x^2}{2}$$

Para comprobar esta afirmación, tomemos la derivada de $x^2/2$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}x^2 = \frac{1}{2}\cdot 2x = x.$$

¿Cómo sería una antiderivada de x^2? La derivada de x^3 es $3x^2$; por tanto, la derivada de $x^3/3$ es $3x^2/3 = x^2$. Entonces,

$$\text{Una antiderivada de } x^2 \text{ es } \frac{x^3}{3}.$$

¿Puede ver el patrón? Se parece a

Una antiderivada de x^n es $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$

(Suponemos que $n \neq -1$, de lo contrario tendríamos $x^0/0$, lo cual no tiene sentido.) Es fácil comprobar esta fórmula por derivación:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n.$$

Entonces, en notación de integral indefinida, tenemos que

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

¿Puede usted pensar en alguna antiderivada de la función $f(x) = 5$? Sabemos que la derivada de $5x$ es 5, por lo que $F(x) = 5x$ es una antiderivada de $f(x) = 5$. En general, si k es una constante, la derivada de kx es k, de modo que el resultado es

Si k es constante

$$\int k\,dx = kx + C.$$

Ejemplo 1 Encuentre $\int (3x + x^2)\,dx$.

Solución Sabemos que $x^2/2$ es una antiderivada de x y que $x^3/3$ es una antiderivada de x^2, por lo que esperamos que

$$\int (3x + x^2)\,dx = 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^3}{3} + C.$$

De nuevo, compruebe sus antiderivadas por derivación, es fácil hacerlo. En este caso,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + C\right) = \frac{3}{2}\cdot 2x + \frac{3x^2}{3} = 3x + x^2.$$

El ejemplo anterior muestra que las reglas de la suma y de la multiplicación de constantes de derivación funcionan al revés:

Propiedades de las antiderivadas: sumas y productos por constantes

En la notación de integral indefinida

1. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

2. $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$

En palabras,

1. Una antiderivada de la suma (o diferencia) de dos funciones es la suma (o diferencia) de sus antiderivadas.

2. Una antiderivada de una constante por una función es la constante multiplicada por una antiderivada de la función.

Ejemplo 2 Encuentre las antiderivadas de cada una de las siguientes expresiones: **(a)** x^5 **(b)** t^8 **(c)** $12x^3$ **(d)** $q^3 - 6q^2$

Solución

(a) $\int x^5\, dx = \frac{x^6}{6} + C.$

(b) $\int t^8\, dt = \frac{t^9}{9} + C.$

(c) $\int 12x^3\, dx = 12\left(\frac{x^4}{4}\right) + C = 3x^4 + C.$

(d) $\int q^3 - 6q^2\, dq = \frac{q^4}{4} - 6\left(\frac{q^3}{3}\right) + C = \frac{q^4}{4} - 2q^3 + C.$

Para comprobar, derive la antiderivada; su resultado debe ser la función original.

¿Cuál es la antiderivada de x^n cuando $n = -1$? En otras palabras, ¿cuál es una antiderivada de $1/x$? Afortunadamente, conocemos una función cuya derivada es $1/x$, a saber, el logaritmo natural. Por tanto, como

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x},$$

sabemos que

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C, \text{ para } x > 0.$$

Si $x < 0$, entonces ln x no está definida, y no puede ser una antiderivada de $1/x$. En este caso, podemos intentarlo con $\ln(-x)$:

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = (-1)\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$$

así,

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(-x) + C, \text{ para } x < 0.$$

Esto significa que ln x es una antiderivada de $1/x$ si $x > 0$, y ln $(-x)$ es una antiderivada de $1/x$ si $x < 0$. Como $|x| = x$ cuando $x > 0$ y $|x| = -x$ cuando $x < 0$, es posible unir estas dos fórmulas en:

$$\text{Una antiderivada de } \frac{1}{x} \text{ es } \ln|x|$$

en cualquier intervalo que no tenga 0. Por tanto,

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C.$$

Como la función exponencial e^x es su propia derivada, también es su propia antiderivada; por consiguiente,

$$\int e^x\, dx = e^x + C.$$

¿Qué pasa con e^{kx}? Sabemos que la derivada de e^{kx} es ke^{kx}, para $k \neq 0$ y tenemos

$$\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$$

Ejemplo 3 Encuentre las antiderivadas de cada una de las siguientes expresiones: **(a)** $8x^3 + \frac{1}{x}$ **(b)** $12e^{0.2t}$

Solución **(a)** $\int 8x^3 + \frac{1}{x}\,dx = 8\left(\frac{x^4}{4}\right) + \ln|x| + C = 2x^4 + \ln|x| + C.$

(b) $\int 12e^{0.2t}\,dt = 12\left(\frac{1}{0.2}e^{0.2t}\right) + C = 60e^{0.2t} + C.$

Derive sus respuestas para verificar sus resultados.

Antiderivadas de funciones periódicas

Es fácil inferir cuáles son las antiderivadas del seno y coseno. Como

$$\frac{d}{dx}\,\text{sen}\, x = \cos x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\,\text{sen}\, x,$$

obtenemos

$$\int \cos x\, dx = \text{sen}\, x + C \quad \text{y} \quad \int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x + C.$$

Como la derivada de sen(kx) es k cos(kx) y la derivada de cos(kx) es $-k$ sen(kx), tenemos que, para $k \neq 0$,

$$\int \cos(kx)\, dx = \frac{1}{k}\,\text{sen}(kx) + C \quad \text{y} \quad \int \text{sen}(kx)\, dx = -\frac{1}{k}\cos(kx) + C$$

Ejemplo 4 Encuentre $\int (\text{sen}\, x + 3\cos(5x))\, dx.$

Solución Descomponemos la antiderivada en dos términos:

$$\int (\text{sen}\, x + 3\cos(5x))\, dx = \int \text{sen}\, x\, dx + 3\int \cos(5x)\, dx = -\cos x + \frac{3}{5}\,\text{sen}(5x) + C.$$

Compruebe al derivar que

$$\frac{d}{dx}\left(-\cos x + \frac{3}{5}\,\text{sen}(5x) + C\right) = \text{sen}\, x + 3\cos(5x).$$

Problemas para la sección 7.1

En los problemas del 1 al 18 encuentre una antiderivada.

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = 5x$
3. $f(x) = x^2$
4. $g(t) = t^2 + t$
5. $f(x) = x^4$
6. $g(t) = t^7 + t^3$
7. $f(q) = 5q^2$
8. $g(x) = 6x^3 + 4$
9. $g(z) = \sqrt{z}$
10. $f(x) = 5x - \sqrt{x}$
11. $h(z) = \frac{1}{z}$
12. $r(t) = \frac{1}{t^2}$
13. $g(z) = \frac{1}{z^3}$
14. $p(t) = t^3 - \frac{t^2}{2} - t$
15. $h(t) = 3t^2 + 7t + 1$
16. $f(t) = 2t^2 + 3t^3 + 4t^4$
17. $h(t) = \cos t$
18. $g(t) = \text{sen}\, t$

En los problemas del 19 al 24 encuentre una antiderivada $F(x)$ con $F'(x) = f(x)$ y $F(0) = 0$. ¿Existe solamente una solución?

19. $f(x) = 3$ **20.** $f(x) = -7x$

21. $f(x) = \frac{1}{4}x$ **22.** $f(x) = \sqrt{x}$

23. $f(x) = 2 + 4x + 5x^2$ **24.** $f(x) = e^x$

Encuentre las integrales indefinidas en los problemas del 25 al 54.

25. $\int 3x\,dx$ **26.** $\int (4t + 7)\,dt$

27. $\int (8t + 3)\,dt$ **28.** $\int 6x^2\,dx$

29. $\int t^{12}\,dt$ **30.** $\int (x^3 - x)\,dx$

31. $\int (x^2 + 1)\,dx$ **32.** $\int (x^3 + 4x + 8)\,dx$

33. $\int 5e^z\,dz$ **34.** $\int (q^2 + 5q + 2)dq$

35. $\int (x^5 - 12x^3)dx$ **36.** $\int (6\sqrt{x})dx$

37. $\int (x^2 + 4x - 5)dx$ **38.** $\int \left(\frac{5}{t^2} + \frac{6}{t^3}\right) dt$

39. $\int \left(1 + \frac{1}{p}\right) dp$ **40.** $\int e^{2t}\,dt$

41. $\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ **42.** $\int \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) dx$

43. $\int e^{-3t}\,dt$ **44.** $\int \cos\theta\,d\theta$

45. $\int \operatorname{sen} t\,dt$ **46.** $\int 30e^{-0.2t}dt$

47. $\int 100e^{4x}dx$ **48.** $\int (4x + 2e^x)dx$

49. $\int (5\cos x - 3\operatorname{sen} x)dx$ **50.** $\int \operatorname{sen}(3x)dx$

51. $\int \cos(4x)dx$ **52.** $\int 6\cos(3x)dx$

53. $\int (10 + 8\operatorname{sen}(2x))dx$

54. $\int (12\operatorname{sen}(2x) + 15\cos(5x))dx$

Encuentre una antiderivada $F(x)$ con $F'(x) = f(x)$ y $F(0) = 5$ en los problemas del 55 al 58.

55. $f(x) = x^2 + 1$ **56.** $f(x) = 6x - 5$

57. $f(x) = 6e^{3x}$ **58.** $f(x) = 8\operatorname{sen}(2x)$

7.2 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

En el capítulo 3 estudiamos las reglas para derivar cualquier función que se obtuviera al combinar constantes, potencias de x, sen x, cos x, e^x y ln x, empleando suma, multiplicación, división, o composición de funciones. Dichas funciones se denominan *elementales*.

En esta sección veremos la integración por sustitución. Sin embargo, hay una gran diferencia entre hallar derivadas y hallar antiderivadas. Cada función elemental tiene derivadas elementales; no obstante, muchas funciones elementales no tienen antiderivadas elementales. Algunos ejemplos son $\sqrt{x^3 + 1}$, $(\operatorname{sen}x)/x$ y e^{-x^2}. Éstas son funciones ordinarias que surgen naturalmente, no funciones extrañas, aunque no tengan antiderivadas elementales.

La integración por sustitución invierte la regla de la cadena. De acuerdo con la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \underbrace{f'}_{\text{Derivada de la función externa}}\overbrace{(g(x))}^{\text{Interior}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada de la función interna}}.$$

Por tanto, cualquier función que resulte de derivar con la regla de la cadena es producto de dos factores: la "derivada de la función externa" y la "derivada de la función interna". Si una función tiene esta forma, su antiderivada es $f(g(x))$.

Ejemplo 1 Utilice la regla de la cadena para encontrar $f'(x)$ y después escriba la fórmula de antiderivación que corresponda.

(a) $f(x) = e^{x^2}$ **(b)** $f(x) = \frac{1}{6}(x^2+1)^6$ **(c)** $f(x) = \ln(x^2+4)$

Solución **(a)** Al emplear la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right) = e^{x^2} \cdot 2x \text{ por lo que } \int e^{x^2} \cdot 2x\,dx = e^{x^2} + C.$$

(b) Al utilizar la regla de la cadena, podemos ver que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}(x^2+1)^6\right) = (x^2+1)^5 \cdot 2x \text{ entonces } \int (x^2+1)^5 \cdot 2x\,dx = \frac{1}{6}(x^2+1)^6 + C.$$

(c) Al usar la regla de la cadena, vemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln(x^2+4)) = \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x, \text{ por tanto } \int \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x\,dx = \ln(x^2+4) + C.$$

En el ejemplo 1, la derivada de cada función interna es $2x$. Observe que la derivada de la función interna es un factor del integrando en cada fórmula de antiderivación.

La búsqueda de una función interna cuya derivada parezca ser un factor es un asunto clave en el método de sustitución. Formalizamos este método así:

Para hacer una sustitución en una integral

Sea w la "función interna" y $dw = w'(x)\,dx = \frac{dw}{dx}dx$. Entonces exprese el integrando en términos de w.

Ejemplo 2 Realice una sustitución para encontrar cada una de las siguientes integrales

(a) $\int e^{x^2} \cdot 2x\,dx$ **(b)** $\int (x^2+1)^5 \cdot 2x\,dx$ **(c)** $\int \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x\,dx$

Solución **(a)** Buscamos una función interna cuya derivada aparezca como un factor. En este caso, la función interna es x^2, con derivada $2x$. Sea $w = x^2$. Entonces, $dw = w'(x)\,dx = 2x\,dx$. Ahora podemos reescribir el integrando original en términos de w:

$$\int e^{x^2} \cdot 2x\,dx = \int e^w\,dw = e^w + C = e^{x^2} + C.$$

Al cambiar la variable por w simplificamos el integrando. Después de antiderivar, el paso final es regresar de nuevo a la variable original, x.

(b) En este caso, la función interna es $x^2 + 1$, con derivada $2x$. Sea $w = x^2 + 1$. Entonces, $dw = w'(x)dx = 2x\,dx$. Al reescribir la integral original en términos de w, tenemos

$$\int (x^2+1)^5 \cdot 2x\,dx = \int w^5\,dw = \frac{1}{6}w^6 + C = \frac{1}{6}(x^2+1)^6 + C.$$

Nuevamente, simplificamos el integrando al cambiar la variable por w.

(c) La función interna es $x^2 + 4$, por tanto, sea $w = x^2 + 4$. Entonces, $dw = w'(x)\,dx = 2x\,dx$. Al sustituir, tenemos

$$\int \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x\,dx = \int \frac{1}{w}\,dw = \ln(w) + C = \ln(x^2+4) + C.$$

Observe que para que este método funcione, la derivada de la función interna debe estar presente en la integral. Sin embargo, este método funciona incluso cuando para tener la derivada falta un factor constante, como en los dos siguientes ejemplos.

Ejemplo 3 Encuentre $\int te^{(t^2+1)}\,dt.$

Solución Aquí, la función interna es $t^2 + 1$, con derivada $2t$. Como hay un factor de t en el integrando, lo intentamos con $w = t^2 + 1$. Entonces, $dw = w'(t)\,dt = 2t\,dt$. Sin embargo, observe que el integrando original sólo tiene $t\,dt$, no $2t\,dt$. Por tanto, escribimos

$$\frac{1}{2}\,dw = t\,dt$$

y entonces sustituimos:

$$\int te^{(t^2+1)}\,dt = \int e^{\overbrace{(t^2+1)}^{w}} \cdot \underbrace{t\,dt}_{\frac{1}{2}dw} = \int e^w\,\frac{1}{2}\,dw = \frac{1}{2}\int e^w\,dw = \frac{1}{2}e^w + C = \frac{1}{2}e^{(t^2+1)} + C.$$

¿Por qué no consideramos $\frac{1}{2}\int e^w dw = \frac{1}{2}e^w + \frac{1}{2}C$ en el ejemplo anterior? Como la constante C es arbitraria, en realidad no importa si sumamos C o $\frac{1}{2}C$. Lo convencional es siempre sumar C a cualquier antiderivada que hayamos calculado.

Ejemplo 4 Encuentre $\int x^3\sqrt{x^4+5}\,dx$.

Solución La función interna es $x^4 + 5$, con derivada $4x^3$. El integrando tiene un factor de x^3 y como la única cosa que falta es un factor constante, lo intentamos con

$$w = x^4 + 5.$$

Entonces

$$dw = w'(x)\,dx = 4x^3\,dx,$$

se obtiene

$$\frac{1}{4}dw = x^3\,dx.$$

Por tanto,

$$\int x^3\sqrt{x^4+5}\,dx = \int \sqrt{w}\,\frac{1}{4}dw = \frac{1}{4}\int w^{1/2}\,dw = \frac{1}{4}\cdot\frac{w^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{6}(x^4+5)^{3/2} + C.$$

¡Cuidado!

En los ejemplos anteriores vimos que se puede aplicar el método de sustitución cuando falte un factor *constante* en la derivada de la función interna. No obstante, no podemos usar la sustitución si falta otra cosa diferente a un factor constante. Por ejemplo, digamos que $w = x^4 + 5$ para encontrar

$$\int x^2\sqrt{x^4+5}\,dx$$

esto no es bueno porque x^2dx no es un múltiplo constante de $dw = 4x^3dx$. Para emplear la sustitución, el integrando debe contener la derivada de la función interna, salvo un factor constante.

A veces nos encontramos con que una sustitución nos lleva a una integral de la forma $\int(1/w)\,dw$, con antiderivada $\ln|w| + C$.

Ejemplo 5 Encuentre $\int \frac{t^2}{1+t^3}\,dt.$

Solución Si vemos que la derivada de $1 + t^3$ es $3t^2$, tomamos $w = 1 + t^3$, $dw = 3t^2dt$, de ahí que $\frac{1}{3}dw\ t^2dt$. Por tanto,

$$\int \frac{t^2}{1+t^3}\,dt = \int \frac{\frac{1}{3}\,dw}{w} = \frac{1}{3}\ln|w| + C = \frac{1}{3}\ln|1+t^3| + C.$$

Como el numerador es t^2dt, podemos intentarlo con $w = t^3$. Esta sustitución nos lleva a la integral $\frac{1}{3}\int 1/(1 + w)\,dw$. Para evaluar esta integral tendríamos que hacer una segunda sustitución $u = 1 + w$. Con frecuencia, hay más de una forma de resolver una integral por sustitución.

Uso de la sustitución con funciones periódicas

El método de sustitución funciona con todas las fórmulas de integración. En particular, se pueden utilizar en integrales con funciones periódicas.

Ejemplo 6 Encuentre $\int 3x^2\cos(x^3)\,dx$.

Solución Buscamos una función interna cuya derivada sea, en este caso, x^3. Sea $w = x^3$. Entonces, $dw = w'(x)\,dx = 3x^2\,dx$. Ahora se puede escribir completamente el integrando en términos de la nueva variable w:

$$\int 3x^2\cos(x^3)\,dx = \int \cos\underbrace{(x^3)}_{w}\cdot\underbrace{3x^2\,dx}_{dw} = \int \cos w\,dw = \operatorname{sen} w + C = \operatorname{sen}(x^3) + C.$$

Podemos simplificar el integrando cambiando la variable por w. Ahora tenemos $\cos w$, que puede antiderivarse de una forma más sencilla. Después de la antiderivación, el paso final es volver a la variable original, x.

Ejemplo 7 Encuentre $\int e^{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$.

Solución Sea $w = \cos\theta$ ya que su derivada es $-\operatorname{sen}\theta$ y hay un factor de $\operatorname{sen}\theta$ en el integrando. Esto nos da

$$dw = w'(\theta)\,d\theta = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta,$$

por tanto,

$$-dw = \operatorname{sen}\theta\,d\theta.$$

Entonces,

$$\int e^{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \int e^w\,(-dw) = (-1)\int e^w\,dw = -e^w + C = -e^{\cos\theta} + C.$$

Problemas para la sección 7.2

Encuentre las integrales en los problemas del 1 al 38. Compruebe sus respuestas mediante derivación.

1. $\int 2x(x^2+1)^5dx$
2. $\int \frac{4x^3}{x^4+1}dx$
3. $\int (x+10)^3dx$
4. $\int 5e^{5t+2}dt$
5. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$
6. $\int t\cos(t^2)\,dt$
7. $\int y(y^2+5)^8\,dy$
8. $\int t^2(t^3-3)^{10}\,dt$
9. $\int y^2(1+y)^2\,dy$
10. $\int x^2(1+2x^3)^2\,dx$
11. $\int x(x^2-4)^{7/2}\,dx$
12. $\int x(x^2+3)^2\,dx$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$
14. $\int \frac{dy}{y+5}$
15. $\int (2t-7)^{73}\,dt$
16. $\int (x^2+3)^2\,dx$
17. $\int \operatorname{sen}\theta(\cos\theta+5)^7\,d\theta$
18. $\int \sqrt{\cos 3t}\operatorname{sen} 3t\,dt$

19. $\int xe^{-x^2}\,dx$

20. $\int \operatorname{sen}^6\theta\cos\theta\,d\theta$

21. $\int x^2e^{x^3+1}\,dx$

22. $\int \operatorname{sen}^6(5\theta)\cos(5\theta)\,d\theta$

23. $\int \operatorname{sen}^3\alpha\cos\alpha\,d\alpha$

24. $\int x\operatorname{sen}(x^2)dx$

25. $\int e^{3x-4}dx$

26. $\int xe^{3x^2}dx$

27. $\int x\sqrt{x^2+1}dx$

28. $\int \frac{q}{5q^2+8}dq$

29. $\int \frac{(\ln z)^2}{z}\,dz$

30. $\int \frac{e^t+1}{e^t+t}\,dt$

31. $\int \frac{y}{y^2+4}\,dy$

32. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

33. $\int \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}\,dy$

34. $\int \frac{1+e^x}{\sqrt{x+e^x}}\,dx$

35. $\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx$

36. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+19}dx$

37. $\int \frac{t}{1+3t^2}\,dt$

38. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

39. Si procede, evalúe las siguientes integrales por sustitución. Si la sustitución no procede, indíquelo y no calcule.

(a) $\int x\operatorname{sen}(x^2)\,dx$ (b) $\int x^2\operatorname{sen}x\,dx$

(c) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ (d) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

(e) $\int x^3e^{x^2}\,dx$ (f) $\int \frac{\operatorname{sen}x}{2+\cos x}\,dx$

40. Encuentre $\int 4x(x^2+1)dx$ empleando dos métodos:

(a) Primero, haga la multiplicación, y después antiderive.

(b) Use la sustitución $w = x^2+1$.

(c) Explique en qué difieren las expresiones de los incisos (a) y (b). ¿Ambas son correctas?

7.3 USO DEL TEOREMA FUNDAMENTAL PARA HALLAR INTEGRALES DEFINIDAS

En la sección anterior calculamos antiderivadas. En esta sección veremos la forma de utilizar antiderivadas para calcular exactamente integrales definidas. Este cálculo está basado en el teorema fundamental:

Teorema fundamental del cálculo Si F', la derivada de F es continua, entonces

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Hasta ahora hemos aproximado integrales definidas usando una gráfica o sumas por la izquierda o por la derecha. El teorema fundamental del Cálculo nos da otro método para calcular integrales definidas. Para hallar $\int_a^b F'(x)\,dx$, primero tratamos de encontrar F y luego calculamos $F(b)-F(a)$. Este método para calcular integrales definidas tiene una ventaja importante: da una respuesta exacta. No obstante, el método sólo funciona cuando podemos encontrar una fórmula para la antiderivada $F(x)$.

Ejemplo 1 Calcule $\int_1^3 2x\,dx$ numéricamente y empleando el teorema fundamental.

Solución Utilizando una calculadora tenemos

$$\int_1^3 2x\,dx = 8.0\ldots.$$

El teorema fundamental permite calcular exactamente la integral. Tomamos $F'(x) = 2x$, de modo que $F(x) = x^2$ y obtenemos

$$\int_1^3 2x\,dx = F(3) - F(1) = 3^2 - 1^2 = 8.$$

En el ejemplo 1 empleamos la antiderivada $F(x) = x^2$, pero $F(x) = x^2 + C$ funciona igualmente bien para cualquier constante C, porque la constante se cancela cuando restamos $F(a)$ de $F(b)$:

$$\int_1^3 2x\,dx = F(3) - F(1) = (3^2 + C) - (1^2 + C) = 8.$$

Es útil introducir una notación breve para $F(b) - F(a)$; la escribimos como

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Por ejemplo:

$$\int_1^3 2x\,dx = x^2\Big|_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8.$$

Ejemplo 2 Utilice el teorema fundamental para calcular las siguientes integrales definidas:

(a) $\int_0^2 6x^2\,dx$ **(b)** $\int_0^2 t^3\,dt$ **(c)** $\int_1^2 (8x+5)\,dx$ **(d)** $\int_0^1 8e^{2t}\,dt$

Solución **(a)** Como $F'(x) = 6x^2$, tomamos $F(x) = 6(x^3/3) = 2x^3$. Por tanto,

$$\int_0^2 6x^2 dx = 6\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 2x^3\Big|_0^2 = 2\cdot 2^3 - 2\cdot 0^3 = 16.$$

(b) Como $F'(t) = t^3$, tomamos $F(t) = t^4/4$, por tanto,

$$\int_0^2 t^3\,dt = F(t)\Big|_0^2 = F(2) - F(0) = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{16}{4} - 0 = 4.$$

(c) Como $F'(x) = 8x + 5$, tomamos $F(x) = 4x^2 + 5x$, por tanto

$$\int_1^2 (8x+5)dx = (4x^2+5x)\Big|_1^2 = (4\cdot 2^2 + 5\cdot 2) - (4\cdot 1^2 + 5\cdot 1)$$
$$= 26 - 9 = 17.$$

(d) Como $F'(t) = 8e^{2t}$, tomamos $F(t) = (8e^{2t})/2 = 4e^{2t}$, por tanto

$$\int_0^1 8e^{2t}dt = 8\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)\Big|_0^1 = 4e^{2t}\Big|_0^1 = 4e^2 - 4e^0 = 25.556.$$

Ejemplo 3 Escriba una integral definida que represente el área bajo la gráfica de $f(t) = e^{0.5t}$ entre $t = 0$ y $t = 4$. Utilice el teorema fundamental para calcular el área.

Solución En la figura 7.1 se muestra la gráfica de la función. Tenemos

$$\text{Área} = \int_0^4 e^{0.5t}dt = 2e^{0.5t}\Big|_0^4 = 2e^{0.5(4)} - 2e^{0.5(0)} = 2e^2 - 2 = 12.778.$$

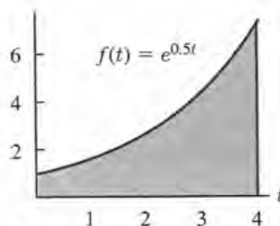


Figura 7.1. Área sombreada $= \int_0^4 e^{0.5t}\,dt$.

Integrales definidas por sustitución

Como veremos en el siguiente ejemplo, hay dos maneras de calcular una integral definida por sustitución.

Ejemplo 4 Calcule $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$.

Solución Para calcular esta integral definida mediante el teorema fundamental del Cálculo, primero necesitamos determinar la antiderivada de $f(x) = xe^{x^2}$. La función interna es x^2; por tanto, sea $w = x^2$. Entonces $dw = 2x\,dx$, por lo que $\frac{1}{2}\,dw = x\,dx$. Por consiguiente,

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^w \frac{1}{2}\,dw = \frac{1}{2}e^w + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Ahora encontramos la integral definida

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^0) = \frac{1}{2}(e^4 - 1).$$

Hay otra forma de resolver el mismo problema. Después de establecer que

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^w + C,$$

nuestros siguientes dos pasos fueron reemplazar w por x^2, y después x por 2 y 0. Pudimos haber reemplazado directamente los límites de integración originales, $x = 0$ y $x = 2$, por los límites correspondientes de w. Como $w = x^2$, los límites de w son $w = 0^2 = 0$ (cuando $x = 0$) y $w = 2^2 = 4$ (cuando $x = 2$), por lo cual tenemos

$$\int_{x=0}^{x=2} xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{w=0}^{w=4} e^w\,dw = \frac{1}{2}e^w\Big|_0^4 = \frac{1}{2}\left(e^4 - e^0\right) = \frac{1}{2}(e^4 - 1).$$

Como esperábamos, ambos métodos producen la misma respuesta.

Uso de la sustitución para hallar integrales definidas

Puede

- Calcular la integral indefinida expresando una antiderivada en términos de la variable original, y después evaluar el resultado en los límites originales.

O

- Convertir los límites originales en nuevos límites en términos de la nueva variable y no regresar la antiderivada a la variable original.

Integrales impropias

Hasta aquí, en nuestro análisis de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, hemos supuesto que el intervalo $a \le x \le b$ es de longitud finita y el integrando f es continuo. Una *integral impropia* es una integral definida en la que uno (o ambos) de los límites de integración es infinito o el integrando es no acotado. Un ejemplo de una integral impropia es

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

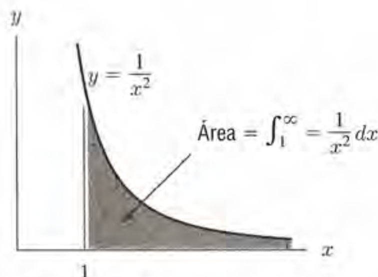


Figura 7.2. Representación del área de la integral impropia.

Esta integral representa el área bajo la gráfica de $\frac{1}{x^2}$ de $x = 1$ hasta x infinitamente lejos hacia la derecha (véase la figura 7.2).

Calculamos esta área tomando el límite superior de integración más y más grande. Vemos que

$$\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = 0.9, \qquad \int_1^{100} \frac{1}{x^2}\,dx = 0.99, \qquad \int_1^{1,000} \frac{1}{x^2}\,dx = 0.999,$$

y así sucesivamente. Estos cálculos sugieren que cuando el límite superior de integración tiende al infinito, el área se aproxima a 1. Se dice que la integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ *converge* a 1. Para demostrar que la integral converge exactamente a 1 (y no a 1.001, por ejemplo), necesitamos usar el teorema fundamental del Cálculo (véase el problema 36). Puede parecer extraño que la región sombreada en la figura 7.2 (que tiene longitud infinita) pueda tener área *finita*. El área es finita porque los valores de la función $1/x^2$ se aproximan a cero muy rápido a medida que $x \to \infty$. En otros ejemplos (donde el integrando no se aproxima a cero tan rápido), el área representada por una integral impropia puede no ser finita. En ese caso, decimos que la integral impropia *diverge* (véase el problema 37).

Problemas para la sección 7.3

Empleando el teorema fundamental, calcule exactamente las integrales definidas de los problemas del 1 al 20.

1. $\int_1^3 5\,dx$

2. $\int_0^4 6x\,dx$

3. $\int_1^2 (2x+3)\,dx$

4. $\int_0^2 (12x^2+1)\,dx$

5. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

6. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

7. $\int_0^3 t^3\,dt$

8. $\int_0^5 3x^2\,dx$

9. $\int_1^3 6x^2\,dx$

10. $\int_1^2 5t^3\,dt$

11. $\int_0^1 (y^2+y^4)\,dy$

12. $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx$

13. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

14. $\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\,dx$

15. $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{r^3}\,dr$

16. $\int_0^1 2e^x\,dx$

17. $\int_0^1 e^{-0.2t}\,dt$

18. $\int_0^1 \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

19. $\int_{-1}^1 \cos t\,dt$

20. $\int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} t + \cos t)\,dt$

21. Utilice la sustitución para expresar cada una de las siguientes integrales como múltiplo de $\int_a^b (1/w)\,dw$ para alguna a y b. Después calcule las integrales.

(a) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ **(b)** $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$

Use la integración por sustitución y el teorema fundamental para calcular las integrales definidas de los problemas 22 y 23.

22. $\int_0^2 x(x^2+1)^2\,dx$

23. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,dt$

24. Escriba la integral definida que representa el área bajo la gráfica de $f(x) = 6x^2 + 1$ entre $x = 0$ y $x = 2$. Utilice el teorema fundamental del cálculo para evaluarla.

25. Utilice el teorema fundamental para encontrar el área bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ entre $x = 1$ y $x = 4$.

26. Use el teorema fundamental para hallar el valor promedio de $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 10$. Ilustre su respuesta en una gráfica de $f(x)$.

27. Utilice el teorema fundamental para encontrar el valor promedio de $f(x) = e^{0.5x}$ entre $x = 0$ y $x = 3$. Muestre el valor promedio en una gráfica de $f(x)$.

28. Encuentre el área exacta de la región delimitada por el eje x y la gráfica de $y = x^3 - x$.

29. Encuentre el área exacta bajo la gráfica de $f(x) = xe^{x^2}$ entre $x = 0$ y $x = 2$.

30. Utilice el teorema fundamental para calcular el valor de b si el área bajo la gráfica de $f(x) = 8x$ entre $x = 1$ y $x = b$ es igual a 192. Suponga que $b > 1$.

31. Emplee el teorema fundamental para determinar el valor de b si el área bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ y $x = b$ es igual a 100. Suponga que $b > 0$.

32. Suponga que la tasa a la que se está consumiendo el petróleo en el mundo se puede modelar con

$$r = 32e^{0.05t},$$

donde r está en miles de millones de barriles al año, t es en años y $t = 0$ es el primero de enero de 1990.

(a) Escriba una integral definida que mida la cantidad total de petróleo consumida entre el inicio de 1990 y el inicio de 1995.

(b) Utilice el teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral. Indique las unidades en su respuesta.

33. Se está derramando petróleo por una fisura de un buque petrolero a una razón de $r(t) = 50e^{-0.02t}$ miles de litros por minuto.

(a) ¿A qué tasa, en litros por minuto, se está derramando el petróleo en $t = 0$? ¿En $t = 60$?

(b) ¿Cuántos litros se derraman durante la primera hora?

34. (a) Trace una gráfica de $f(x) = e^{-x^2}$ y sombree el área que representa la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

(b) Encuentre $\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$ para $a = 1, a = 2, a = 3, a = 5$.

(c) La integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge a un valor finito. Utilice sus respuestas del inciso (b) para estimar dicho valor.

35. Trace una gráfica de $y = 1/x^2$ y $y = 1/x^3$ en un mismo sistema de coordenadas. ¿Cuál cree que es mayor: $\int_1^{\infty} 1/x^2dx$ o $\int_1^{\infty} 1/x^3dx$ Por qué?

36. En este problema, usted demostrará que la siguiente integral impropia converge a 1.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

(a) Emplee el teorema fundamental para determinar $\int_1^b 1/x^2\,dx$. Su respuesta debe contener b.

(b) Ahora, tome el límite $b \to \infty$. ¿Qué le dice esto sobre la integral impropia?

37. Considere la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

(a) Utilice una calculadora para determinar $\int_1^b 1/(\sqrt{x})dx$ para $b = 100, 1{,}000, 10{,}000$. ¿Qué observa?

(b) Encuentre $\int_1^b 1/(\sqrt{x})dx$ mediante el teorema fundamental del cálculo. Su respuesta debe contener b.

(c) Ahora, tome el límite $b \to \infty$. ¿Qué le dice esto sobre la integral impropia?

38. (a) Evalúe $\int_0^b xe^{-x/10}dx$ para $b = 10, 50, 100, 200$.

(b) Suponiendo que converge, evalúe el valor de $\int_0^{\infty} xe^{-x/10}dx$.

39. La razón, r, a la que se enferman las personas durante una epidemia de gripe puede aproximarse con

$$r = 1{,}000te^{-0.5t}$$

donde r se mide en personas/día y t se mide en días desde el inicio de la epidemia.

(a) Escriba una integral impropia que represente el número total de personas que se enferman.

(b) Utilice una gráfica de r para representar la integral impropia del inciso (a) como área.

40. En un tiempo de t horas después de tomar una tableta, la razón a la que se elimina un medicamento es de

$$r(t) = 50(e^{-0.1t} - e^{-0.2t})\text{ mg/hr.}$$

Suponga que por fin se elimina todo el medicamento, y calcule la dosis original.

7.4 ANÁLISIS GRÁFICO Y NUMÉRICO DE LAS ANTIDERIVADAS

En esta sección utilizamos el teorema fundamental para calcular valores de F cuando se conocen la razón de cambio, F', y un valor de la función, $F(a)$.

Ejemplo 1 Suponga que $F'(t) = (1.8)^t$ y $F(0) = 2$. Encuentre el valor de $F(b)$ para $b = 0, 0.1, 0.2, ..., 1.0$.

Solución Aplique el teorema fundamental del cálculo con $F'(t) = (1.8)^t$ y $a = 0$ para obtener los valores de $F(b)$. Como

$$F(b) - F(0) = \int_0^b F'(t)\,dt = \int_0^b (1.8)^t\,dt$$

y $F(0) = 2$, tenemos

$$F(b) = 2 + \int_0^b (1.8)^t\,dt.$$

Utilice una calculadora o computadora para calcular la integral definida $\int_0^b (1.8)^t dt$ para cada valor de b. Por ejemplo, cuando $b = 0.1$, encontramos que $\int_0^b (1.8)^t dt = 0.103$. Por tanto, $F(0.1) = 2.103$. Al continuar en esta forma, resultan los valores de la tabla 7.1.

Tabla 7.1 *Valores aproximados de F.*

b	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$F(b)$	2	2.103	2.212	2.328	2.451	2.581	2.719	2.866	3.021	3.186	3.361

Observe en la tabla que la función $F(b)$ es creciente entre $b = 0$ y $b = 1$. Esto se debe a que la derivada $F'(t) = (1.8)^t$ es positiva para t entre 0 y 1.

Ejemplo 2 En la figura 7.3 se muestra la gráfica de la derivada F' de una función F. Suponiendo que $F(20) = 150$, calcule el valor máximo que alcanza F.

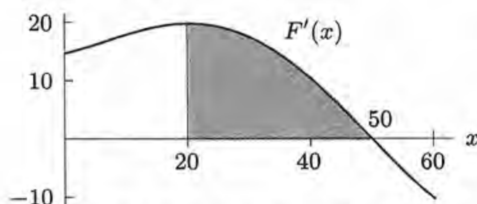


Figura 7.3. Gráfica de la derivada F' de alguna función F.

Solución Sabemos que $F(x)$ aumenta para $x < 50$ debido a que la derivada de F es positiva para $x < 50$. Del mismo modo, $F(x)$ decrece para $x > 50$ porque $F'(x)$ es negativa para $x > 50$. Por tanto, la gráfica de F sube hasta el punto en el que $x = 50$ y después comienza a descender. Por consiguiente, el punto más alto en la gráfica de F está en $x = 50$ y el máximo valor que alcanza F es $F(50)$. De acuerdo con el teorema fundamental:

$$F(50) - F(20) = \int_{20}^{50} F'(x)\,dx.$$

como $F(20) = 150$, tenemos

$$F(50) = F(20) + \int_{20}^{50} F'(x)\,dx = 150 + \int_{20}^{50} F'(x)\,dx.$$

La integral definida es el área de la región sombreada bajo la gráfica de F, que es aproximadamente igual al área de un triángulo de base 30 y altura 20. Por tanto, el área sombreada es aproximadamente 300 y el máximo valor que alcanza F es $F(50) \approx 150 + 300 = 450$.

Trazado de la gráfica de una función, dada una gráfica de su derivada

Suponga que tenemos la gráfica de f' y deseamos trazar la gráfica de f. Sabemos que cuando f' es positiva, f es creciente, y cuando f' es negativa, f es decreciente. Si queremos saber cuánto aumenta o disminuye f, calculamos una integral definida.

Ejemplo 3 La figura 7.4 muestra la razón de cambio de concentración de adrenalina, en microgramos por milímetro por minuto, en un cuerpo humano. Trace una gráfica de la concentración de adrenalina, en microgramos por milímetro, en el cuerpo como una función de tiempo, en minutos.

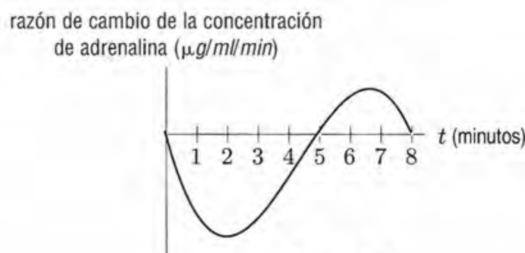


Figura 7.4.

Solución Como la concentración inicial no está dada, podemos comenzar la gráfica en cualquier punto del eje vertical positivo. La razón de cambio es negativa para $t < 5$ y positiva para $t > 5$, así que la concentración de adrenalina disminuye hasta $t = 5$ y después aumenta. Como el área debajo del eje t es mayor que el área arriba del eje t, la concentración de adrenalina disminuye más de lo que aumenta. Por consiguiente, la concentración en $t = 8$ es menor que la concentración en $t = 0$. Como la razón de cambio de la concentración es cero para $t = 0$, 5 y 8, la gráfica de la concentración es horizontal en estos puntos. Véase la figura 7.5.

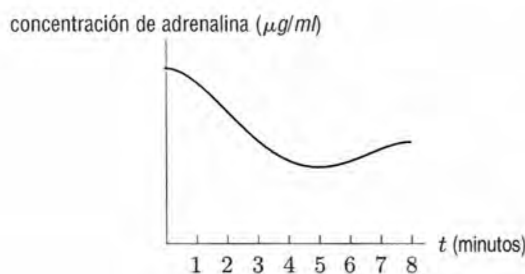


Figura 7.5.

Ejemplo 4 En la figura 7.6 aparece la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$ y los valores de algunas áreas. Si $f(0) = 10$, dibuje una gráfica de la función $f(x)$. Señale las coordenadas de los máximos y mínimos locales.

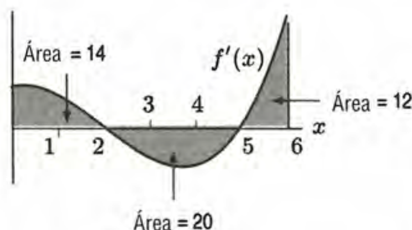


Figura 7.6. La gráfica de una derivada f'.

Solución La figura 7.6 muestra que la derivada f' es positiva entre 0 y 2, negativa entre 2 y 5, y positiva entre 5 y 6. Por tanto, la función f es creciente entre 0 y 2, decreciente entre 2 y 5, y creciente entre 5 y 6 (véase la figura 7.7). Hay un máximo local en $x = 2$ y un mínimo local en $x = 5$.

Observe que podemos graficar la forma general de la curva de f sin conocer las áreas. Las áreas se utilizan para dibujar una gráfica más precisa. Dijimos que $f(0) = 10$, por lo que graficamos el punto (0,10) en la gráfica de f, en la figura 7.8. El teorema fundamental y la figura 7.6 muestran que

$$f(2) - f(0) = \int_0^2 f'(x)\,dx = 14.$$

Por tanto, el cambio total en f entre $x = 0$ y $x = 2$ es 14. Como $f(0) = 10$, tenemos

$$f(2) = 10 + 14 = 24.$$

El punto (2, 24) está en la gráfica de f. Véase la figura 7.8.

La figura 7.6 muestra que el área entre $x = 2$ y $x = 5$ es 20. Como el área está completamente abajo del eje de x, el teorema fundamental nos da

$$f(5) - f(2) = \int_2^5 f'(x)\,dx = -20.$$

El cambio total en f es -20 entre $x = 2$ y $x = 5$. Como $f(2) = 24$, tenemos que

$$f(5) = 24 - 20 = 4.$$

De ahí que el punto (5, 4) esté en la gráfica de f. Finalmente,

$$f(6) = f(5) + \int_5^6 f'(x)\,dx = 4 + 12 = 16,$$

por lo que el punto (6, 16) está en la gráfica de f.

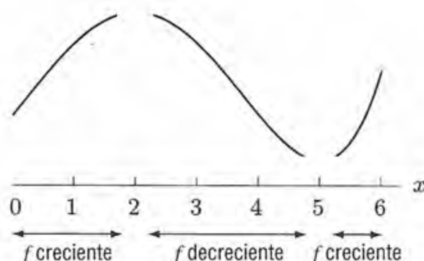


Figura 7.7. La forma de f.

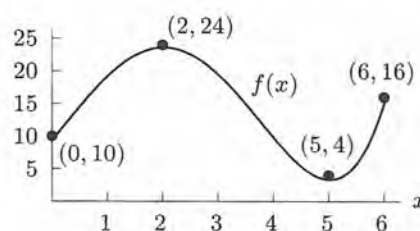


Figura 7.8. La gráfica de f.

En esta sección hemos visto cómo analizar antiderivadas mediante el teorema fundamental del cálculo en la forma

$$F(b) = F(0) + \int_0^b F'(t)\,dt.$$

En la sección 8.2 veremos cómo construir antiderivadas por medio del segundo teorema fundamental, que presentamos en la página 253. Esta versión del teorema establece que si f es una función continua en un intervalo, y si a es cualquier número en dicho intervalo, entonces la función F definida mediante

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es una antiderivada de f; es decir $F' = f$.

Problemas para la sección 7.4

1. La figura 7.9 muestra la gráfica de f. Si $F' = f$ y $F(0) = 0$, encuentre $F(b)$ para $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

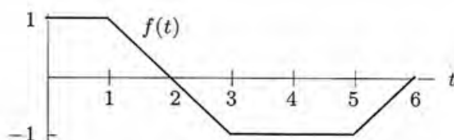


Figura 7.9.

2. En la figura 7.10 se muestra la gráfica de la derivada $F'(t)$. Dado $F(0) = 5$, calcule $F(t)$ para $t = 1, 2, 3, 4, 5$

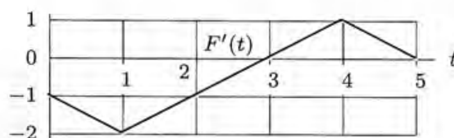


Figura 7.10.

3. La figura 7.11 muestra la derivada g'. Si $g(0) = 0$, trace la gráfica de g. Señale las coordenadas (x, y) de todos los máximos y mínimos locales.

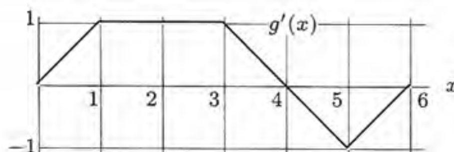


Figura 7.11.

4. **(a)** Usando la figura 7.12, estime $\int_0^7 f(x)dx$
   (b) Si F es una antiderivada de la misma función f y $F(0) = 25$, estime $F(7)$.

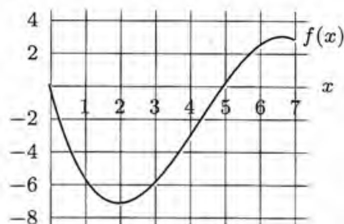
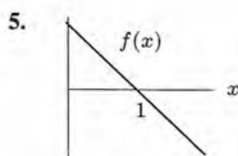


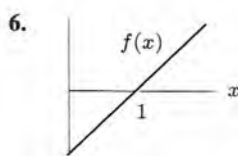
Figura 7.12.

Para los problemas 5 y 6 trace una gráfica de dos funciones F de forma que $F' = f$. En un caso tome $F(0) = 0$ y en el otro, $F(0) = 1$.

5.



6.



7. La figura 7.13 muestra la razón a la que se realiza la fotosíntesis en una hoja. La razón a la que crece la hoja es aproximadamente proporcional a la tasa de la fotosíntesis. Grafique el tamaño de la hoja respecto al tiempo durante 100 días.

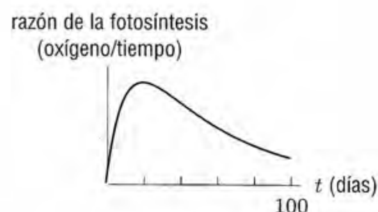


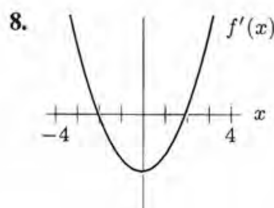
Figura 7.13.

Los problemas del 8 al 11 muestran la derivada f' de f.

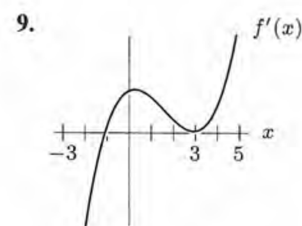
(a) ¿En cuáles puntos es creciente f y en cuáles es decreciente? ¿Cuáles son las coordenadas en el eje de las x de los máximos y mínimos locales de f?

(b) Dibuje una gráfica posible de f. (No necesita una escala en el eje vertical.)

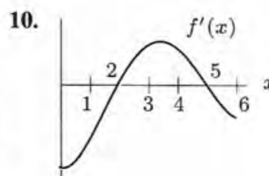
8.



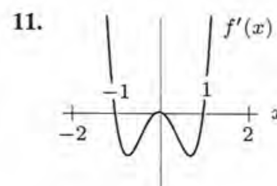
9.



10.



11.



12. La figura 7.14 muestra la derivada F'. Si $F(0) = 14$, trace una gráfica de F. Dé las coordenadas (x, y) de todos los máximos y mínimos locales.

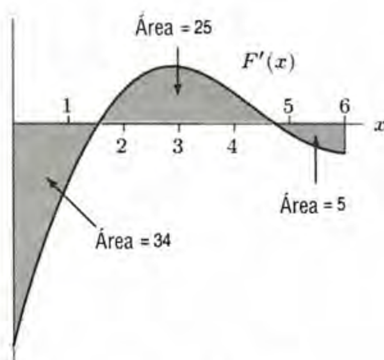


Figura 7.14.

13. La figura 7.15 ilustra la derivada $F'(t)$. Si $F(0)$ 3, encuentre los valores de $F(2)$, $F(5)$, $F(6)$. Trace una gráfica de $F(t)$.

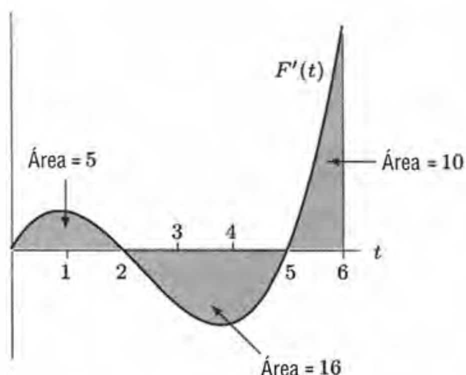


Figura 7.15.

14. La figura 7.16 muestra la derivada F' de F. Sea $F(0) = 0$. De los cuatro números $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$ y $F(4)$, ¿cuál es el mayor? ¿Cuál es el menor? ¿Cuántos son negativos?

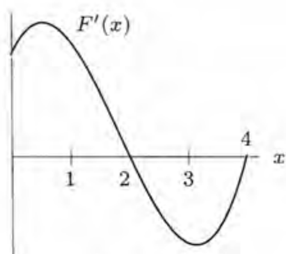


Figura 7.16

15. Los urólogos son especialistas en la salud de la vejiga. En un examen de diagnóstico común, los urólogos monitorean el vaciamiento de la vejiga por medio de un dispositivo que arroja dos gráficas. En una de las gráficas la razón del flujo (en milímetros por segundo) se mide como función del tiempo (en segundos). En la otra gráfica, el volumen vaciado por la vejiga se mide (en mililitros) como función del tiempo (en segundos). Véase la figura 7.17.

(a) ¿Qué gráfica representa la razón de flujo y qué gráfica el volumen?

(b) ¿Cuál de estas gráficas es una antiderivada de la otra?

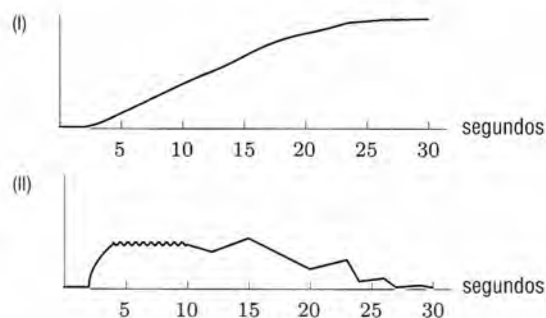


Figura 7.17.

16. Utilice la figura 7.18 y la afirmación $F(2) = 3$ para dibujar la gráfica de $F(x)$. Indique los valores de por menos cuatro puntos.

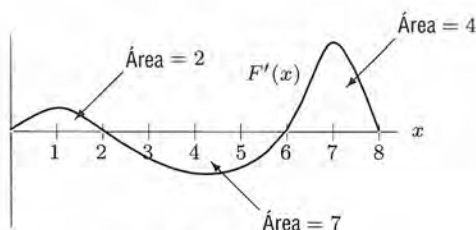


Figura 7.18.

17. A partir de la figura 7.19, trace una gráfica de una antiderivada $G(t)$ de $g(t)$ que satisfaga $G(0) = 5$. Señale cada punto crítico de $G(t)$ junto con sus coordenadas.

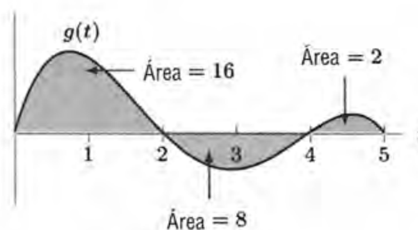
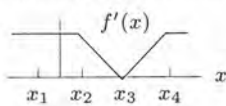


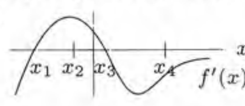
Figura 7.19.

Los problemas 18 y 19 muestran una gráfica de $f'(x)$. Trace una gráfica de $f(x)$. Señale los puntos x_1, ..., x_4 en su gráfica, e indique máximos locales, mínimos locales y los puntos de inflexión.

18.



19.



Los problemas 20 y 21 se refieren a la gráfica de f' en la figura 7.20.

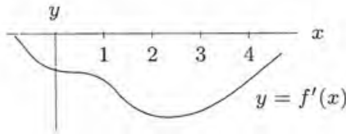


Figura 7.20. Observe: es la gráfica de f', no la de f.

20. ¿Cuál es mayor, $f(0)$ o $f(1)$?

21. Ordene de manera ascendente:

$$\frac{f(4)-f(2)}{2}, \quad f(3)-f(2), \quad f(4)-f(3).$$

En los problemas del 22 al 25, muestre las siguientes cantidades en la figura 7.21.

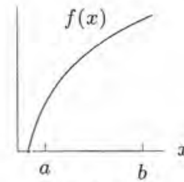


Figura 7.21.

22. Una longitud que represente $f(b) - f(a)$.

23. Una pendiente que represente $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

24. Un área que represente $F(b) - F(a)$, en la que $F' = f$.

25. Una longitud que más o menos se aproxime a

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}, \text{ donde } F' = f.$$

RESUMEN DEL CAPÍTULO

- **Cálculo de antiderivadas**

  Potencias y polinomios, e^{kx}, sen(kx), cos(kx), integración por sustitución.
- **Uso de antiderivadas para calcular analíticamente integrales definidas**
- **Uso de las integrales definidas para calcular numérica y gráficamente antiderivadas**
- **Integrales impropias**

PROBLEMAS DE REPASO

Para los problemas del 1 al 16, calcule una antiderivada.

1. $k(x) = 10 + 8x^3$

2. $p(x) = x^2 - 6x + 17$

3. $g(t) = e^{-3t}$

4. $f(x) = 3x^2 + 5$

5. $f(x) = 6x^2 - 8x + 3$

6. $q(y) = y^4 + \dfrac{1}{y}$

7. $f(x) = x + x^5 + x^{-5}$

8. $f(z) = e^z + 3$

9. $p(r) = 2\pi r$

10. $g(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

11. $f(x) = x^6 - \dfrac{1}{7x^6}$

12. $p(y) = \dfrac{1}{y} + y + 1$

13. $g(t) = 5 + \cos t$

14. $g(\theta) = \operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta$

15. $g(x) = (x+1)^3$

16. $f(x) = (2x+1)^3$

Para los problemas 17 al 28, encuentre las integrales indefinidas.

17. $\displaystyle\int 9x^2\,dx$

18. $\displaystyle\int (5x+7)\,dx$

19. $\displaystyle\int (t^2 - 6t + 5)\,dt$

20. $\displaystyle\int (x+1)^2\,dx$

21. $\displaystyle\int (e^x + 5)\,dx$

22. $\displaystyle\int e^{-0.05t}\,dt$

23. $\displaystyle\int \left(\frac{3}{t} - \frac{2}{t^2}\right) dt$

24. $\displaystyle\int \left(\frac{x+1}{x}\right) dx$

25. $\displaystyle\int \left(8x^3 + \frac{1}{x}\right) dx$

26. $\displaystyle\int (3\cos x - 7\operatorname{sen} x)\,dx$

27. $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x} + \pi\operatorname{sen} x\right) dx$

28. $\displaystyle\int (2e^x - 8\cos x)\,dx$

Para los problemas 29 al 34, calcule las integrales definidas mediante el teorema fundamental.

29. $\int_0^2 (3t^2 + 4t + 3)\,dt$ **30.** $\int_0^1 (6q^2 + 4)\,dq$

31. $\int_0^3 e^{0.05t}\,dt$ **32.** $\int_1^2 \frac{1}{2t}\,dt$

33. $\int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt$ **34.** $\int_2^5 (x^3 - \pi x^2)\,dx$

Para los problemas 35 al 37, encuentre una antiderivada para $F(x)$ con $F'(x) = f(x)$ y $F(0) = 0$. ¿Sólo hay una solución posible?

35. $f(x) = 2x$ **36.** $f(x) = x^2$ **37.** $f(x) = \operatorname{sen} x$

Para los problemas 38 al 47, integre por sustitución.

38. $\int 3x^2(x^3+1)^4 dx$ **39.** $\int 2qe^{q^2+1} dq$

40. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$ **41.** $\int \frac{1}{(3x+1)^2} dx$

42. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$ **43.** $\int (5x-7)^{10} dx$

44. $\int 100e^{-0.2t} dt$ **45.** $\int x\sqrt{3x^2+4}\,dx$

46. $\int x \operatorname{sen}(4x^2) dx$ **47.** $\int 12x^2 \cos(x^3) dx$

48. Utilice el teorema fundamental para hallar el área que está bajo la gráfica de $f(x) = 1/(x+1)$ entre $x = 0$ y $x = 2$.

49. Si t está dada en años desde 1990, la población, P, del mundo en miles de millones se puede modelar por $P = 5.3e^{0.014t}$.

(a) ¿Qué arroja este modelo respecto a la población mundial en 1990? ¿En 2000?

(b) Emplee el teorema fundamental para encontrar la población mundial promedio en la década de 1990.

50. Use el teorema fundamental para calcular el valor de b si el área bajo la gráfica de $f(x) = 4x$ entre $x = 1$ y $x = b$ es igual a 240. Suponga que $b > 1$.

51. Utilice la figura 7.22 y el hecho de que $P = 2$ cuando $t = 0$ para determinar los valores de P cuando $t = 1, 2, 3, 4$ y 5.

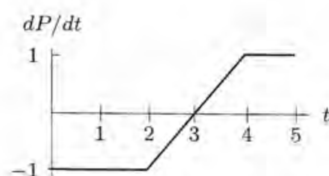


Figura 7.22.

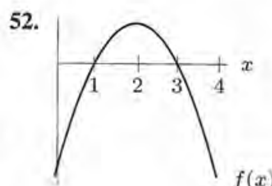
Para los problemas 52 y 53 se muestra una gráfica de f. Sea $F'(x) = f(x)$.

(a) ¿Cuáles son los puntos críticos de $F(x)$?

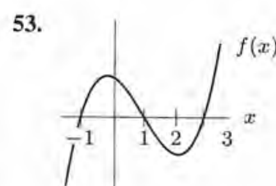
(b) ¿Qué puntos críticos son máximos locales, cuáles son mínimos locales, cuáles no son ninguno de éstos?

(c) Dibuje una posible gráfica de $F(x)$.

52.



53.



54. La figura 7.23 muestra la derivada $F'(x)$. Si $F(0) = 5$, encuentre el valor de $F(1)$, $F(3)$ y $F(4)$.

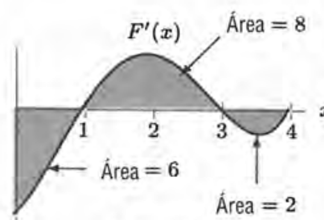


Figura 7.23.

55. (a) En la década de 1970 las ventas de Productos ACME tuvieron una razón continua de $R = R_0e^{0.15t}$ artículos por año, donde t es el tiempo en años desde el primero de enero de 1970. Suponga que vendieron artículos a razón de 1,000 por año en el primer día de la década. ¿Cuántos artículos vendieron durante esa década? ¿Cuántos vendieron, si la razón al primero de enero de 1970 era de 150,000,000 de artículos por año?

(b) En el primer caso que mencionamos (1,000 artículos por año al primero de enero de 1970), ¿cuánto tiempo se necesitó para que se vendieran la mitad de los artículos en la década de 1970? En el segundo caso (150,000,000 productos por año al primero de enero de 1970), ¿cuándo se vendió la mitad de los artículos en la década de 1970?

(c) En 1980 ACME lanzó una campaña de publicidad afirmando que la mitad de los artículos vendidos en la década anterior aún servían. Basándose en su respuesta al inciso (b), ¿aproximadamente cuánto tiempo debe durar un artículo para que esta afirmación sea cierta?

56. (a) Trace una gráfica del área que representa la integral impropia $\int_0^\infty xe^{-x}dx$.

(b) Calcule $\int_0^b xe^{-x}dx$ para $b = 5, 10, 20$.

(c) La integral impropia del inciso (a) converge. Utilice sus respuestas del inciso (b) para estimar su valor.

57. Decida si la integral impropia $\int_0^\infty e^{-2t}dt$ converge, si es así, a qué valor, mediante el siguiente método
   (a) Calcule $\int_0^b e^{-2t}dt$ para $b = 3, 5, 7, 10$. ¿Qué observa? Infiera la convergencia de la integral impropia.
   (b) Encuentre $\int_0^b e^{-2t}dt$ utilizando el teorema fundamental. Su respuesta debe contener b.
   (c) Tome el límite $b \to \infty$. ¿Su respuesta confirma su inferencia?

58. Una isla tiene una capacidad de carga de un millón de conejos. (Esto significa que la isla no puede alimentar a más de un millón de conejos.) La población de conejos es de dos en el tiempo $t = 1$ día y crece a una razón de $r(t)$ miles de conejos/día hasta alcanzar la capacidad de carga. Para cada una de las siguientes fórmulas de $r(t)$, ¿se alcanza alguna vez la capacidad de carga? Explique su respuesta.
   (a) $r(t) = 1/t^2$
   (b) $r(t) = t$
   (c) $r(t) = 1/\sqrt{t}$

59. Un automóvil se mueve a una velocidad, v, en un tiempo t en horas según

$$v(t) = \frac{60}{50^t} \text{ millas/hora}$$

   (a) ¿El automóvil se detiene alguna vez?
   (b) Escriba una integral que represente la distancia total que el automóvil recorrería cuando $t \geq 0$.
   (c) ¿Cree usted que el automóvil avanza a una distancia finita cuando $t \geq 0$? Si es así, calcule dicha distancia.

PROYECTOS

1. **Presa Quabbin.** La presa Quabbin, en la región oeste de Massachussets, suministra la mayor parte del agua a Boston. La gráfica de la figura 7.24 representa el caudal de agua que entró y salió de la presa Quabbin en 1993.
   (a) Trace una posible gráfica de la cantidad de agua que hay en la presa, como función de tiempo.
   (b) Durante 1993, ¿cuándo estuvo al máximo la cantidad de agua de la presa? ¿Al mínimo? Señale y marque estos puntos en la gráfica que dibujó para el inciso (a).
   (c) ¿Cuándo aumentó más rápido la cantidad de agua? ¿Cuándo disminuyó más rápido? Señale y marque estos momentos en ambas gráficas.
   (d) En julio de 1994 la cantidad de agua de la presa era casi igual que en enero de 1993. Trace posibles gráficas del caudal de entrada y salida de agua de la presa en la primera mitad de 1994. Explique sus respuestas.

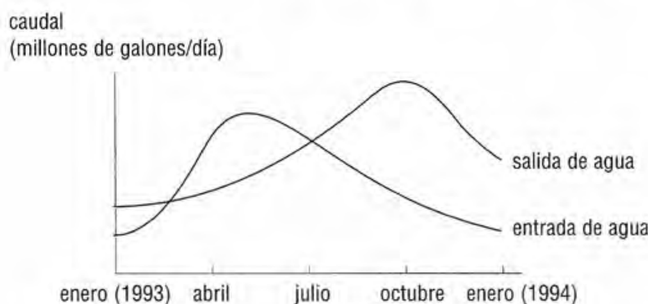


Figura 7.24.

ENFOQUE PRÁCTICO

En los problemas del 1 al 45, evalúe las integrales. Suponga que a, b, A, B, P_0, h,y k son constantes.

1. $\int (t^3 + 6t^2)\,dt$

2. $\int (u^4 + 5)\,du$

3. $\int (x^2 + \frac{1}{x^2})\,dx$

4. $\int e^{3r}\,dr$

5. $\int 3\sqrt{w}\,dw$

6. $\int (ax^2 + b)\,dx$

7. $\int (t^2 + 5t + 1)\,dt$

8. $\int 100e^{-0.5t}\,dt$

9. $\int (w^4 - 12w^3 + 6w^2 - 10)\,dw$

10. $\int (p^2 + \frac{5}{p})\,dp$

11. $\int \frac{dq}{\sqrt{q}}$

12. $\int 3\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

13. $\int \left(\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)\,dx$

14. $\int P_0e^{kt}\,dt$

15. $\int (q^3 + 8q + 15)\,dq$

16. $\int 1{,}000e^{0.075t}\,dt$

17. $\int (5\operatorname{sen}x + 3\cos x)\,dx$

18. $\int (10 + 5\operatorname{sen}x)\,dx$

19. $\int \pi r^2 h\,dr$

20. $\int (q + \frac{1}{q^3})\,dq$

21. $\int 15p^2q^4\,dp$

22. $\int 15p^2q^4\,dq$

23. $\int (3x^2 + 6e^{2x})\,dx$

24. $\int \frac{5}{w}\,dw$

25. $\int 5e^{2q}\,dq$

26. $\int \left(p^3 + \frac{1}{p}\right)\,dp$

27. $\int (Ax^3 + Bx)\,dx$

28. $\int (6\sqrt{x} + 15)\,dx$

29. $\int (x^2 + 8 + e^x)\,dx$

30. $\int 25e^{-0.04q}\,dq$

31. $\int (x^3 + 5x^2 + 6)dx$

32. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}\right)\,dx$

33. $\int (Aq + B)dq$

34. $\int \left(\frac{6}{\sqrt{x}} + 8\sqrt{x}\right)\,dx$

35. $\int (e^{2t} + 5)dt$

36. $\int \operatorname{sen}(3x)dx$

37. $\int 12\cos(4x)dx$

38. $\int A\operatorname{sen}(Bt)dt$

39. $\int x(x^2 + 9)^6dx$

40. $\int x\cos(x^2 + 4)dx$

41. $\int \frac{1}{y + 2}dy$

42. $\int \sqrt{3x + 1}dx$

43. $\int \frac{e^t}{e^t + 1}dt$

44. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos x dx$

45. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}x}}\,dx$

Capítulo 8

PROBABILIDAD

En este capítulo vemos las funciones de distribución acumulativa y de densidad de probabilidad, las cuales muestran cómo está distribuida una cantidad, como por ejemplo el ingreso en una población. Analizamos la relación entre estas funciones y cómo calcular probabilidades a partir de éstas. Veremos la media, la mediana y la distribución normal.

8.1 FUNCIONES DE DENSIDAD

Comprender la distribución de varias cantidades en una población puede ser importante para quienes toman decisiones. Por ejemplo, la distribución del ingreso proporciona información útil acerca de la estructura económica de una sociedad. En esta sección veremos la distribución de edades en Estados Unidos. Para asignar fondos para educación, atención médica y seguridad social, el gobierno necesita saber cuántas personas hay en cada grupo de edad. Veremos cómo representar dicha información por medio de una función de densidad.

Distribución por edades en Estados Unidos

Tabla 8.1 *Distribución de edades en Estados Unidos en 1995*

Grupo de edades	Porcentaje de población total
0 – 20	29%
20 – 40	31%
40 – 60	24%
60 – 80	13%
80 – 100	3%

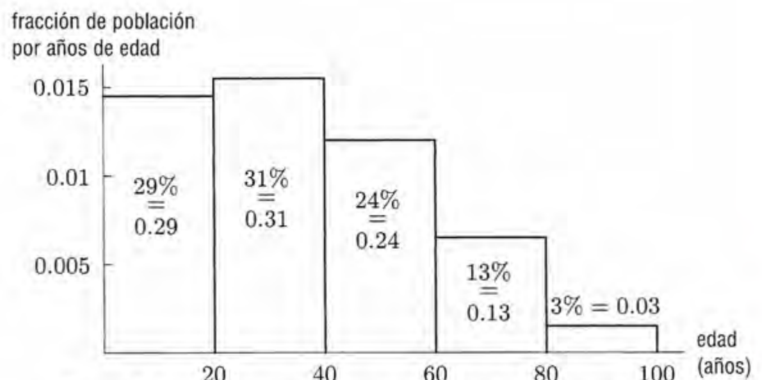


Figura 8.1. Distribución de las edades en Estados Unidos en 1995.

Vamos a suponer que tenemos los datos de la tabla 8.1, los cuales muestran cómo se distribuyeron las edades de la población de Estados Unidos en 1995. Para representar gráficamente esta información empleamos un tipo de *histograma*[1] colocando una barra vertical sobre cada grupo de edad, de tal manera que el *área* de cada barra representa el porcentaje de ese grupo de edad. El área total de todos los rectángulos es $100\% = 1$. Sólo consideramos personas que tengan menos de 100 años de edad.[2] Para el grupo de 0–20 de edad, la base del rectángulo es 20, y buscamos que el área sea 29%, de modo que la altura debe ser $29\%/20 = 1.45\%$. Consideramos las edades como si estuvieran distribuidas continuamente. Por ejemplo, la categoría 0–20 contiene personas que están a punto de cumplir 20 años. Observe que el eje vertical se mide en porcentaje/año (véase la figura 8.1).

Ejemplo 1 Calcule, para 1995, ¿qué porcentaje de la población tenía:

(a) entre 20 y 60 años de edad?
(b) menos de 10 años de edad?
(c) entre 75 y 80 años de edad?
(d) entre 80 y 85 años de edad?

Solución

(a) Sumamos los porcentajes, de modo que $31\% + 24\% = 55\%$.

(b) Para hallar el porcentaje de los menores de 10 años de edad, podríamos suponer, por ejemplo, que la población estuvo distribuida de manera homogénea sobre el grupo de 0–20. (Esto significa que estamos suponiendo que nacieron bebés a una razón más o menos constante en los últimos 20 años, lo que probablemente es razonable). Si hacemos esta suposición, entonces podemos decir que la población menor de 10 años era casi la mitad de la del grupo de 0 a 20, es decir, 14.5%. Observe que obtenemos el mismo resultado al calcular el área del rectángulo de 0 a 10 (véase la figura 8.2).

(c) Para hallar la población entre 75 y 80 años de edad, como en 1990 13% de los estadounidenses estaban en el grupo de 60 a 80, podríamos aplicar el mismo razonamiento y decir que $\frac{1}{4}(13\%) = 3.25\%$ de la población estaba en este grupo de edades. Este resultado está representado como un área en la figura 8.2. La suposición de que la población estaba distribuida de manera homogénea no es buena; de hecho, había más personas entre 60 y 65 que entre 75 y 80. Por tanto, el cálculo de 3.25 es verdaderamente alto.

---

[1] Hay otros tipos de histogramas que tienen la frecuencia en el eje vertical.

[2] De hecho, el 0.02% de la población tiene más de 100 años, pero es demasiado pequeño para ser visible en el histograma.

(d) De nuevo, usando la suposición (errónea) de que las edades en cada grupo estaban distribuidas homogéneamente, encontraríamos que el porcentaje entre 80 y 85 era $\frac{1}{4}(3\%) = 0.75\%$ (véase la figura 8.2). Este cálculo es muy bajo; de hecho, había más personas en el grupo de 80 a 85 que, por ejemplo, en el de 95 a 100 y, por lo tanto, el cálculo de 0.75% es demasiado bajo.

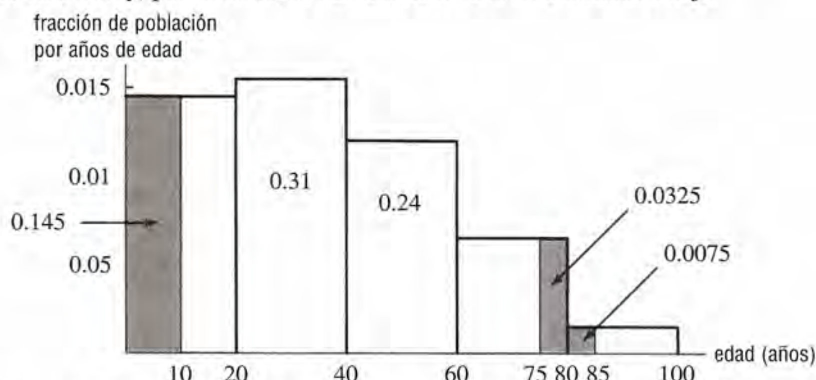


Figura 8.2. Edades en Estados Unidos en 1995; varios subgrupos (para el ejemplo 1).

Para alisar o emparejar el histograma

Podríamos obtener mejores estimaciones si tuviéramos grupos más pequeños de edades (cada grupo de edad de la figura 8.1 es de 20 años, que es bastante grande) o si el histograma se hiciera más liso. Suponga que tenemos la información más detallada de la tabla 8.2, lo que nos lleva al nuevo histograma de la figura 8.3.

A medida que obtenemos información más detallada, la silueta superior del histograma se hace más lisa, pero el área de cualquiera de las barras aún representa el porcentaje de la población en ese grupo de edad. Imaginemos, en el límite, sustituir la silueta superior del histograma por una curva suave de tal forma que el área debajo de la curva y arriba de un grupo de edad es la misma que el área del rectángulo correspondiente. El área total bajo toda la curva es de nuevo 100% = 1 (véase la figura 8.3).

Función de densidad de edad

Si t es edad en años, entonces definimos $p(t)$, la *función de densidad* de edad, como una función que "alisa" o "empareja" el histograma de edades. Esta función tiene la propiedad de que

$$\begin{array}{c}\text{Fracción de la población}\\ \text{entre edades } a \text{ y } b\end{array} = \begin{array}{c}\text{Área bajo}\\ \text{la gráfica de } p\\ \text{entre } a \text{ y } b\end{array} = \int_a^b p(t)dt.$$

Tabla 8.2 *Edades en Estados Unidos en 1995 (con más detalle)*

Grupo de edad	Porcentaje de población total
0 – 10	15%
10 – 20	14%
20 – 30	14%
30 – 40	17%
40 – 50	14%
50 – 60	10%
60 – 70	8%
70 – 80	5%
80 – 90	2%
90 – 100	1%

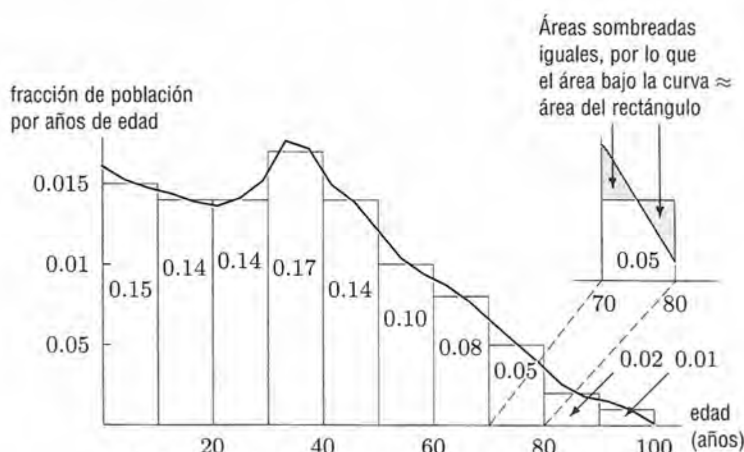


Figura 8.3. Alisado del histograma de edades.

Si a y b son las edades mínima y máxima posibles (por ejemplo, $a = 0$ y $b = 100$), de manera que las edades de toda la población están entre a y b, entonces

$$\int_a^b p(t)dt = \int_0^{100} p(t)dt = 1.$$

¿Qué indica la función de densidad de edad p? Observe que no hemos hablado acerca del significado de $p(t)$ en sí, sino *sólo* de la integral $\int_a^b p(t)dt$. Veamos ésta con un poco más de detalle. Por ejemplo, supongamos que $p(10) = 0.015 = 1.5\%$ por año. Esto *no* indica que el 1.5% de la población tiene precisamente 10 años de edad (en donde 10 años de edad significa exactamente 10, no $10\frac{1}{2}$, ni $10\frac{1}{4}$, ni 10.1). Sin embargo, $p(10) = 0.015$ indica que para algún intervalo Δ_t alrededor de 10, la fracción de la población con edades en este intervalo es alrededor de $p(10)\Delta t = 0.015\Delta t$. Asimismo, observe que las unidades de $p(t)$ son *% por año*, de modo que $p(t)$ debe multiplicarse por años para dar el porcentaje de la población.

Función de densidad

Suponga que estamos interesados en la forma en que cierta característica numérica, x, está distribuida en una población. Por ejemplo, x podría ser la estatura o la edad si la población es de personas, o podría ser la potencia para una población de bombillas eléctricas. Entonces definimos una función general de densidad con las siguientes propiedades:

La función, $p(x)$, es una **función de densidad** si

Fracción de población para la que x está entre a y b = Área bajo la gráfica de p entre a y b = $\int_a^b p(x)dx$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1 \quad \text{y} \quad p(x) \geq 0 \quad \text{para toda } x.$$

La función de densidad debe ser no negativa si su integral siempre da una fracción de la población. La fracción de la población con x entre $-\infty$ e ∞ es 1 porque toda la población tiene la característica x entre $-\infty$ e ∞. La función p que se utilizó para alisar el histograma de edades satisface esta definición de una función de densidad. Observe que no asignamos directamente un significado al valor $p(x)$, sino más bien interpretamos $p(x)\Delta x$ como la fracción de la población con la característica en un corto intervalo de longitud Δx alrededor de x.

Ejemplo 2 La figura 8.4 muestra la función de densidad para la cantidad de tiempo de espera en un consultorio médico.

(a) ¿Cuál es el tiempo más largo que alguien tiene que esperar?

(b) Aproximadamente, ¿qué fracción de pacientes esperan entre 1 y 2 horas?

(c) Aproximadamente, ¿qué fracción de pacientes esperan menos de una hora?

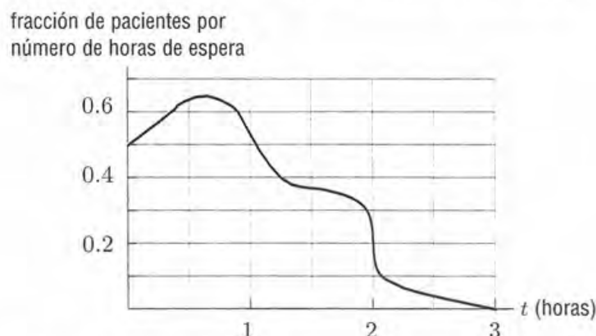


Figura 8.4. Distribución de tiempo de espera en un consultorio médico.

Solución **(a)** La función de densidad es cero para toda $t > 3$, de modo que nadie espera más de tres horas. El tiempo más largo que alguien tiene que esperar es de tres horas.

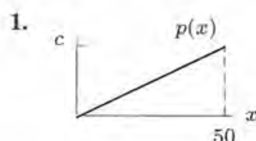
(b) La fracción de pacientes que esperan entre una y dos horas es igual al área bajo la curva de densidad entre $t = 1$ y $t = 2$. Podemos estimar esta área si contamos los cuadrados: hay aproximadamente 7.5 cuadrados en esta región, cada uno de área $(0.5)(0.1) = 0.05$. El área es aproximadamente $(7.5)(0.05) = 0.375$. Entonces, 37.5% de los pacientes esperan entre una y dos horas.

(c) Esta fracción es igual al área bajo la función de densidad para $t < 1$. Hay cerca de 12 cuadrados en esta área, y cada uno tiene un área 0.05, como en el inciso (b), de modo que nuestra estimación para el área es $(12)(0.05) = 0.60$. Por lo tanto, aproximadamente 60% de pacientes ven al médico en menos de una hora.

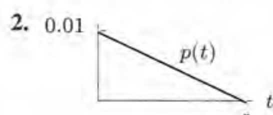
Problemas de la sección 8.1

En los problemas 1 al 4, calcule el valor de c si p es una función de densidad

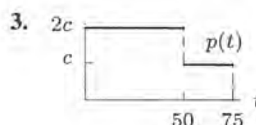
1.



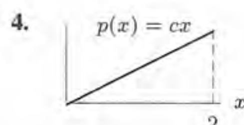
2.



3.



4.



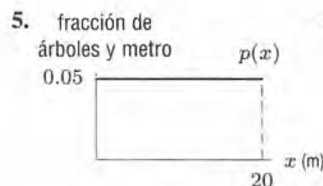
En los problemas del 5 al 8, la distribución de la altura, x, en metros, de árboles está representada por la función de densidad $p(x)$. En cada caso, calcule la fracción de árboles que midan:

(a) Menos de cinco metros de alto.

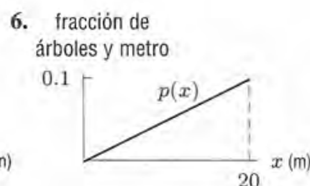
(b) Más de 6 metros de alto.

(c) Entre 2 y 5 metros de alto.

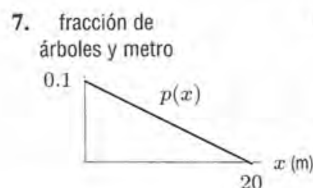
5.



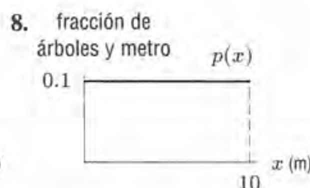
6.



7.



8.



En los problemas del 9 al 11, trace la gráfica de una posible función de densidad que represente la producción agrícola (en kilogramos) de un campo bajo la circunstancia dada.

9. Todas las producciones de 0 a 100 kg son igualmente probables; el campo nunca produce más de 100 kg.

10. Es más probable que haya producciones altas que producciones bajas. La producción máxima es de 200 kg.

11. Una sequía hace que las producciones bajas sean más comunes, y no hay producción mayor de 30 kg.

12. Supongamos que $p(x)$ es la función de densidad para estaturas de estadounidenses, en pulgadas. ¿Qué significa el enunciado $p(68) = 0.2$?

13. La función de densidad $p(t)$ para la duración de la etapa larvaria, en días, de cierta especie de insecto se muestra en la figura 8.5. ¿Qué fracción de estos insectos está en la etapa larvaria entre 10 y 12 días? ¿Menos de ocho días? ¿Más de 12 días? ¿En qué intervalo de un día es más probable que disminuya la duración de la etapa larvaria?

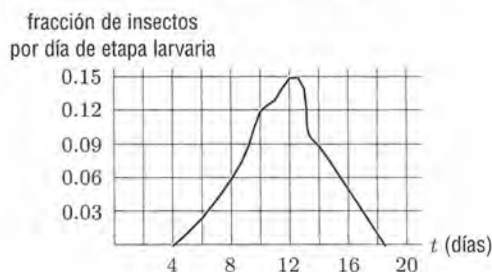


Figura 8.5.

14. Un gran número de personas toman una prueba estandarizada y reciben calificaciones descritas por la función de densidad p que aparece en la gráfica de la figura 8.6. ¿Esta función de densidad implica que la mayoría de las personas reciben una calificación cercana a 50? Explique por qué sí o por qué no.

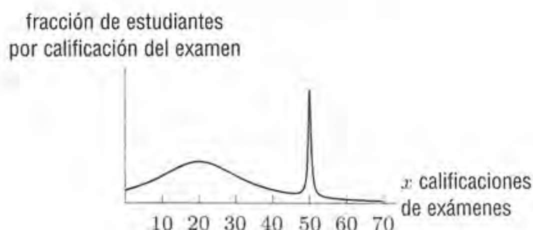


Figura 8.6.

15. La figura 8.7[3] muestra la distribución de altitud, en millas, de la superficie de la Tierra. La altitud positiva denota tierras situadas sobre el nivel del mar; una elevación negativa muestra tierras abajo del nivel del mar (es decir, el lecho del mar).

(a) Describa verbalmente la altitud de la mayoría de la superficie terrestre.

(b) Aproximadamente, ¿qué fracción de la superficie terrestre está bajo el nivel del mar?

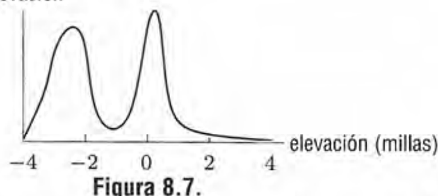


Figura 8.7.

16. Un insecto tiene un lapso de vida de no más de un año. La figura 8.8 muestra la función de densidad, $p(t)$, para la duración de la vida.

(a) ¿Mueren más insectos en el primer mes de su vida, o en el doceavo mes?

(b) ¿Qué fracción de insectos viven no más de seis meses?

(c) ¿Qué fracción de insectos viven más de nueve meses?

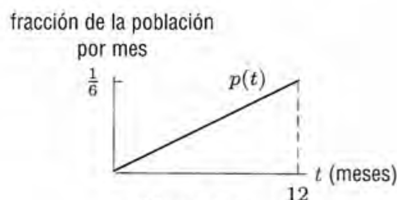


Figura 8.8.

17. Una máquina dura hasta 10 años. La figura 8.9 da la función de densidad, $p(t)$, para el tiempo que dura una máquina.

(a) ¿Cuál es el valor de C?

(b) ¿Es más probable que falle una máquina en su primer año o en su décimo año? ¿En su primero o en su segundo año?

(c) ¿Qué fracción de las máquinas dura hasta dos años? ¿Entre cinco y siete años? ¿Entre tres y seis años?

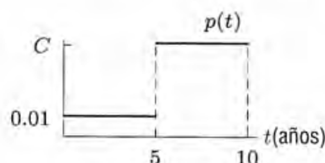


Figura 8.9.

8.2 FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA Y PROBABILIDAD

En la sección 8.1 se introdujeron las funciones de densidad que describen la forma en que una característica numérica está distribuida en una población. En esta sección estudiamos otra forma de presentar la misma información.

Función de distribución acumulativa para edades

Una forma alternativa de mostrar cómo están distribuidas las edades en Estados Unidos es usando la *función de distribución acumulativa* $P(t)$, definida por

$$P(t) = \begin{array}{c}\text{Fracción de población}\\ \text{con edades menores a } t\end{array} = \int_0^t p(x)dx.$$

Por tanto, P es la antiderivada de p con $P(0) = 0$, de modo que $P(t)$ es el área bajo la curva de densidad entre 0 y t.

Observe que la función de distribución acumulativa es no negativa y creciente (o al menos no decreciente), puesto que el número de personas más jóvenes que la edad t se incrementa a medida que t aumenta. Otro modo de ver esto es que $P' = p$ y p es positiva (o no negativa). Por consiguiente, la distribución acumulativa de las edades es una función que empieza con $P(0) = 0$ y aumenta a medida que t se incrementa. Tenemos que $P(t) = 0$ para $t < 0$ porque, cuando $t < 0$, no hay nadie cuya edad sea menor que t. El valor límite de P, cuando $t \to \infty$, es 1, ya que conforme t se hace muy grande (por ejemplo, 100), todos tienen una edad menor que t, de modo que la fracción de personas con edad menor de t tiende hacia 1.

Deseamos hallar la función de distribución acumulativa para la función de densidad de edad que se muestra en la figura 8.3. Vemos que $P(10)$ es igual a 0.15, ya que la figura 8.3 muestra que 15% de la población tiene entre 0 y 10 años de edad. Asimismo,

$$P(20) = \begin{array}{c}\text{Fracción de la población}\\ \text{entre 0 y 20 años de edad}\end{array} = 0.15 + 0.14 = 0.29$$

[3]Adaptado de *Statistics*, por Freedman, Pisani, Purves y Adikhari, Norton, Nueva York.

y del mismo modo

$$P(30) = 0.15 + 0.14 + 0.14 = 0.43$$

Si se continúa en esta forma resultan los valores para $P(t)$ de la tabla 8.3. Estos valores se usaron para trazar una gráfica de $P(t)$ en el lado derecho de la figura 8.10.

Tabla 8.3 *Función de distribución acumulativa, $P(t)$, que da la fracción de población menor a t años, en Estados Unidos*

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$P(t)$	0	0.15	0.29	0.43	0.60	0.74	0.84	0.92	0.97	0.99	1.00

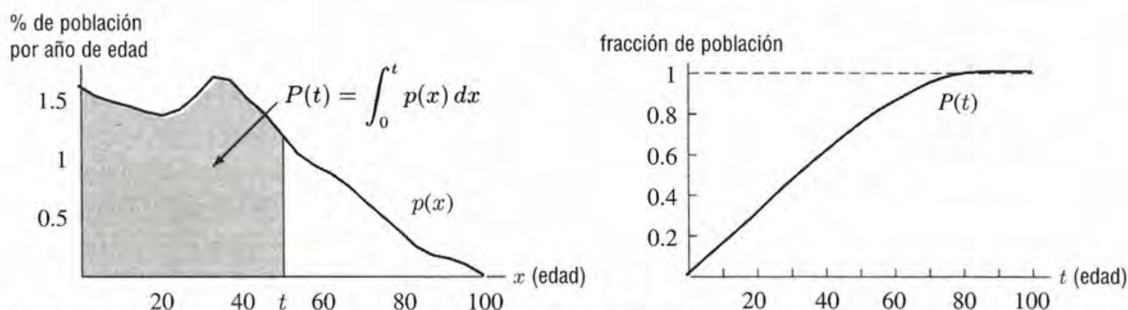


Figura 8.10. Gráfica de $p(x)$, la función de densidad de edad y su relación con $P(t)$, la función de distribución acumulativa de edad.

Función de distribución acumulativa

Una **función de distribución acumulativa**, $P(t)$, de una función de densidad, p, está definida por

$$P(t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)\,dx = \begin{array}{c}\text{Fracción de población con}\\ \text{valores de } x \text{ debajo de } t.\end{array}$$

Por tanto, P es una antiderivada de p, es decir, $P' = p$.

Cualquier distribución acumulativa tiene las siguientes propiedades:

- P es creciente (o no decreciente).
- $\lim_{t\to\infty} P(t) = 1$ y $\lim_{t\to-\infty} P(t) = 0$.
- $\begin{array}{c}\text{Fracción de}\\ \text{población con valores}\\ \text{de } x \text{ entre } a \text{ y } b\end{array} = \int_a^b p(x)\,dx = P(b) - P(a).$

Ejemplo 1 El tiempo para realizar una prueba de mantenimiento de rutina en una máquina tiene una función de distribución acumulativa $P(t)$, que da la fracción de pruebas de mantenimiento completadas en un tiempo menor o igual a t minutos. Los valores de $P(t)$ están en la tabla 8.4.

Tabla 8.4 *Función de distribución acumulativa para el tiempo que toma realizar pruebas de mantenimiento*

t (minutos)	0	5	10	15	20	25	30
$P(t)$(fracción completada)	0	0.03	0.08	0.21	0.38	0.80	0.98

(a) ¿Qué fracción de pruebas de mantenimiento se completan en 15 minutos o menos?

(b) ¿Qué fracción de los chequeos de mantenimiento llevan más de 30 minutos?

(c) ¿Qué fracción toma entre 10 y 15 minutos?

(d) Trace un histograma que muestre cómo se distribuyen los tiempos para pruebas de mantenimiento.

(e) ¿En cuál de los intervalos de cinco minutos es más probable que disminuya la duración de una prueba de mantenimiento?

(f) Trace una gráfica aproximada de la función de densidad.

(g) Trace una gráfica de la función de distribución acumulativa.

Solución (a) La fracción de pruebas de mantenimiento completadas en 15 minutos es $P(15) = 0.21$, es decir, 21 por ciento.

(b) Como $P(30) = 0.98$, vemos que 98% de las pruebas de mantenimiento toman 30 minutos o menos. Por tanto, sólo 2% toman más de 30 minutos.

(c) Como 8% toman 10 minutos o menos y 21% toman 15 minutos o menos, la fracción que toma entre 10 y 15 minutos es $0.21 - 0.08 = 0.13$ o 13 por ciento.

(d) Comenzamos por hacer una tabla que muestre cómo están distribuidos los tiempos. La tabla 8.4 muestra que la fracción de pruebas completadas entre 0 y 5 minutos es 0.03, y la fracción completada entre 5 y 10 minutos es 0.05, etcétera. Véase la tabla 8.5.

Tabla 8.5 *Distribución de tiempo para ejecutar pruebas de mantenimiento*

t (minutos)	0 − 5	5 − 10	10 − 15	15 − 20	20 − 25	25 − 30	> 30
Fracción completada	0.03	0.05	0.13	0.17	0.42	0.18	0.02

El histograma en la figura 8.11 está trazado de tal forma que el área de cada barra es la fracción de pruebas completadas en el periodo de tiempo correspondiente. Por ejemplo, la primera barra tiene un área de 0.03 y un ancho de 5 minutos, de modo que su altura es $0.03/5 = 0.006$.

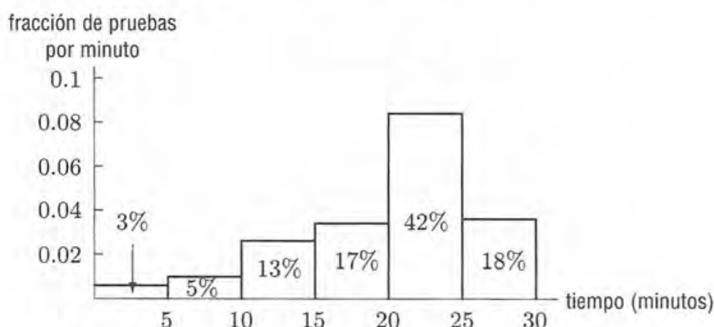


Figura 8.11. Histograma de tiempos para pruebas de mantenimiento.

(e) En la figura 8.11 vemos que la mayoría de las pruebas toman entre 20 y 25 minutos, de modo que ésta es la duración más probable de tiempo.

(f) La función de densidad, $p(t)$, es una versión alisada del histograma de la figura 8.11. En la figura 8.12 aparece una gráfica razonable.

(g) En la figura 8.13 se da una gráfica de $P(t)$. Debido a que $P(t)$ es una función de distribución acumulativa, $P(t)$ se aproxima a 1 a medida que t se hace más grande, pero nunca es mayor de 1.



Figura 8.12. Función de densidad del tiempo empleado en ejecutar pruebas de mantenimiento.



Figura 8.13. Función de distribución acumulativa del tiempo empleado en ejecutar pruebas de mantenimiento.

Probabilidad

Suponga que planeamos elegir al azar un miembro de la población de Estados Unidos. ¿Cuál es la probabilidad que elijamos una persona que tenga entre 70 y 80 años de edad, por ejemplo? En la tabla 8.2, de la página 303, vimos que 5% de la población está en este grupo de edades. Decimos que la probabilidad, o la posibilidad, de que una persona tenga entre 70 y 80 años de edad es de 0.05. Mediante una función de densidad de edad $p(t)$, definimos probabilidades como sigue:

Probabilidad de que una persona tenga entre a y b años de edad	=	Fracción de población entre a y b años de edad.	=	$\int_a^b p(t)\,dt.$

Como la función de distribución acumulativa da la fracción de la población de edad menor que t, la distribución acumulativa también se puede usar para calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar esté en determinado grupo de edad.

Probabilidad de que una persona sea de edad menor que t	=	Fracción de población de edad menor que t	=	$P(t) = \int_0^t p(x)\,dx.$

En el siguiente ejemplo se emplean tanto la función de densidad como la función de distribución acumulativa para describir la misma situación.

Ejemplo 2 Suponga que usted quiere analizar la industria pesquera de un pequeño poblado. Cada día, los botes traen por lo menos dos toneladas de pescado, pero nunca más de ocho toneladas.

(a) Usando la función de densidad que describe la pesca diaria, dada en la figura 8.14, encuentre y trace la gráfica de la función de distribución acumulativa correspondiente y explique su significado.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la pesca sea de entre cinco y siete toneladas?

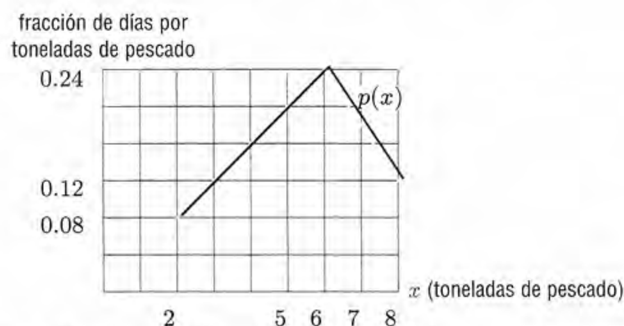


Figura 8.14. Función de densidad de la pesca diaria.

Solución **(a)** La función de distribución acumulativa $P(t)$ es igual a la fracción de días en los que cada pesca es menor a t toneladas de pescado. Como la pesca nunca es menor a dos toneladas, tenemos $P(t) = 0$ para $t \leq 2$. Como la pesca siempre es menor a ocho toneladas, tenemos $P(t) = 1$ para $t \geq 8$. Para t en el rango $2 < t < 8$ debemos evaluar la integral

$$P(t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)dx = \int_{2}^{t} p(x)dx.$$

Esta integral es igual al área bajo la gráfica de $p(x)$ entre $x = 2$ y $x = t$. Se puede calcular al contar los cuadrados correspondientes en la figura 8.14; cada cuadrado tiene un área de 0.04. Por ejemplo,

$$P(3) = \int_2^3 p(x)dx \approx \text{Área de 2.5 cuadrados} = 2.5(0.04) = 0.10.$$

La tabla 8.6 contiene valores de $P(t)$; la gráfica se muestra en la figura 8.15.

Tabla 8.6 *Estimaciones para P(t) de pesca diaria*

t (toneladas de pescado)	$P(t)$(fracción de días de pesca)
2	0
3	0.10
4	0.24
5	0.42
6	0.64
7	0.85
8	1

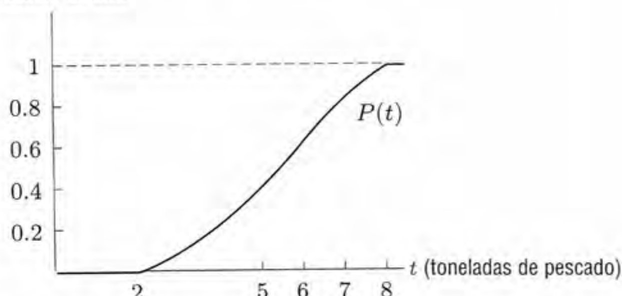


Figura 8.15. Distribución acumulativa, P(t), de pesca diaria.

(b) La probabilidad de que la pesca sea de entre cinco y siete toneladas se puede hallar usando ya sea la función de densidad p o la función de distribución acumulativa P. Con la función de densidad, esta probabilidad está representada por el área sombreada de la figura 8.16, que es de unos 10.75 cuadrados, de modo que

$$\begin{array}{c}\text{Probabilidad de que la pesca}\\ \text{esté entre 5 y 7 toneladas}\end{array} = \int_5^7 p(x)\,dx \approx \text{Área de 10.75 cuadrados} = 10.75(0.04) = 0.43.$$

La probabilidad se puede hallar a partir de la función de distribución acumulativa, como se muestra:

$$\begin{array}{c}\text{Probabilidad de que la pesca}\\ \text{esté entre 5 y 7 toneladas}\end{array} = P(7) - P(5) = 0.85 - 0.42 = 0.43.$$

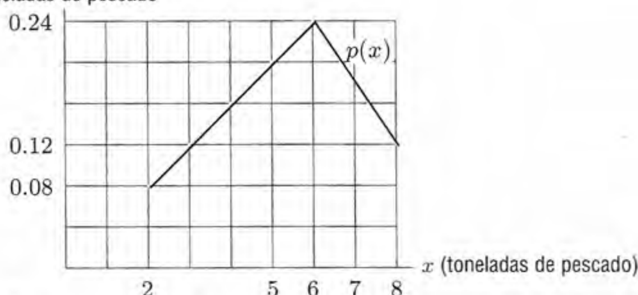


Figura 8.16. El área sombreada representa la probabilidad de que la pesca esté entre 5 y 7 toneladas.

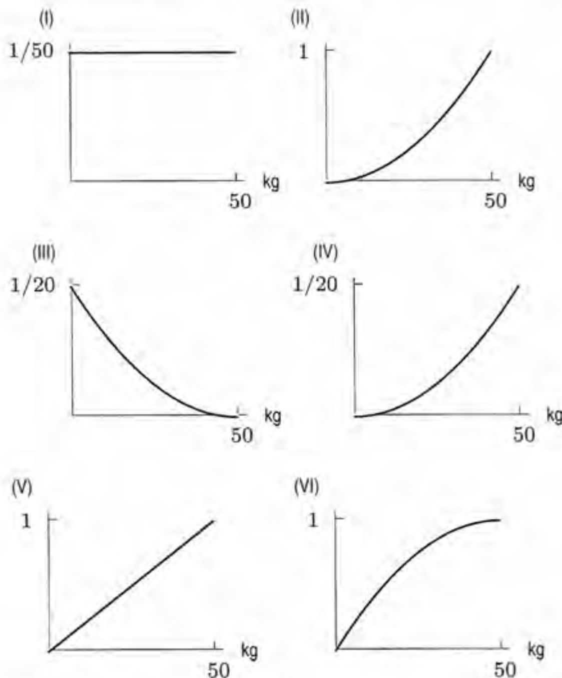
Problemas de la sección 8.2

1. Demuestre que el área bajo la función de densidad de pesca en la figura 8.14, de la página 309, es 1. ¿Por qué debe esperarse esto?
2. **(a)** Usando la función de densidad del ejemplo 2, página 304, llene los espacios de la tabla de valores para la función de distribución acumulativa $P(t)$ del tiempo de espera de las personas en el consultorio de un médico.

t (horas)	0	1	2	3	4
$P(t)$(fracción de personas que esperan)					

(b) Grafique $P(t)$.

3. En un experimento agrícola se pesa la cantidad de grano de un campo de tamaño dado. La producción puede ser de 0 kg a 50 kg. Para cada una de las siguientes situaciones, elija la gráfica que mejor represente la:
(i) Función de densidad de probabilidad
(ii) Función de distribución acumulativa
(a) Las producciones bajas son más probables que las producciones altas.
(b) Todas las producciones son igualmente probables.
(c) Las producciones altas son más probables que las producciones bajas.



En los problemas del 4 al 6 trace una gráfica de una función de densidad y una función de distribución acumulativa que pudiera representar la distribución de ingreso en una población con las siguientes características:

4. Una clase media grande.
5. Clases media y alta pequeñas y muchos pobres.
6. Clase media pequeña, muchos pobres y muchos ricos.
7. Suponga que $F(x)$ es la función de distribución acumulativa para alturas (en metros) de árboles en un bosque.
(a) Explique, en términos de árboles, el significado del enunciado $F(7) = 0.6$.
(b) ¿Cuál es mayor, $F(6)$ o $F(7)$? Justifique su respuesta en términos de árboles.
8. Considere un grupo de personas que hayan recibido tratamiento para el cáncer. Sea t el tiempo de supervivencia, es decir, el número de años que vive una persona después de recibir el tratamiento. La función de densidad que da la distribución de t es $p(t) = Ce^{-Ct}$ para alguna constante positiva C. ¿Cuál es el significado práctico de la función de distribución acumulativa $P(t) = \int_0^t p(x)dx$?

9. La figura 8.17 muestra $P(t)$, el porcentaje de inventario de cierto artículo que se ha vendido en el tiempo t, donde t está en días y el día 1 es el 1 de enero.
(a) ¿Cuándo se vendió el primer artículo? ¿Cuándo se vendió el último?
(b) ¿Qué porcentaje del inventario se había vendido para el 1 de mayo (día 121)?
(c) Aproximadamente, ¿qué porcentaje del inventario se vendió durante mayo y junio (días 121 al 181)?
(d) ¿Qué porcentaje del inventario quedaba después que había pasado medio año (al día 181)?
(e) Estime cuándo se pusieron en venta los artículos y se vendieron rápidamente.



Figura 8.17.

10. Trace una gráfica de la función de densidad para la función de distribución acumulativa dada en la figura 8.17.
11. Se realiza un experimento para determinar el efecto de dos nuevos fertilizantes A y B sobre el crecimiento de dos especies de chícharos (guisantes). En la figura 8.18 se trazan las gráficas de las funciones de distribución acumulativa de las alturas de los chícharos maduros sin tratamiento y fertilizados con A y B.
(a) Aproximadamente, ¿qué altura tiene la mayoría de las plantas no fertilizadas?
(b) Explique verbalmente el efecto de los fertilizantes A y B sobre la altura de las plantas maduras.

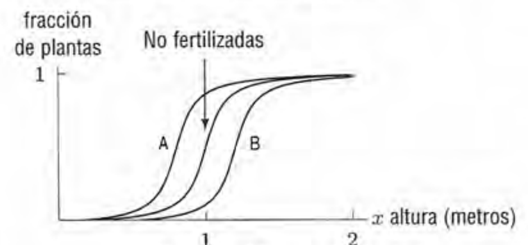


Figura 8.18.

12. La figura 8.19 muestra una función de densidad y la correspondiente función de distribución acumulativa.[4]
(a) ¿Cuál curva representa la función de densidad y cuál representa la función de distribución acumulativa? Exponga el porqué de su elección.
(b) Ponga valores razonables sobre las líneas marcadas en cada uno de los ejes.

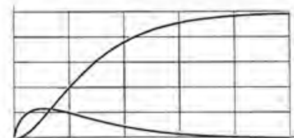


Figura 8.19.

[4]Adaptado de *Calculus*, por David A. Smith y Lawrence C. Moore, Heath, Lexington D.C., 1994.

13. Se hizo una encuesta a estudiantes de la Universidad de California y se les preguntó su promedio de calificaciones (GPA, por sus siglas en inglés). (El GPA varía de 0 a 4, en el que el 2 es apenas aprobatorio.) En la figura 8.20 se muestra la distribución de los GPA.[5]
    - (a) Aproximadamente, ¿qué fracción de estudiantes pasan?
    - (b) Aproximadamente, ¿qué fracción de los estudiantes tienen calificaciones altas (GPA superiores a 3)?
    - (c) ¿Por qué cree usted que hay un pico alrededor del 2?
    - (d) Trace una gráfica de la función de distribución acumulativa.

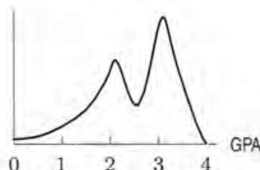


Figura 8.20.

14. Después de medir la duración de muchas llamadas telefónicas, la compañía de teléfonos encontró que su información se podía aproximar bien con la función de densidad $p(x)=0.4e^{-0.4x}$, donde x es la duración de una llamada, en minutos.
    - (a) ¿Qué porcentaje de llamadas duran entre 1 y 2 minutos?
    - (b) ¿Qué porcentaje de llamadas duran 1 minuto o menos?
    - (c) ¿Qué porcentaje de llamadas duran 3 minutos o más?
    - (d) Encuentre la función de distribución acumulativa.
15. En el sur de Suiza la mayor parte de la lluvia cae en primavera y otoño; los veranos e inviernos son relativamente secos. Trace posibles gráficas para la función de densidad y la función de distribución acumulativa de la distribución de lluvia en el transcurso de un año. Ponga la fecha en el eje horizontal y la fracción de la lluvia del año en el eje vertical.
16. Se han reportado importantes diferencias de absorción para diferentes versiones comerciales del mismo medicamento. Un estudio comparó tres versiones comerciales de cápsulas de teofilina de liberación controlada.[6] Para comparación, en el estudio se incluyó una solución de teofilina. La figura 8.21 muestra las funciones de distribución acumulativa, $P(t)$, que representan la fracción del medicamento absorbido en el tiempo t. ¿Qué curva representa la solución? Compare la tasa de absorción de las cuatro versiones del medicamento.

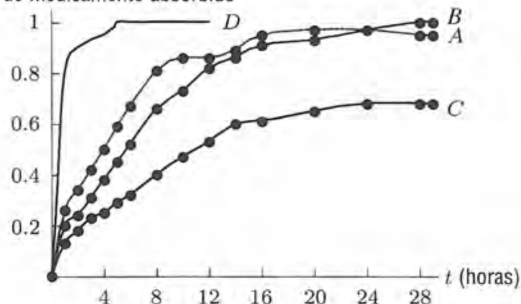


Figura 8.21.

Para los problemas 17 y 18, sea $p(t) = -0.0375t^2 + 0.225t$ la función de densidad de conservación de una marca de plátanos (bananas), con t en semanas y $0 \leq t \leq 4$. Véase la figura 8.22.

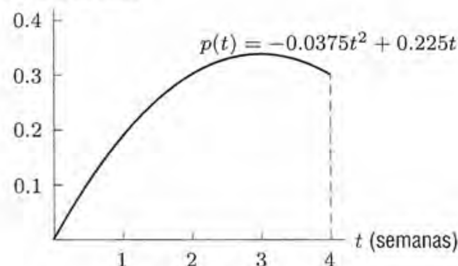


Figura 8.22.

17. Encuentre la probabilidad de que un plátano dure
    - (a) Entre una y dos semanas.
    - (b) Más de tres semanas.
    - (c) Más de cuatro semanas.
18. (a) Trace la función de distribución acumulativa para la conservación de los plátanos. [*Sugerencia*: El dominio de su función debe abarcar todos los números reales, incluyendo a la izquierda de $t = 0$ y a la izquierda de $t = 4$.]
    - (b) Utilice la función de distribución acumulativa para calcular la probabilidad de que un plátano dure entre una y dos semanas. Compruebe su respuesta con la del problema 17(a).

8.3 MEDIANA Y MEDIA

Con frecuencia es útil ser capaces de dar un valor "promedio" para una distribución. Dos medidas que son de uso común son la *mediana* y la *media*.

[5]Adaptado de *Statistics*, por Freedman, Pisani, Purves y Adikhari, Norton, Nueva York, 1991.
[6]Bridges y Chasseaud (comps.), *Progress in Drug Metabolism*, Wiley, Nueva York, 1980.

Mediana

La **mediana** de una cantidad x distribuida en una población es un valor T, de forma que la mitad de la población tiene valores de x menores (o iguales) a T, y la mitad de la población tiene valores de x mayores (o iguales) a T. Entonces, si p es la función de densidad, una mediana T satisface

$$\int_{-\infty}^{T} p(x)\,dx = 0.5.$$

En otras palabras, la mitad del área bajo la curva de p está a la izquierda de T. Del mismo modo, si P es la función de distribución acumulativa,

$$P(T) = 0.5.$$

Ejemplo 1 Sean t días la permanencia de unos *jeans* en una tienda antes de que sean vendidos. La función de densidad de t se muestra en la figura 8.23 y está dada por

$$p(t) = 0.04 - 0.0008t.$$

(a) ¿Cuál es el máximo de tiempo que un par de *jeans* permanecen sin ser vendidos?
(b) ¿Usted esperaría la mediana del tiempo hasta que la venta sea menor, igual o mayor de 25 días?
(c) Encuentre la mediana del tiempo requerido para que sea vendido un par de *jeans*.

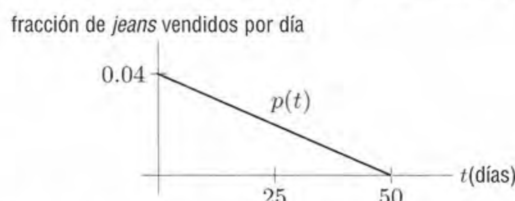


Figura 8.23. Función de densidad del tiempo transcurrido hasta la venta de un par de *jeans*.

Solución **(a)** La función de densidad es 0 para todos los tiempos $t > 50$, por lo que todos los *jeans* se venden antes de 50 días.
(b) El área bajo la gráfica de la función de densidad en el intervalo $0 \le t \le 25$ es mayor que el área bajo la gráfica en el intervalo $25 \le t \le 50$. Por tanto, más de la mitad de los *jeans* se venden antes del día 25 en la tienda. La mediana del tiempo hasta la venta es menor a 25 días.
(c) Sea P la función de distribución acumulativa. Deseamos hallar el valor de T tal que

$$P(T) = \int_{-\infty}^{T} p(t)\,dt = \int_{0}^{T} p(t)\,dt = 0.5.$$

Usando una calculadora para estimar las integrales, obtenemos los valores de P en la tabla 8.7.

Tabla 8.7 *Distribución acumulativa para el tiempo de venta*

T(días)	0	5	10	15	20	25
$P(T)$(fracción de *jeans* vendidos al día T)	0	0.19	0.36	0.51	0.64	0.75

Como la mitad de los *jeans* se venden antes de 15 días, la mediana del tiempo de venta es de aproximadamente 15 días. Véanse las figuras 8.24 y 8.25. También podríamos utilizar el teorema fundamental del Cálculo para hallar exactamente la mediana. Véase el problema 2.

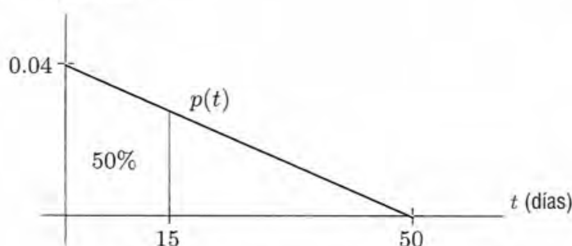


Figura 8.24. Mediana y función de densidad.

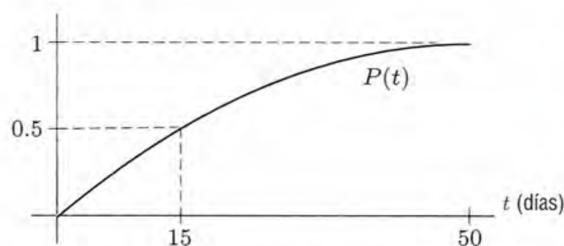


Figura 8.25. Mediana y función de distribución acumulativa.

Media

Otro valor promedio que comúnmente se utiliza es la *media*. Para encontrar la media de N números, sumamos los números y dividimos la suma entre N. Por ejemplo, la media de los números 1, 2, 7 y 10 es $(1 + 2 + 7 + 10)/4 = 5$. Por tanto, la edad media de toda la población de Estados Unidos se define como

$$\text{Media de la edad} = \frac{\sum \text{Edades de todas las personas en Estados Unidos}}{\text{Número total de personas en Estados Unidos}}$$

Calcular la suma de todas las edades directamente sería una tarea enorme; aproximamos la suma por medio de una integral. Consideremos las personas cuya edad sea entre t y $t + \Delta t$. ¿Cuántas hay en ese intervalo?

La fracción de población con edad entre t y $t + \Delta t$ es el área bajo la curva de p entre estos puntos, que se aproxima por el área del rectángulo, $p(t)\Delta t$ (véase la figura 8.26). Si el número total de personas en la población es N, entonces

$$\begin{matrix}\text{Número de personas con edad} \\ \text{entre } t \text{ y } t + \Delta t\end{matrix} \approx p(t)\Delta t N$$

La edad de cada una de estas personas es aproximadamente t, por lo que

$$\begin{matrix}\text{Suma de edades de las personas} \\ \text{con edad entre } t \text{ y } t + \Delta t\end{matrix} \approx tp(t)\Delta t N$$

Por tanto, al sumar y factorizar N tenemos

$$\text{Suma de edades de todas las personas} \approx \left(\sum tp(t)\Delta t\right)N$$

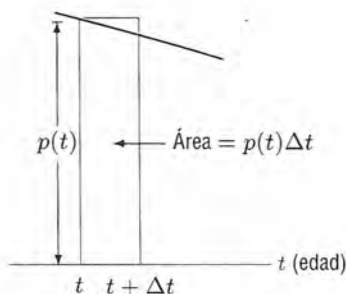


Figura 8.26. El área sombreada es el porcentaje de población con edad entre t y $t + \Delta t$.

En el límite, a medida que Δt se reduce a 0, la suma se convierte en integral. Si se supone que nadie tiene más de 100 años, tenemos

$$\text{Suma de edades de todas las personas} = \left(\int_0^{100} tp(t)dt\right) N.$$

Como N es el número total de personas en Estados Unidos,

$$\text{Media de la edad} = \frac{\text{Suma de edades de todas las personas en Estados Unidos}}{N} = \int_0^{100} tp(t)dt.$$

Podemos dar el mismo argumento para cualquier[7] función de densidad $p(x)$.

> Si una cantidad tiene función de densidad $p(x)$,
>
> $$\textbf{Valor medio}\text{ de la cantidad} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx.$$

Se puede demostrar que la media es el punto sobre el eje horizontal donde la región bajo la gráfica de la función de densidad, si fuera hecha de una pizarra, se equilibraría.

Ejemplo 2 Encuentre la media del tiempo para ventas de *jeans* usando la función de densidad del ejemplo 1.

Solución La fórmula para p es $p(t) = 0.04 - 0.0008t$. Calculamos

$$\text{Media del tiempo} = \int_0^{50} tp(t)\,dt = \int_0^{50} t(0.04 - 0.0008t)\,dt = 16.67 \text{ días}$$

La media está representada por el punto de equilibrio de la figura 8.27. Observe que la media es diferente de la mediana calculada en el ejemplo 1.

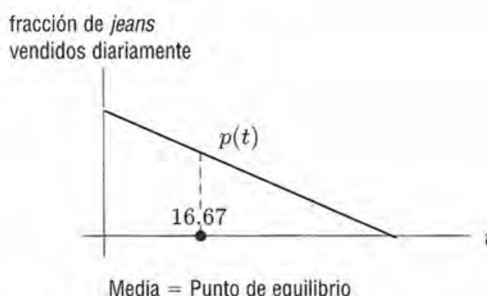


Figura 8.27. Media del tiempo de ventas de *jeans*.

Distribuciones normales

¿Cuánta lluvia espera usted que caiga sobre su ciudad este año? Si vive en Anchorage, Alaska, la respuesta sería aproximadamente 15 pulgadas (incluyendo la nieve). Por supuesto, no esperaría que cayeran exactamente 15 pulgadas. En algunos años caen más de 15 pulgadas y en otros años, menos. Sin embargo, en la mayoría de los años la cantidad de lluvia se aproxima a 15 pulgadas; sólo raras veces es mucho mayor o mucho menor que 15 pulgadas. ¿Cómo sería la función de densidad de la lluvia? Para responder esta pregunta, analizaremos los datos de lluvia de muchos años. Los registros muestran que la distribución de lluvia se aproxima bien a una *distribución normal.* Su gráfica es una curva en forma de campana que alcanza un máximo de 15 pulgadas y desciende simétricamente en ambos lados.

[7]Suponiendo que todas las integrales impropias relevantes converjan.

Las distribuciones normales se usan con frecuencia para modelar fenómenos reales, desde las calificaciones en un examen hasta el número de pasajeros de una aerolínea en un vuelo particular. Una distribución normal se caracteriza por su *media*, μ, y su *desviación estándar*, σ. La media indica la localización del máximo central. La desviación estándar refiere la cercanía con la que se agrupan los datos alrededor de la media. Un valor pequeño de σ indica que los datos están cerca de la media; una σ grande indica que los datos están muy esparcidos. En la siguiente fórmula de distribución normal, el factor $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ hace que el área bajo la curva sea igual a 1.

Una **distribución normal** tiene una función de densidad de la forma

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$

donde μ es la media de la distribución y σ es la desviación estándar, con $\sigma > 0$.

Para modelar la lluvia en Anchorage utilizamos una distribución normal, con $\mu = 15$ y $\sigma = 1$ (véase la figura 8.28).

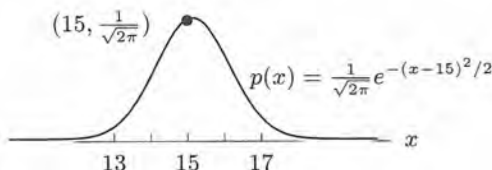


Figura 8.28. Distribución normal con $\mu = 15$ y $\sigma = 1$.

Ejemplo 3 Para la lluvia de Anchorage, utilice la distribución normal con la función de densidad con $\mu = 15$ y $\sigma = 1$ para calcular la fracción de años con lluvia entre

(a) 14 y 16 pulgadas, **(b)** 13 y 17 pulgadas, **(c)** 12 y 18 pulgadas,

Solución **(a)** La fracción de años con una lluvia anual entre 14 y 16 pulgadas es $\int_{14}^{16} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-15)^2/2}\,dx$.

Como no hay ninguna antiderivada elemental para $e^{-(x-15)^2/2}$, calculamos numéricamente la integral. Su valor es de aproximadamente 0.68.

$$\text{Fracción de años con lluvia entre 14 y 16 pulgadas} = \int_{14}^{16} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-15)^2/2}\,dx \approx 0.68.$$

(b) De nuevo, al determinar numéricamente la integral:

$$\text{Fracción de años con lluvia entre 13 y 17 pulgadas} = \int_{13}^{17} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-15)^2/2}\,dx \approx 0.95.$$

(c)

$$\text{Fracción de años con lluvia entre 12 y 18 pulgadas} = \int_{12}^{18} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-15)^2/2}\,dx \approx 0.0997.$$

Como 0.95 se aproxima a 1, esperamos que la mayor parte del tiempo la lluvia esté entre 13 y 17 pulgadas al año.

Entre las distribuciones normales, la que tiene a $\mu = 0$, $\sigma = 1$ se denomina *distribución normal estándar*. Los valores de la función de distribución acumulativa correspondiente están publicados en tablas.

Problemas para la sección 8.3

1. Calcule la mediana de la pesca diaria para los datos de pesca dados en el ejemplo 2, de la página 309.

2. Encuentre la mediana de la función de densidad $p(t) = 0.04 - 0.0008t$ para $0 \le t \le 50$ empleando el teorema fundamental del Cálculo.

3. **(a)** Utilice la función de distribución acumulativa de la figura 8.29 para estimar la mediana.

(b) Describa la función de densidad: ¿para qué valores es positiva? ¿Creciente? ¿Decreciente? Identifique todos los valores máximos y mínimos locales.

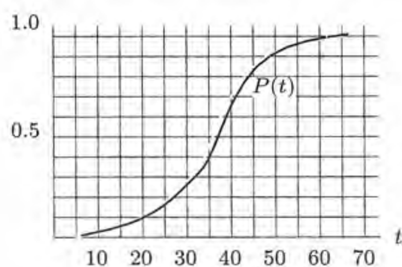


Figura 8.29.

Para los problemas 4 y 5, sea $p(t) = -0.0375t^2 + 0.225t$ la función de densidad del tiempo de conservación de una marca de plátanos que dura hasta cuatro semanas. El tiempo, t, se mide en semanas y $0 \le t \le 4$.

4. Encuentre la mediana del tiempo de conservación de un plátano utilizando $p(t)$. Indique la mediana en una gráfica de $p(t)$. ¿Parece que la mitad del área está a la derecha de la mediana y la mitad está a la izquierda?

5. Encuentre la media del tiempo de conservación de un plátano utilizando $p(t)$. Indique la media en una gráfica de $p(t)$. ¿Parece que la media está donde la función de densidad se equilibraría?

6. Sea $p(t) = 0.1e^{-0.1t}$ la función de densidad del tiempo de espera en una estación del Metro, con t en minutos, $0 \le t \le 60$.

(a) Trace una gráfica de $p(t)$. Utilícela para calcular visualmente la mediana y la media.

(b) Calcule la mediana y la media. Trace ambas sobre la gráfica de $p(t)$.

(c) Interprete la mediana y la media en términos de tiempo de espera.

7. En 1950 se realizó un experimento observando los intervalos de tiempo entre automóviles sucesivos en la autopista de Arroyo Seco. Los datos[8] muestran que, si x es el tiempo en segundos y $0 \le x \le 40$, la función de densidad de estos intervalos es aproximadamente

$$p(x) = 0.122e^{-0.122x}.$$

Encuentre la mediana y la media del intervalo de tiempo. Interprételas en términos de automóviles en la autopista.

[8]Reportado por Daniel Furlough y Frank Barnes.

8. Suponga que x mide el tiempo (en horas) que tarda un estudiante en terminar un examen. Suponga además que todos los estudiantes terminan antes de dos horas y la función de densidad para x está dada por

$$p(x) = \begin{cases} x^3/4 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

(a) ¿Qué proporción de estudiantes necesita entre 1.5 y 2.0 horas para terminar el examen?

(b) ¿Cuál es la media de tiempo para que los estudiantes terminen el examen?

(c) Calcule la mediana de esta distribución.

9. Sea $P(x)$ la función de distribución acumulativa para la distribución de ingreso en Estados Unidos en 1973 (el ingreso se mide en miles de dólares.) Algunos valores de $P(x)$ se muestran en la siguiente tabla:

Ingreso x (miles)	1	4.4	7.8	12.6	20	50
$P(x)$ (%)	1	10	25	50	75	99

(a) ¿Qué fracción de la población ganó entre \$20,000 y \$50,000?

(b) ¿Cuál fue la mediana de ingreso?

(c) Trace la función de densidad para esta distribución. Aproximadamente, ¿dónde tiene un máximo su función de densidad? ¿Cuál es la importancia de este punto, en términos de la distribución del ingreso? ¿Cómo puede usted reconocer este punto en la gráfica de la función de densidad y en la gráfica de la distribución acumulativa?

10. Con frecuencia, la distribución de los registros de IQ (o coeficiente intelectual) se modela mediante la distribución normal con media 100 y desviación estándar 15.

(a) Escriba una fórmula de la distribución de densidad de los registros de IQ.

(b) Evalúe la fracción de la población con IQ entre 115 y 120.

11. La velocidad de los automóviles en una carretera se aproxima por una distribución normal con una media de $\mu = 58$ km/hr y una desviación estándar de $\sigma = 4$ km/hr.

(a) ¿Qué probabilidad hay de que un automóvil seleccionado al azar vaya con una velocidad de entre 60 y 65 km/hr?

(b) ¿Qué fracción de todos los automóviles se registra con una velocidad menor a 52 km/hr?

RESUMEN DEL CAPÍTULO

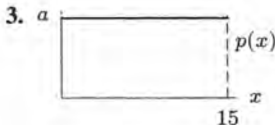
- **Función de densidad**
- **Función de distribución acumulativa**
- **Mediana**
- **Mediana**
- **Distribución normal**

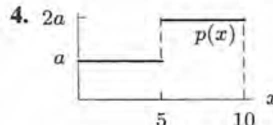
PROBLEMAS DE REPASO

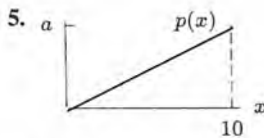
Para los problemas 1 y 2, trace una gráfica de una función de densidad que represente la distribución dada.

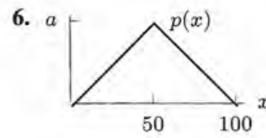
1. La edad a la que muere una persona en una sociedad con alta mortalidad infantil, y en la que los adultos mueren por lo general entre los 40 y los 60 años de edad.
2. Las estaturas de las personas en una escuela primaria.

Para los problemas 3 al 6, sea $p(x)$ una función de densidad, encuentre el valor de a.

3. 

4. 

5. 

6. 

7. La figura 8.30 muestra la distribución del número de años de educación cursados por los adultos de una población. ¿Qué le indica a usted la forma de la gráfica? Evalúe el porcentaje de adultos que han cursado por lo menos 10 años de educación.

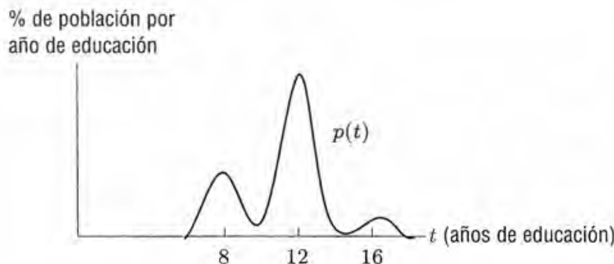


Figura 8.30.

8. ¿Cuál de las siguientes funciones tiene más sentido como modelo de densidad de probabilidad que representa el tiempo (en minutos, comenzando en $t = 0$) en el que el próximo cliente entrará en una tienda?

   (a) $p(t) = \begin{cases} \cos t & 0 \le t \le 2\pi \\ e^{t-2\pi} & t \ge 2\pi \end{cases}$
   (b) $p(t) = 3e^{-3t}$ para $t \ge 0$
   (c) $p(t) = e^{-3t}$ para $t \ge 0$
   (d) $p(t) = 1/4$ para $0 \le t \le 4$

9. Una comisión del Congreso de Estados Unidos está investigando a un contratista de la Defensa, cuyos proyectos, con frecuencia, rebasan los costos. Los datos en la tabla 8.8 muestran a y, la fracción de proyectos que se exceden a lo sumo en C%.

   (a) Trace una gráfica de los datos con C en el eje horizontal. ¿Es ésta una función de densidad o una función de distribución acumulativa? Trace una curva que pase por estos puntos.

   (b) Si considera que trazó una función de densidad en el inciso (a), trace la correspondiente función de distribución acumulativa en otro conjunto de ejes. Si considera que trazó una función de distribución acumulativa en el inciso (a), trace la correspondiente función de densidad.

   (c) Con base en la tabla, ¿cuál es la probabilidad de que haya un exceso de costo de 50% o más? ¿Entre 20% y 50%? ¿Alrededor de qué porcentaje es más probable que esté el exceso de costo?

Tabla 8.8 *Fracción, y, que se excede a lo sumo en C%.*

C	−20%	−10%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
y	0.01	0.08	0.19	0.32	0.50	0.80	0.94	0.99

10. La función de densidad y la función de distribución acumulativa de la altura del pasto de un prado se dan en las figuras 8.31 y 8.32, respectivamente.

    (a) Hay dos especies de pasto en el prado: un pasto bajo y uno alto. Explique cómo refleja la gráfica de la función de densidad este hecho.

    (b) Explique cómo refleja la gráfica de la función de distribución acumulativa el hecho de que haya dos especies de pasto en el prado.

    (c) ¿Aproximadamente qué porcentaje del pasto en el prado pertenece a la especie del pasto bajo?

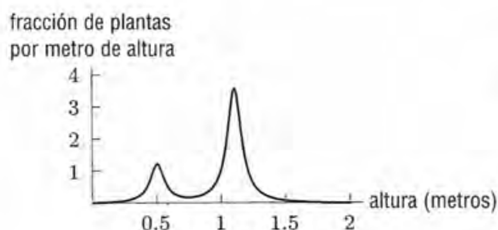


Figura 8.31.

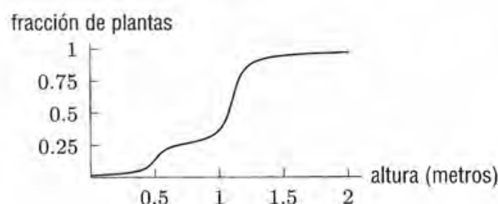


Figura 8.32.

11. Una persona que viaja regularmente en el autobús de las 9:00 a. m. de Oakland a San Francisco informa que el autobús casi siempre se retrasa unos minutos, pero raras veces más de cinco minutos. Nos indican, además, que el autobús nunca llega más de dos minutos antes, aunque en muy raras ocasiones llega un poco antes.

(a) Trace una función de densidad, $p(t)$, donde t sea el número de minutos de retraso del autobús. Sombree la región bajo la curva entre $t = 2$ minutos y $t = 4$ minutos. Explique lo que representa esta área.

(b) Trace ahora la función de distribución acumulativa $P(t)$. ¿Qué medición(es) corresponden al área sombreada? ¿Qué puntos de inflexión de la gráfica de P corresponden a la gráfica de p? Interprete los puntos de inflexión en la gráfica de P sin referirse a la gráfica de p.

12. Suponga que la función de densidad para radios r (mm) de gotas de lluvia esféricas durante una tormenta es constante sobre el intervalo $0 < r < 5$ y cero en todas las demás partes.

(a) Encuentre la función de densidad $f(r)$ para los radios.

(b) Encuentre la función de distribución acumulativa $F(r)$.

11. La probabilidad de que falle un transistor entre $t = a$ meses y $t = b$ meses se encuentra con $c\int_a^b e^{-ct}dt$, para alguna constante c.

(a) Si la probabilidad de falla en los primeros seis meses es del 10%, ¿cuál es c?

(b) Dado el valor de c en el inciso (a), ¿cuál es la probabilidad de que el transistor falle en los siguientes seis meses?

11. Mientras usted camina a lo largo de la calle donde vive, accidentalmente se le cae un guante, pero no sabe dónde cayó. Suponga que la densidad de probabilidad $p(x)$ de que se haya caído el guante a x kilómetros de su casa (en la calle señalada) es

$$p(x) = 2e^{-2x} \quad \text{para } x \geq 0.$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que se le haya caído a no más de un kilómetro de su casa?

(b) ¿A qué distancia y de su casa es la probabilidad igual a 0.95 de que se le haya caído a no más de y km de su casa?

En los problemas del 15 al 19, una cantidad x se distribuye en una población con una función de densidad de probabilidad $p(x)$ y una función de distribución acumulativa $P(x)$. En los problemas del 15 al 19 decida si los enunciados son verdaderos o falsos. Explique sus respuestas.

15. Si $p(10) = 1/2$, entonces la mitad de la población tiene $x < 10$.

16. Si $P(10) = 1/2$, entonces la mitad de la población tiene $x < 10$.

17. Si $p(10) = 1/2$, entonces la fracción de la población que está entre $x = 9.98$ y $x = 10.04$ es aproximadamente 0.03

18. Si $p(10) = p(20)$, entonces ninguna persona de la población tiene valores de x que estén entre 10 y 20.

19. Si $P(10) = P(20)$, entonces ninguna persona de la población tiene valores de x que estén entre 10 y 20.

PROYECTOS

1. Distribución de probabilidad triangular

Las distribuciones de probabilidad triangular, como la de la gráfica de la figura 8.33, se utilizan en los negocios para modelar la incertidumbre. Dicha distribución se puede utilizar para modelar una variable donde sólo están disponibles tres elementos de información: una cota inferior ($x = a$), un valor más probable ($x = c$), y una cota superior ($x = b$).

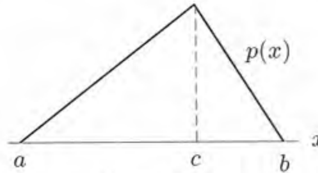


Figura 8.33.

Por tanto, podemos escribir la función $p(x)$ como dos funciones lineales.

$$p(x) = \begin{cases} m_1 x + b_1 & a \leq x \leq c \\ m_2 x + b_2 & c < x \leq b. \end{cases}$$

(a) Encuentre el valor geométrico de $p(c)$, utilizando el criterio de que la probabilidad de que x tenga un cierto valor entre a y b es 1.

Suponga que un nuevo producto cuesta entre \$6 y \$10 por unidad de producción, con un costo más probable de \$9.

(b) Encuentre $p(9)$.

(c) Utilice el hecho de que $p(6) = p(10) = 0$ y el valor de $p(9)$ que usted encontró en el inciso (b) para hallar m_1, m_2, b_1 y b_2.

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que el costo de producción por unidad sea menos de \$8?

(e) ¿Cuál es la mediana del costo?

(f) Escriba una fórmula para la función de distribución de probabilidad acumulativa $P(x)$ para

(i) $6 \leq x \leq 9$, (ii) $9 < x \leq 10$.

Trace la gráfica de $P(x)$.

Capítulo 9

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Muchas cantidades dependen de más de una sola variable: el aumento en la cantidad de alimentos depende de la cantidad de lluvia y de fertilizante que se utilice; la rapidez de una reacción química depende de la temperatura y la presión del medio ambiente en que se realice; la cantidad de carne comprada depende del precio y del ingreso del comprador; la cantidad de lluvia de cenizas de una erupción volcánica depende de la distancia del volcán y el tiempo desde la erupción.

En este capítulo veremos cómo ampliar el concepto de la derivada a funciones de dos o más variables.

9.1 COMPRENSIÓN DE LAS FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Para evitar que los aviones vuelen con muchos asientos vacíos, las aerolíneas venden algunos boletos a precio normal y algunos con descuento. Para una ruta en particular, los ingresos de la aerolínea, R, obtenidos en un periodo de tiempo dado, se determinan por el número de boletos vendidos a precio normal, x, y por el número de boletos con descuento, y. Decimos que R es una función de x y y, y escribimos

$$R = f(x, y).$$

Esto es igual que la notación de función del cálculo en una variable. La variable R es la variable dependiente y las variables x y y son las variables independientes. La letra f indica la *función* o regla que da el valor de R correspondiente a valores dados de x y y. El conjunto de todas las entradas posibles (x, y), recibe el nombre de *dominio* de f.

Una función de dos variables se puede representar en forma numérica por una tabla de valores, algebraicamente por una fórmula, o de manera gráfica por un diagrama de contorno. En esta sección damos ejemplos numéricos y algebraicos; en la sección 9.2 presentamos los diagramas de contorno.

Funciones dadas numéricamente

En la tabla 9.1 se muestra (en dólares) el ingreso, R, de la ruta particular de una aerolínea, como función del número de boletos a precio sin descuento y el número de boletos vendidos con descuento.

Tabla 9.1 *Ingresos por venta de boletos como función de x y y*

Número de boletos con descuento, y \ Número de boletos a precio normal, x	100	200	300	400
200	75,000	110,000	145,000	180,000
400	115,000	150,000	185,000	220,000
600	155,000	190,000	225,000	260,000
800	195,000	230,000	265,000	300,000
1,000	235,000	270,000	305,000	340,000

Los valores de x se muestran en la parte superior de la tabla y los valores de y se muestran en el lado izquierdo, mientras que en el contenido de la tabla se dan precisamente los valores correspondientes de $f(x, y)$. Por ejemplo, para hallar el valor de $f(300, 600)$, vemos la columna correspondiente a $x = 300$ y el renglón $y = 600$, donde encontramos el número 225,000. Entonces,

$$f(300, 600) = 225,000.$$

Esto significa que el ingreso de 300 boletos a precio sin descuento y los 600 boletos con descuento es de \$225,000.

Observe cómo difiere esto de la tabla de valores de una función de una variable, donde un renglón o una columna es suficiente para enlistar los valores de la función. Aquí son necesarios muchos renglones y columnas porque la función tiene un valor para cada par de valores de las variables independientes.

Funciones dadas algebraicamente

La función dada en la tabla 9.1 se puede representar mediante una fórmula. Observando los renglones, vemos que cada 100 boletos adicionales vendidos a precio sin descuento elevan el ingreso en \$35,000, de modo que cada boleto a precio sin descuento debe costar \$350. Del mismo modo, si observamos en una columna veremos que otros 200 boletos vendidos con descuento aumentan el ingreso en \$40,000, así que cada boleto con descuento debe costar \$200. Por consiguiente, la función de ingreso está dada por la fórmula

$$R = 350x + 200y.$$

Ejemplo 1 Dé una fórmula para la función $M = f(B, t)$ donde M es la cantidad de dinero en una cuenta bancaria t años después de una inversión inicial de B dólares, si el interés se acumula a razón de 5% por año compuesto
(a) anualmente, **(b)** continuamente.

Solución **(a)** Compuesto anualmente significa que M aumenta en un factor de 1.05 cada año, de modo que

$$M = f(B,t) = B(1.05)^t.$$

(b) Compuesto continuamente significa que M crece según la fórmula e^{kt}, con $k = 0.05$, de modo que

$$M = f(B, t) = Be^{0.05t}.$$

Ejemplo 2 Una compañía de renta de automóviles cobra \$40 al día y 15 centavos por milla por sus automóviles.

(a) Escriba una fórmula para hallar el costo, C, de rentar un automóvil como función del número de días, d, y del número de millas recorridas, m.

(b) Si $C = f(d, m)$, encuentre $f(5{,}300)$ e interprétela.

Solución **(a)** El costo total en dólares por rentar un automóvil es 40 por el número de días más 0.15 por el número de millas, es decir

$$C = 40d + 0.15m.$$

(b) Tenemos

$$\begin{aligned} f(5,300) &= 40(5) + 0.15(300) \\ &= 200 + 45 \\ &= 245. \end{aligned}$$

Vemos que $f(5{,}300) = 245$. Esto nos indica que si rentamos un automóvil durante cinco días y recorremos 300 millas, nos cuesta \$245.

Estrategia para estudiar funciones de dos variables: hacer variar una variable a la vez

Es posible aprender mucho acerca de una función de dos variables al hacer que una de ellas cambie de valor mientras la otra se mantiene fija. Esto da una función de una variable, llamada *sección transversal* de la función original.

Concentración de un medicamento en la sangre

Cuando se inyecta un medicamento en el tejido muscular, aquél se difunde en el torrente sanguíneo. La concentración del medicamento en la sangre aumenta hasta alcanzar un máximo y después disminuye. La concentración, C (en mg por litro), del medicamento en la sangre es una función de dos variables: x, la cantidad (en mg) del medicamento proporcionado por la inyección y t, el tiempo (en horas) desde que se aplicó la inyección. Se sabe que

$$C = f(x, t) = te^{-t(5-x)} \quad \text{para } 0 \le x \le 4 \text{ y } t \ge 0.$$

Ejemplo 3 En términos de la concentración de un medicamento en la sangre, explique el significado de las secciones transversales:

(a) $f(4, t)$ **(b)** $f(x, 1)$

Solución **(a)** Mantener x fija en 4 significa que estamos considerando una inyección de 4 mg del medicamento; dejar que t varíe significa que estamos observando el efecto de esta dosis a medida que pasa el tiempo. Por tanto, la función $f(4, t)$ describe la concentración del medicamento en la sangre que resulta de una inyección de 4 mg como función del tiempo. La figura 9.1 muestra la gráfica de $f(4, t) = te^{-t}$. Observe que la concentración en la sangre por esta dosis es máxima una hora después de la inyección, y que la concentración en la sangre finalmente se aproxima a cero.

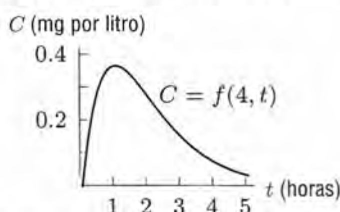


Figura 9.1. La función $f(4, t)$ muestra la concentración en la sangre como resultado de una inyección de 4 mg.

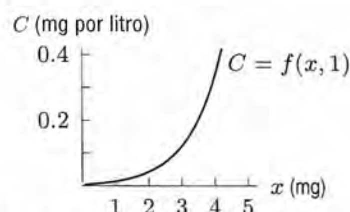


Figura 9.2. La función $f(x, 1)$ muestra la concentración en la sangre, una hora después de la inyección.

(b) Mantener t fija en 1 significa que estamos prestando atención a la sangre 1 hora después de la inyección; dejar que x varíe significa que estamos considerando el efecto de dosis diferentes en ese momento. Entonces, la función $f(x,1)$ da la concentración del medicamento en la sangre 1 hora después de la inyección como una función de la cantidad inyectada. La figura 9.2 muestra la gráfica de $f(x, 1) = e^{-(5-x)} = e^{x-5}$. Observe que $f(x,1)$ es una función creciente de x. Esto tiene sentido: si administramos más medicamento, la concentración en el torrente sanguíneo es más alta.

Ejemplo 4 Continúe con $C = f(x, t) = te^{-t(5-x)}$. Trace una gráfica de las secciones transversales de $f(a, t)$ para $a = 1, 2, 3$ y 4 en un mismo sistema de coordenadas. Describa cómo cambia la gráfica para valores más grandes de a y explique lo que esto significa en términos de concentración del medicamento en la sangre.

Solución La función de una variable $f(a, t)$ representa el efecto de una inyección de a mg en el tiempo t. La figura 9.3 muestra las gráficas de las cuatro funciones $f(1, t) = te^{-4t}$, $f(2, t) = te^{-3t}$, $f(3, t) = te^{-2t}$ y $f(4, t) = te^{-t}$ correspondientes a inyecciones de 1, 2, 3 y 4 mg del medicamento. La forma general de la gráfica es la misma en cada caso: la concentración en la sangre es cero en el tiempo de inyección $t = 0$, después aumenta a un valor máximo y luego decrece hacia cero nuevamente. Vemos que si se administra una dosis más grande del medicamento, el pico de la gráfica ocurre más tarde y es más alto. Esto tiene sentido, ya que una dosis más grande tarda más en disolverse completamente en el torrente sanguíneo y producirá una concentración más alta cuando llegue a su máximo.

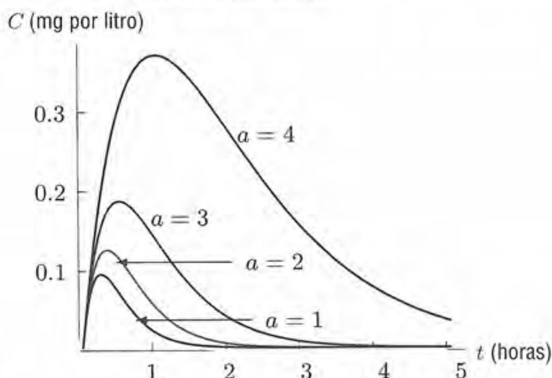


Figura 9.3. Concentración $C = f(a, t)$ del medicamento por una inyección de a mg.

Problemas para la sección 9.1

Para los problemas 1 al 5 consulte la tabla 9.2 que muestra[1] el consumo semanal de carne de res, C (en libras), de una familia promedio como función de p, el precio de la carne (en $/lb) e I, el ingreso anual de un hogar (en miles de dólares).

Tabla 9.2 *Cantidad de carne comprada (libras/familia/semana)*

I \ p	3.00	3.50	4.00	4.50
20	2.65	2.59	2.51	2.43
40	4.14	4.05	3.94	3.88
60	5.11	5.00	4.97	4.84
80	5.35	5.29	5.19	5.07
100	5.79	5.77	5.60	5.53

1. Proporcione algunas tablas para consumo de carne como función de p, con I fija en $I = 20$ e $I = 100$. Dé tablas para consumo de carne como función de I, con p fija en $p = 3.00$ y $p = 4.00$. Haga comentarios sobre lo que observa en las tablas.
2. ¿Cómo varía el consumo de carne como función del ingreso familiar si el precio de la carne de res se mantiene constante?
3. Presente una tabla que muestre la cantidad de dinero, M, que la familia promedio gasta en carne (en dólares por familia por semana) como función del precio de la carne y del ingreso familiar.
4. Haga una tabla de la proporción, P, del ingreso familiar gastado en carne por semana como función del precio y del ingreso. (Observe que P es la fracción del ingreso gastado en carne.)
5. Exprese P, la proporción de ingreso familiar gastado en carne por semana, en términos de la función original $f(I, p)$ que dio el consumo como función de p y de I.

[1]Adaptado de Lipsey, Richard G., *An introduction to Positive Economics*, 3a. edición, Weidenfeld y Nicolson, Londres, 1971.

6. Trace una gráfica de la función f de la cuenta bancaria del ejemplo 1(a), en la página 322, manteniendo B fija en tres valores diferentes y dejando que sólo t varíe. Después trace la gráfica de f, manteniendo t fija en tres valores diferentes y dejando que sólo B varíe. Explique lo que vea.

7. El número, n, de nuevos automóviles vendidos en un año es una función del precio de los automóviles nuevos, c, y del precio promedio de la gasolina, g.

(a) Si c se mantiene constante, ¿n es una función creciente o decreciente de g? ¿Por qué?

(b) Si g se mantiene constante, ¿n es una función creciente o decreciente de c? ¿Por qué?

8. Las ventas totales de un producto, S, se pueden expresar como función del precio p cobrado por el producto y la cantidad, a, gastada en publicidad, de modo que $S = f(p, a)$. ¿Usted esperaría que f sea una función creciente o decreciente de p? ¿Espera que f sea una función creciente o decreciente de a? ¿Por qué?

9. Emplee la tabla 9.3. ¿Es f una función creciente o decreciente de x? ¿Es f una función creciente o decreciente de y?

Tabla 9.3 *Valores de una función* $f(x, y)$

x \ y	0	1	2	3	4	5
0	102	107	114	123	135	150
20	96	101	108	117	129	144
40	90	95	102	111	123	138
60	85	90	97	106	118	133
80	81	86	93	102	114	129

Los problemas 10 y 11 se refieren al costo, C, de renta de un automóvil de una compañía que cobra $40 por día y 15 centavos una milla, así $C = f(d, m) = 40d + 0.15m$, donde d es el número de días y m es el número de millas.

10. Haga una tabla de valores para C, usando $d = 1, 2, 3, 4$ y $m = 100, 200, 300$ y 400. Su tabla deberá tener 16 valores.

11. **(a)** Encuentre $f(3{,}200)$ e interprétela.

(b) Explique la importancia de $f(3, m)$ en términos de costos de renta de automóviles. Haga una gráfica de esta función, con C como función de m.

(c) Explique la importancia de $f(d, 100)$ en términos de costos de la renta de automóviles. Trace una gráfica de esta función, con C como una función de d.

12. Usted planea un largo viaje por carretera y su principal costo será el de la gasolina.

(a) Construya una tabla que muestre cómo el costo diario de combustible varía como función del precio de la gasolina (en dólares por galón) y el número de galones consumidos al día.

(b) Si su automóvil recorre 30 millas por cada galón de gasolina, haga una tabla que muestre cómo el costo diario de gasolina varía como función de la distancia diaria recorrida y del precio de la gasolina.

13. La temperatura ajustada para viento-frío es una temperatura que indica cuánto frío se siente como resultado de la combinación de viento y temperatura. Véase la tabla 9.4.

(a) Si la temperatura es de 0 °F y la velocidad del viento es de 15 mph, ¿cuánto frío se siente?

(b) Si la temperatura es de 32 °F, ¿qué velocidad del viento hace que se sienta como de 22 °F?

(c) Si la temperatura es de 25 °F, ¿qué velocidad del viento hace que se sienta como de 20 °F?

(d) Si el viento está soplando a 15 mph, ¿qué temperatura hace que se siente como de 0 °F?

Tabla 9.4 *Temperatura ajustada para viento-frío (°F) como función de la velocidad del viento y la temperatura*

Velocidad del viento (mph) \ Temperatura (°F)	35	30	25	20	15	10	5	0
5	33	27	21	16	12	7	0	−5
10	22	16	10	3	−3	−9	−15	−22
15	16	9	2	−5	−11	−18	−25	−31
20	12	4	−3	−10	−17	−24	−31	−39
25	8	1	−7	−15	−22	−29	−36	−44

14. Usando la tabla 9.4 haga tablas de la temperatura ajustada para viento-frío como función de la velocidad del viento para temperaturas de 20 °F y de 0 °F.

15. Usando la tabla 9.4 haga tablas de la temperatura ajustada para viento-frío como función de la temperatura para velocidades del viento de 5 mph y de 20 mph.

16. El índice de calor es una temperatura que indica cuánto calor se siente como resultado de la combinación de la temperatura y la humedad. Véase la tabla 9.5. Es probable que se presente agotamiento por calor cuando el índice de calor llegue a los 105 °F.

(a) Si la temperatura es de 80 °F y la humedad es del 50%, ¿cuánto calor se siente?

(b) ¿Qué humedad hace que 90 °F se sienta como 90 °F?

(c) Haga una tabla que muestre la temperatura aproximada a la que el agotamiento por calor se convierte en un peligro, como función de la humedad.

(d) Explique por qué el índice de calor está a veces arriba de la temperatura real y a veces debajo de ésta.

Tabla 9.5 *Índice de calor (°F) como función de la humedad (H%) y de la temperatura (T°F)*

H \ T	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
0	64	69	73	78	83	87	91	95	99	103
10	65	70	75	80	85	90	95	100	105	111
20	66	72	77	82	87	93	99	105	112	120
30	67	73	78	84	90	96	104	113	123	135
40	68	74	79	86	93	101	110	123	137	151
50	69	75	81	88	96	107	120	135	150	
60	70	76	82	90	100	114	132	149		

17. Usando la tabla 9.5 trace una gráfica del índice de calor como función de la humedad con temperatura fija en 70 °F y en 100 °F. Explique las características de cada gráfica y la diferencia entre ellas en términos de sentido común.

Los problemas 18 al 21 investigan la forma en que la demanda de café depende del precio del café y del precio del té. Suponga que la demanda de café, Q, en miles de libras por semana, depende del precio del café, c, y del precio del té, t, ambos en dólares por libra, de acuerdo con la fórmula

$$Q = f(c, t) = 100\frac{t}{c}.$$

18. **(a)** Si el precio del té es de $1 por libra, la curva de demanda de café se da con $Q = f(c,1) = 100/c$. Trace la gráfica de esta curva de demanda, con Q como función de c, para $0 \le c \le 6$.
    (b) En los mismos ejes, trace las curvas de demanda para café con $t = 1, 2, 3, 4, 5$ y marque cada curva con el correspondiente valor de t. ¿Qué observa? ¿Cómo cambia la curva de demanda de café a medida que el precio del té aumenta? Explique, en términos de la demanda de café, por qué esto es razonable.

19. ¿Es Q una función creciente o decreciente de c? ¿Es Q una función creciente o decreciente de t? Explique, en términos de la demanda de café, por qué esto es así.

20. Haga una tabla que muestre el valor de Q cuando $t = 1, 2, 3, 4$ y $c = 1, 2, 3, 4$. (Debe tener 16 valores de Q en su tabla.) Use su tabla para comprobar sus respuestas al problema 19.

21. También podemos considerar la demanda de té como una función del precio del café y del té. Dé una posible fórmula para la demanda del té como función de c y de t.

22. La niebla de un aeropuerto se puede despejar si se calienta el aire. La cantidad de calor requerido, $H(T, w)$ (en calorías por metro cúbico de niebla), depende de la temperatura del aire, T (en °C), y de la humedad de la niebla, w (en gramos por metro cúbico de niebla). La figura 9.4 muestra varias gráficas de H respecto a T con w fija.
    (a) Estime $H(20, 0.3)$ y explique qué información nos da.
    (b) Haga una tabla de valores para $H(T, w)$. Utilice $T = 0, 10, 20, 30, 40$ y $w = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$.

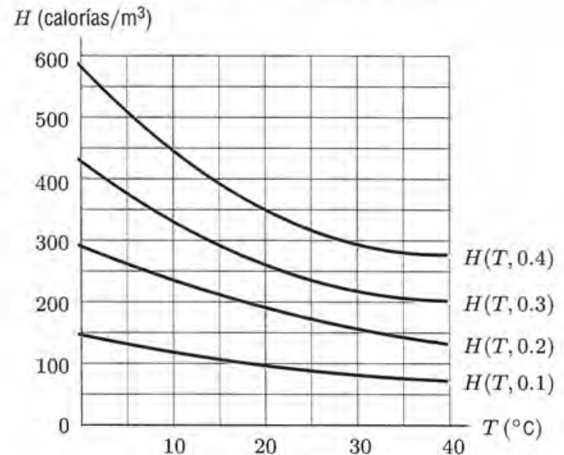


Figura 9.4.

9.2 DIAGRAMAS DE CONTORNO

¿Cómo podemos visualizar una función de dos variables? Las funciones de dos variables se representan a veces con *diagramas de contorno*.

Mapas meteorológicos

La figura 9.5 muestra un mapa meteorológico tomado de un periódico. Muestra la más alta temperatura pronosticada, T, en grados Fahrenheit (°F), en las diferentes zonas de Estados Unidos en ese día. Las curvas del mapa, llamadas *isotermas*, separan al país en zonas, según si T está en 60, 70, 80, 90 o 100 grados. (*Iso* significa mismo y *terma* significa calor.) Observe que la isoterma que separa las zonas de 80 y 90 enlaza todos los puntos donde la temperatura está pronosticada de 90 °F exactamente.

Si la función $T = f(x, y)$ da la más alta temperatura pronosticada (en °F) en este día en particular como función de la latitud x y de la longitud y, entonces las isotermas son gráficas de las ecuaciones

$$f(x, y) = c$$

donde c es una constante. En general, estas curvas se denominan *contornos* y una gráfica que muestra los contornos seleccionados de una función se denomina un diagrama de contorno.

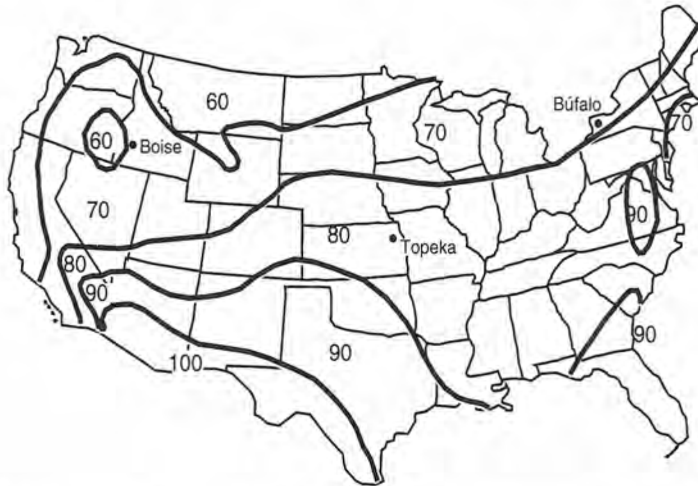


Figura 9.5. Mapa meteorológico que muestra las más altas temperaturas pronosticadas, T, en un día de verano.

Ejemplo 1 Estime el valor pronosticado de T en Boise, Idaho; Topeka, Kansas, y Búfalo, Nueva York.

Solución Boise y Búfalo están en la región de los 70 y Topeka en la de los 80. Entonces, la temperatura pronosticada en Boise y Búfalo está entre 70 y 80, mientras que la temperatura pronosticada en Topeka está entre 80 y 90. En realidad, podemos dar más datos. Aun cuando Boise y Búfalo están en los 70, Boise está bastante cerca de la isoterma $T = 70$, mientras que Búfalo está bastante cerca de la isoterma $T = 80$. Por tanto, estimamos que la temperatura estará un poco arriba de 70 en Boise y cerca de 80 por valores menores en Búfalo. Topeka está hacia la mitad entre la isoterma $T = 80$ y la isoterma $T = 90$. En consecuencia, pensamos que la temperatura en Topeka estará cercana a la mitad entre 80 y 90. En realidad, las altas temperaturas reales para ese día fueron de 71 °F para Boise, 79 °F para Búfalo y 86 °F para Topeka.

Mapas topográficos

Otro ejemplo común de un diagrama de contorno es un mapa topográfico como el que se muestra en la figura 9.6. Aquí, los contornos separan regiones de menor elevación de regiones de mayor elevación y dan una imagen completa de la naturaleza del terreno. Estos mapas topográficos se colorean generalmente de verde en las regiones más bajas y de café, rojo, o incluso blanco en las elevaciones mayores.

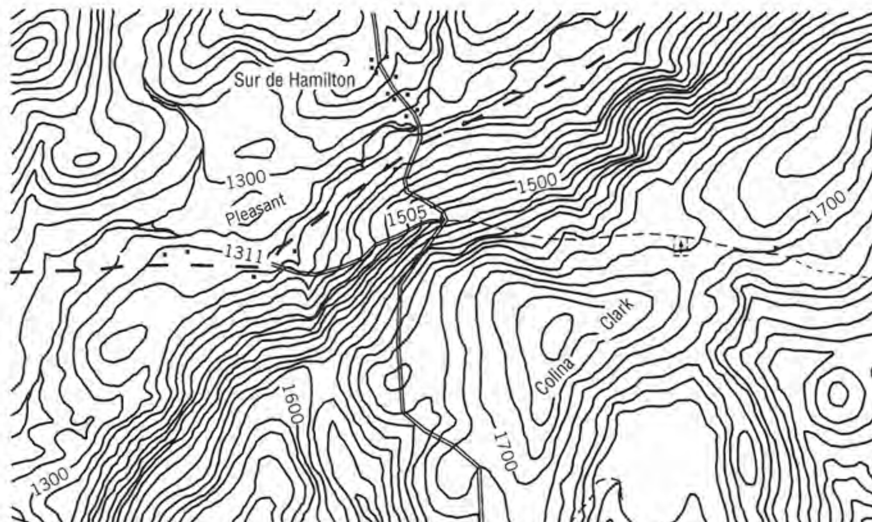


Figura 9.6. Mapa topográfico de las regiones cercanas al sur de Hamilton, Nueva York.

Ejemplo 2 Explique por qué el mapa topográfico que se muestra en la figura 9.7 corresponde al terreno como el que se muestra en la figura 9.8.

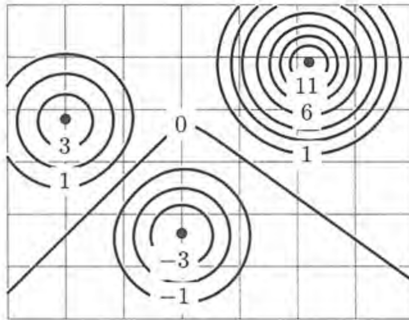


Figura 9.7. Mapa topográfico.

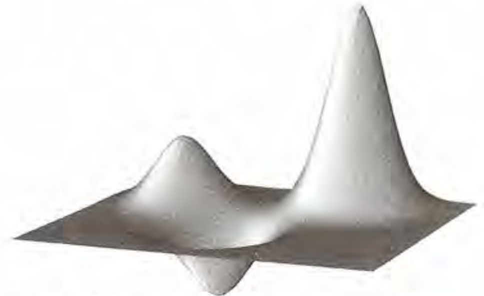


Figura 9.8. Terreno correspondiente al mapa topográfico de la figura 9.7.

Solución Vemos en el mapa topográfico de la figura 9.7 que hay dos colinas, una con una altura de unos 12 y la otra con una altura de unos 4. La mayor parte del terreno es de altura 0, y hay un valle con altura de -4. Esto se semeja al terreno de la figura 9.8 porque hay dos colinas (una más alta que la otra) y un valle.

Los contornos de un mapa topográfico describen el contorno o forma del terreno. Como cada punto a lo largo del mismo contorno tiene la misma elevación, a los contornos también se les llama *curvas de nivel* o *conjuntos de nivel*. Cuanto más cercanos entre sí estén los contornos, el terreno será más empinado; cuanto más retirados entre sí estén los contornos, el terreno será más plano (siempre que, por supuesto, la elevación entre contornos varíe en una cantidad constante). Ciertas configuraciones del terreno tienen características especiales. El pico de una montaña suele estar rodeado de contornos como el de la figura 9.9. Un paso en una cadena de montañas puede tener contornos como el de la figura 9.10. Un valle extenso tiene contornos paralelos que indican elevaciones a ambos lados del valle (véase la figura 9.11); una sierra alargada tiene el mismo tipo de contorno, sólo que las elevaciones disminuyen en ambos lados de la sierra. Observe que los números de elevación de los contornos son tan importantes como las curvas mismas.

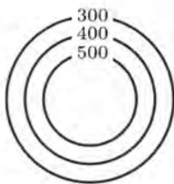


Figura 9.9. Pico de una montaña.

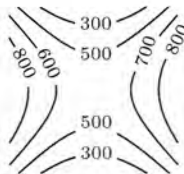


Figura 9.10. Paso entre dos montañas.

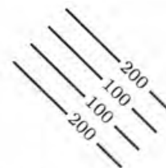


Figura 9.11. Valle extenso.

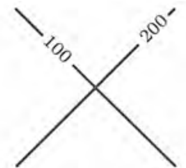


Figura 9.12. Líneas de contorno imposibles.

Hay algunas cosas que no pueden indicar los contornos. Dos contornos correspondientes a diferentes elevaciones no se pueden cruzar entre sí como se muestra en la figura 9.12. Si se cruzan, el punto de intersección de las dos curvas tendría dos diferentes elevaciones, lo cual es imposible (suponiendo que el terreno no tenga salientes). Por lo general, se trazan contornos para valores igualmente espaciados de la función.

Uso de diagramas de contorno

Considere el efecto de las diferentes condiciones climatológicas en la producción de maíz en Estados Unidos. ¿Qué ocurriría si la temperatura promedio fuera a aumentar (por ejemplo, debido al calentamiento

del planeta) o si la cantidad de lluvia disminuyera (debido a una sequía)? Una manera de estimar el efecto de estos cambios climáticos es usar la figura 9.13. Este mapa es un diagrama de contorno que da la producción de maíz $C = f(R, T)$ en Estados Unidos como función de la cantidad total de lluvia, R, en pulgadas, y de la temperatura promedio, T, en grados Fahrenheit, durante la temporada de cultivo.[2] Suponga que en la actualidad, $R = 15$ pulgadas y $T = 76$ °F. La producción se mide como porcentaje de la producción actual; entonces, el contorno que pasa por $R = 15, T = 76$ es $C = 100$, es decir, $C = f(15, 76) = 100$.

Ejemplo 3 Utilice la figura 9.13 para evaluar $f(18, 78)$ y $f(12, 76)$ y explique las respuestas en términos de la producción de maíz.

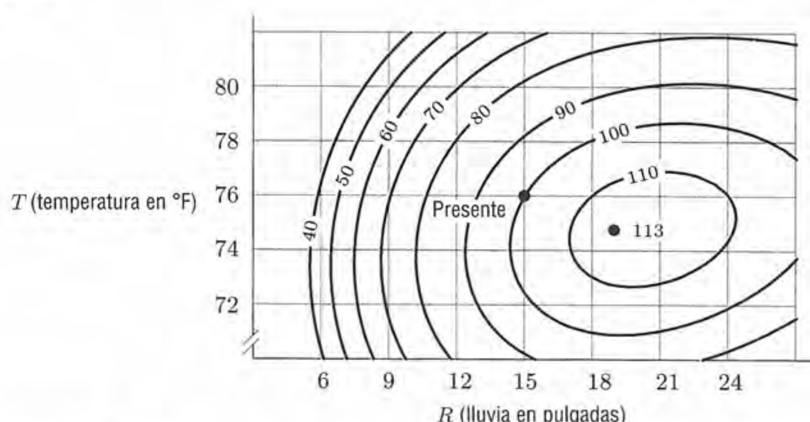


Figura 9.13. Producción de maíz, C, como función de la cantidad de lluvias y temperatura.

Solución El punto con la coordenada R 18 y la coordenada T 78 está en el contorno con valor $C = 100$, de modo que $f(18, 78) = 100$. Esto significa que si la cantidad de lluvia anual fuera de 18 pulgadas y la temperatura fuera de 78 °F, el país produciría aproximadamente la misma cantidad de maíz que en el presente, aun cuando hubiera más humedad y calor que ahora. El punto con coordenada R 12 y T 76 está más o menos a la mitad entre los contornos de $C = 80$ y $C = 90$, de modo que $f(12, 76) \approx 85$. Esto significa que si la cantidad de lluvia fuera de 12 pulgadas y la temperatura permaneciera a 76 °F, la producción de maíz caería a alrededor del 85% de lo que es ahora.

Ejemplo 4 Describa cómo cambia la producción de maíz como función de la cantidad de lluvia si la temperatura se fija al valor actual de la figura 9.13. Describa cómo cambia la producción de maíz como función de la temperatura si la cantidad de lluvia se mantiene constante al valor actual. Explique con sentido común sus respuestas.

Solución Para ver qué le ocurre a la producción de maíz si la temperatura permanece fija en 76 °F, pero cambia la cantidad de lluvia, vemos la recta horizontal $T = 76$. Si comenzamos desde la lluvia presente y nos movemos a la izquierda a lo largo de la recta $T = 76$, los valores de los contornos decrecen. En otras palabras, si hay sequía, la producción de maíz decrece; por el contrario, si la lluvia aumenta, es decir, si nos movemos de la presente a la derecha a lo largo de la recta $T = 76$, la producción de maíz aumenta, llega a un máximo de más del 110% cuando $R = 21$ y luego decrece (demasiada lluvia inunda los campos). Si, en lugar de esto, la lluvia permanece al valor presente y la temperatura aumenta, avanzamos hacia arriba en la recta vertical $R = 15$. Bajo estas circunstancias, la producción de maíz decrece; un aumento de 2° ocasiona una caída de 10% en la producción. Esto tiene sentido porque las temperaturas más altas ocasionan una mayor evaporación y, por tanto, condiciones más secas, incluso con lluvia constante de 15 pulgadas. Del mismo modo, una disminución en la temperatura lleva a un muy ligero aumento en la producción, alcanzando un máximo de aproximadamente 102% cuando $T = 74$, seguido por un decremento (el maíz no crece si hay demasiado frío).

[2]Adaptado de Beaty, S. y R. Healy, *The Future of American Agriculture*, Scientific American, vol. 248, núm. 2, febrero de 1983.

Ejemplo 5 Los antibióticos pueden ser tóxicos en dosis grandes. Si han de administrarse dosis repetidas de un antibiótico, la razón a la que se excreta la medicina por los riñones debe ser observada por un médico. Una medida de la función de los riñones es la razón de filtración glomerular (RFG), que mide la cantidad de material que atraviesa la membrana exterior (o glomerular) del riñón, en mililitros por minuto. Una RFG normal es de unos 125 ml/min. La figura 9.14 da un diagrama de contorno del porcentaje, P, de una dosis de mezlocilina (un antibiótico) excretada, como función de la RFG del paciente en el tiempo, t, en horas desde que se administró la dosis.[3]

(a) En un paciente con una RFG de 50, ¿aproximadamente cuánto tarda en ser excretado el 30% de la dosis?

(b) En un paciente con una RFG de 60, ¿aproximadamente qué porcentaje de la dosis se ha excretado después de cinco horas?

(c) Explique cómo podemos decir a partir de la gráfica que, para un paciente con RFG fija, la cantidad excretada cambia muy poco después de 12 horas.

(d) El porcentaje excretado, ¿es una función creciente o decreciente del tiempo? Explique por qué esto tiene sentido.

(e) El porcentaje excretado, ¿es una función creciente o decreciente de la RFG? Explique qué significa esto para un médico que receta antibióticos a un paciente con una disfunción renal.

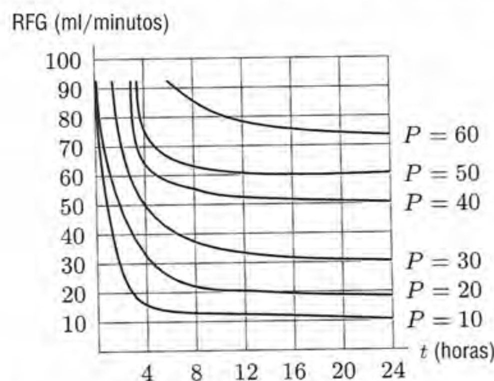


Figura 9.14. Excreción de mezlocilina como función del tiempo y la gravedad de una enfermedad renal.

Solución

(a) El contorno $P = 30$ cruza la recta horizontal RFG $= 50$ en alrededor de $t = 4$. A este paciente le toma cerca de cuatro horas excretar el 30% de la dosis.

(b) Cuando la RFG $= 60$ y $t = 5$, estamos aproximadamente en el contorno 40. El 40% de la dosis ha sido excretado después de cinco horas.

(c) Las líneas de contorno de P son aproximadamente rectas horizontales para $t \geq 12$. Si observamos la recta horizontal para cualquier RFG fija, vemos que el valor de P cambia muy poco para $t \geq 12$. Esto significa que el porcentaje excretado cambia muy poco entonces.

(d) Si fijamos la RFG y aumentamos t, vemos que los valores de P aumentan. El porcentaje excretado es una función creciente del tiempo. Esto tiene sentido porque, a medida que el tiempo transcurre, mayor cantidad del medicamento pasará por el sistema del paciente.

(e) Si fijamos el tiempo y aumentamos la RFG a lo largo de una recta vertical, los valores de P aumentan. El porcentaje excretado es una función creciente de la RFG. Vemos que en pacientes más enfermos con RFG más bajas, se excreta menos de la dosis. Ésta es la razón por la que los médicos deben ser cuidadosos en no administrar dosis frecuentes de antibióticos a pacientes con disfunción renal.

Diagramas de contorno y tablas

La tabla 9.6 muestra el índice de calor como función de la temperatura y la humedad. El índice de calor es una temperatura que indica cuánto calor se siente como resultado de la combinación de ambas. También podemos mostrar esta función mediante el uso de un diagrama de contorno. Las escalas para las dos

[3]Welling, Peter G. y Francis L. S. Tse, *Pharmacokinetics of Cardiovascular Central Nervous System, and Antimicrobial Drugs*, The Royal Society of Chemistry, núm. 195, p. 316.

variables independientes (temperatura y humedad) están dadas sobre los ejes. Los índices de calor varían de 64 a 151, así que trazaremos contornos en los valores de 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140 y 150. ¿Cómo sabemos dónde pasa el contorno de 70°? La tabla 9.6 muestra que, cuando la humedad es de 0%, el índice de calor de 70 está entre 75 °F y 80 °F, de modo que el contorno pasará aproximadamente por el punto (76, 0). También pasará por el punto (75, 10). Continuando de esta manera, podemos aproximar el contorno 70. Véase la figura 9.15. Usted puede construir todos los contornos de la figura 9.16 de una manera similar.

Tabla 9.6 *Índice de calor (°F)*

Humedad (%) \ Temperatura (°F)	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
0	64	69	73	78	83	87	91	95	99	103
10	65	70	75	80	85	90	95	100	105	111
20	66	72	77	82	87	93	99	105	112	120
30	67	73	78	84	90	96	104	113	123	135
40	68	74	79	86	93	101	110	123	137	151
50	69	75	81	88	96	107	120	135	150	
60	70	76	82	90	100	114	132	149		

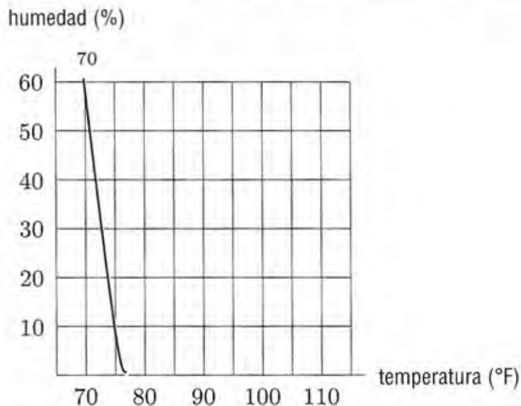


Figura 9.15. Contorno de un índice de calor de 70.

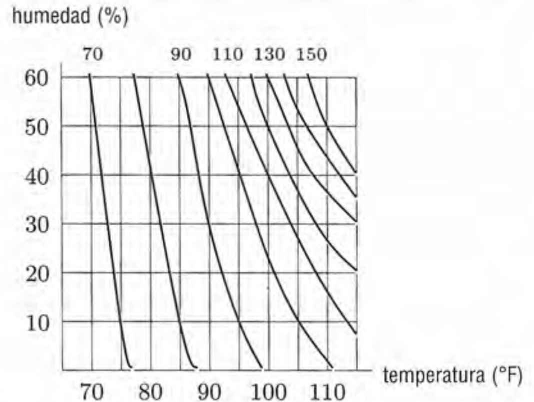


Figura 9.16. Diagrama de contorno para el índice de calor.

Ejemplo 6 Es probable que ocurra un agotamiento por calor cuando el índice de calor sea de 105 o más alto. Sobre el diagrama de contorno en la figura 9.16 sombree la región donde sea probable que ocurra el agotamiento por calor.

Solución La región sombreada de la figura 9.17 muestra los valores de la temperatura y la humedad a los que el índice de calor es superior a 105.

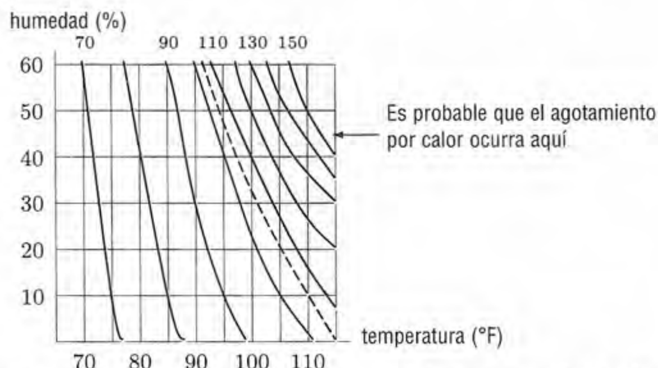


Figura 9.17. La región sombreada muestra las condiciones en las que es probable el agotamiento por calor.

Búsqueda de contornos por medio del álgebra

Las ecuaciones algebraicas para los contornos de una función f son fáciles de hallar si tenemos una fórmula para $f(x, y)$. Un contorno está formado por todos los puntos (x, y) donde $f(x, y)$ tiene un valor constante, c. Su ecuación es

$$f(x, y) = c.$$

Ejemplo 7 Trace un diagrama de contorno para la función de ingresos $R = 350x + 200y$ de una aerolínea. Incluya contornos para $R = 4{,}000, 8{,}000, 12{,}000, 16{,}000$.

Solución El contorno para $R = 4{,}000$ está dado por

$$350x + 200y = 4{,}000.$$

Ésta es la ecuación de una recta con abscisa en el origen $x = 4{,}000/350 = 11.43$ y ordenada en el origen $y = 4{,}000/200 = 20$ (véase la figura 9.18). El contorno para $R = 8{,}000$ está dado por

$$350x + 200y = 8{,}000.$$

Ésta es la ecuación de una recta paralela con abscisa en el origen $x = 8{,}000/350 = 22.86$ y ordenada en el origen $y = 8{,}000/200 = 40$. Los contornos para $R = 12{,}000$ y $R = 16{,}000$ son rectas paralelas que se trazan de modo similar (véase la figura 9.18).

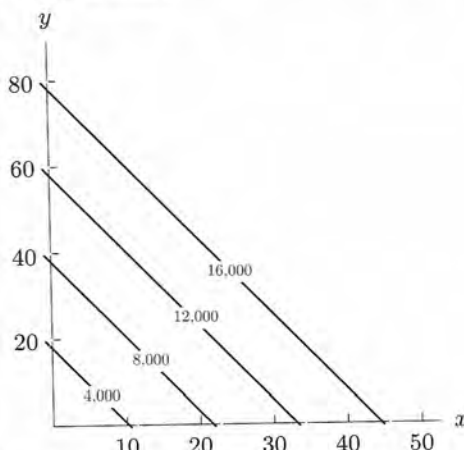


Figura 9.18. Un diagrama de contorno para $R = 350x + 200y$.

Problemas para la sección 9.2

Los ejercicios 1 al 3 se refieren al mapa de la figura 9.5 de la página 327.

1. Proporcione el rango de las más altas temperaturas diarias para
   (a) Pensilvania. (b) Dakota del Norte.
   (c) California.
2. Trace una posible gráfica de la más alta temperatura pronosticada T sobre la recta norte-sur que pasa por Topeka.
3. Trace posibles gráficas de la más alta temperatura pronosticada sobre una recta norte-sur y una recta este-oeste que pasa por Boise.
4. Trace un diagrama de contorno para la función $C = 40d + 0.15m$. Incluya contornos para $C = 50, 100, 150$ y 200.
5. La figura 9.19 muestra un diagrama de contorno para la función $z = f(x, y)$. ¿Es z una función creciente o decreciente de x? ¿Es z una función creciente o decreciente de y?

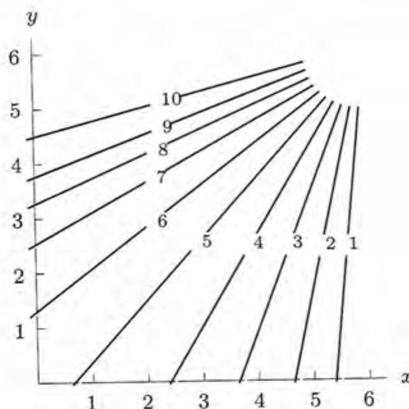


Figura 9.19.

6. En la figura 9.20 se muestra un posible diagrama de contorno para la demanda del jugo de naranja, como función del precio del jugo de naranja y del precio del jugo de manzana. ¿Cuál eje corresponde al precio del jugo de naranja? ¿Cuál eje corresponde al precio del jugo de manzana? Explique.

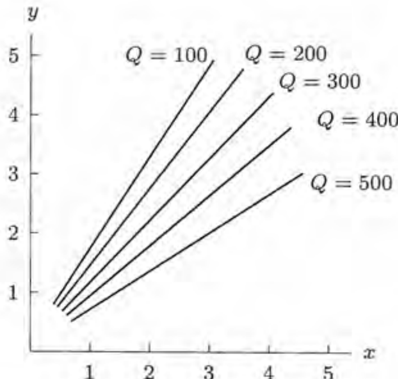


Figura 9.20.

7. En la figura 9.21 se muestra un diagrama de contorno para las ventas de un producto, como función del precio del producto y de la cantidad gastada en publicidad. ¿Cuál eje corresponde a la cantidad gastada en publicidad?. Explique.

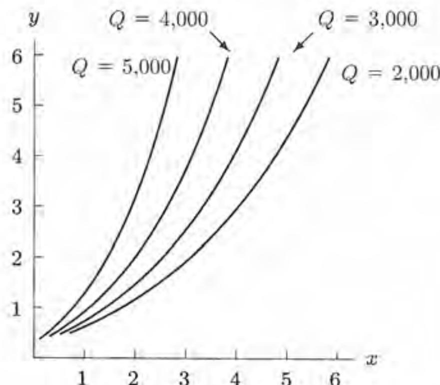


Figura 9.21.

8. En la figura 9.22 aparece un mapa topográfico. ¿Cuántas colinas hay ahí? Estime las coordenadas x y y de las cimas de las colinas. ¿Cuál colina es la más alta? Hay un río que corre por el valle, ¿en qué dirección corre?

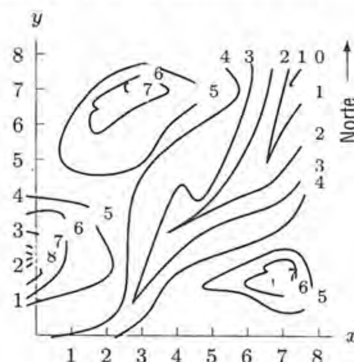


Figura 9.22.

9. La producción de jarabe de maple es mayor cuando las noches son frías y los días son cálidos. Trace un posible diagrama de contorno para la producción de jarabe de maple, como función de la temperatura alta (durante el día) y la temperatura baja (durante la noche). Indique los contornos con 10, 20, 30 y 40 (en litros de jarabe de maple).

10. La tabla 9.4 de la página 325 muestra el factor de viento-frío como función de la velocidad del viento y de la temperatura. Trace un posible diagrama de contorno para esta función. Incluya contornos con factores de viento-frío de 20°, 0° y −20°.

11. La concentración C, de un medicamento en la sangre se puede dar con $C = f(x, t) = te^{-t(5-x)}$, donde x es la cantidad de medicamento inyectado (en mg) y t es el número de horas desde que se aplicó la inyección. El diagrama de contorno de $f(x, t)$ se muestra en la figura 9.23. Explique el diagrama al hacer cambiar una de las variables a la vez: describa f como función de x si t se mantiene fija, y después describa f como función de t si x se mantiene fija.

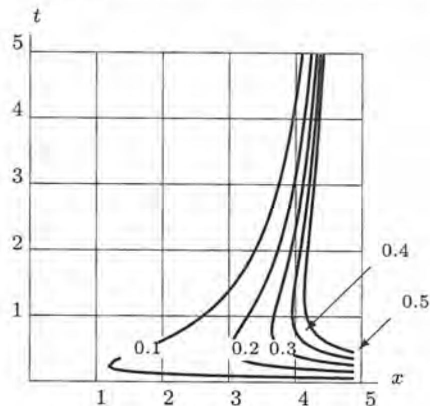


Figura 9.23.

12. Suponga que el diagrama de contorno en la figura 9.24 muestra su felicidad como función del amor y del dinero.
   (a) Describa verbalmente su felicidad como función de:
      (i) Dinero, con amor fijo.
      (ii) Amor, con dinero fijo.
   (b) Trace las gráficas de dos diferentes secciones transversales con amor fijo y dos diferentes secciones transversales con dinero fijo.

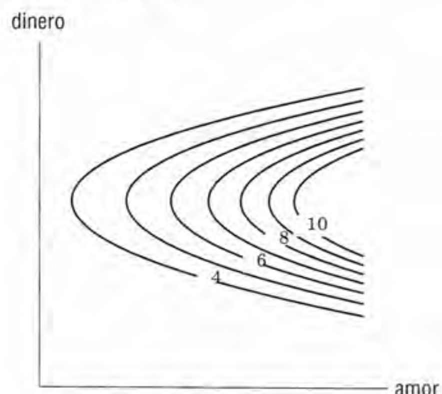


Figura 9.24.

13. La figura 9.25 es un diagrama de contorno del pago mensual de un préstamo a cinco años para un automóvil como función de la tasa de interés y la cantidad que le prestaron. Suponga que la tasa de interés es de 13% y el préstamo es de $6,000.

(a) ¿Cuál es su pago mensual?
(b) Si la tasa de interés baja a 11%, ¿cuánto más puede pedir prestado sin aumentar su pago mensual?
(c) Haga una tabla de cuánto puede pedir prestado, sin aumentar su pago mensual, como función de la tasa de interés.



Figura 9.25.

14. La figura 9.26 muestra la densidad de la población de zorros P (en zorros por kilómetro cuadrado) para el sur de Inglaterra. Trace dos gráficas diferentes de la población de zorros como función de kilómetros al norte, con los kilómetros al este fijos en dos valores diferentes, y trace dos gráficas diferentes de la población de zorros como función de los kilómetros al este, con kilómetros al norte fijos en dos valores diferentes.

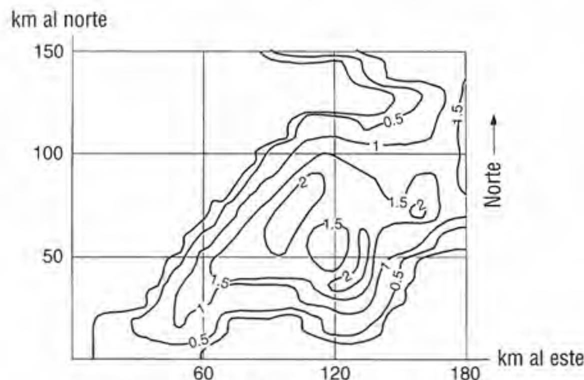


Figura 9.26.

En los problemas 15 al 20, dibuje un diagrama de contorno para la función, que tenga por lo menos cuatro contornos indicados. Describa verbalmente los contornos y cómo están espaciados entre sí.

15. $f(x,y) = x + y$

16. $f(x,y) = x + y + 1$

17. $f(x,y) = 3x + 3y$

18. $f(x,y) = -x - y$

19. $f(x,y) = 2x - y$

20. $f(x,y) = y - x^2$

21. Cada uno de los diagramas de contorno de la figura 9.27, muestra la densidad de población en una cierta región de una ciudad. Elija el diagrama de contorno que mejor corresponda a cada una de las siguientes situaciones. Son posibles muchas comparaciones diferentes. Elija una razonable y justifique su elección.

(a) El contorno medio es una carretera.
(b) El contorno medio es un canal de drenaje abierto.
(c) El contorno medio es una vía de ferrocarril.

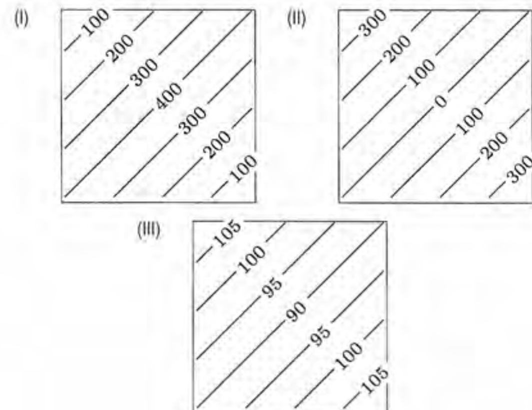


Figura 9.27.

22. Cada uno de los diagramas de la figura 9.28 muestra la densidad de población en cierta región. Elija el diagrama de contorno que mejor corresponda a cada una de las siguientes situaciones. Son posibles muchas comparaciones diferentes. Elija una razonable y justifique su elección.

(a) El centro del diagrama es una ciudad.
(b) El centro del diagrama es un lago.
(c) El centro del diagrama es una planta eléctrica.

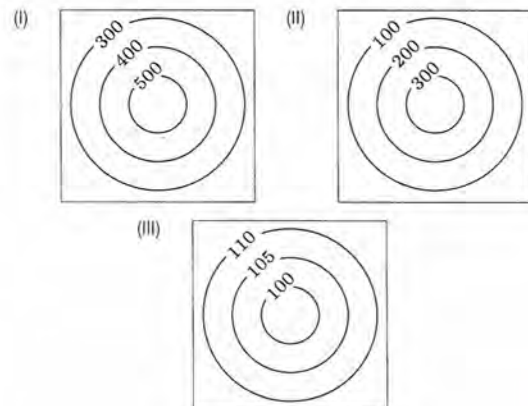


Figura 9.28.

23. La figura 9.29 muestra los contornos de la función que proporciona la densidad de especies de pájaros de cría de cada punto en Estados Unidos, Canadá y Mexico.[4] ¿Los siguientes enunciados son verdaderos o falsos? Explique sus respuestas.

(a) Avanzando de sur a norte en Canadá, la densidad de especies aumenta.

(b) En general, las penínsulas (por ejemplo, Florida, Baja California, Yucatán) tienen menores densidades de especies que las zonas a su alrededor.

(c) La densidad de especies en la región alrededor de Miami es de más de 100.

(d) La razón de cambio máxima en densidad de especies respecto a la distancia está en México. Si usted considera que esto es verdadero, marque el punto y la dirección que dan la máxima razón.

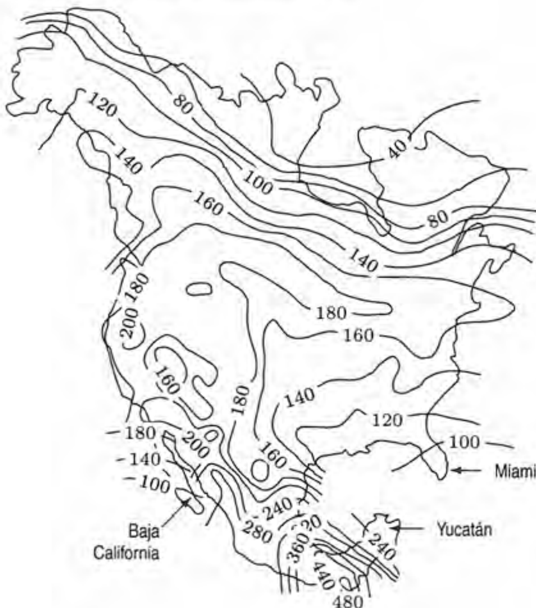


Figura 9.29.

24. La figura 9.30 muestra los contornos de la temperatura H en un cuarto cerca de una ventana recientemente abierta. Marque los tres contornos con valores razonables de H si la casa está en los siguientes lugares.

(a) Minnesota en invierno (donde los inviernos son crudos).

(b) San Francisco en invierno (donde los inviernos son templados).

(c) Houston en verano (donde los veranos son calurosos).

(d) Oregon en verano (donde los veranos son templados).



Figura 9.30.

25. La figura 9.31 muestra un mapa de contorno de una colina con dos senderos, A y B.

(a) ¿En cuál sendero, A o B, tendría que escalar terreno más empinado?

(b) ¿En cuál sendero, A o B, es probable que usted tenga mejor vista del campo circundante? (Suponga que los árboles no obstruyen la visibilidad.)

(c) ¿A lo largo de cuál sendero es más probable que haya un arroyo?

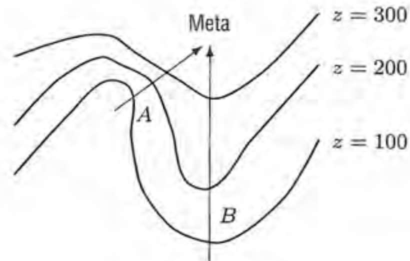


Figura 9.31.

26. Compare las siguientes descripciones del éxito de una compañía con los diagramas de contorno de éxito como función del dinero y del trabajo en la figura 9.32.

(a) Nuestro éxito se mide en dólares, simple y llanamente. Más trabajo duro no afecta, pero tampoco ayuda.

(b) No importa cuánto dinero o trabajo duro se invierta en la compañía, no se puede hacer que ésta funcione.

(c) Aun cuando no siempre nuestro éxito es total, parece que la cantidad de dinero invertido no importa. Mientras trabajemos duro en la compañía, nuestro éxito aumenta.

(d) El éxito de la compañía está basado en trabajo duro e inversión.

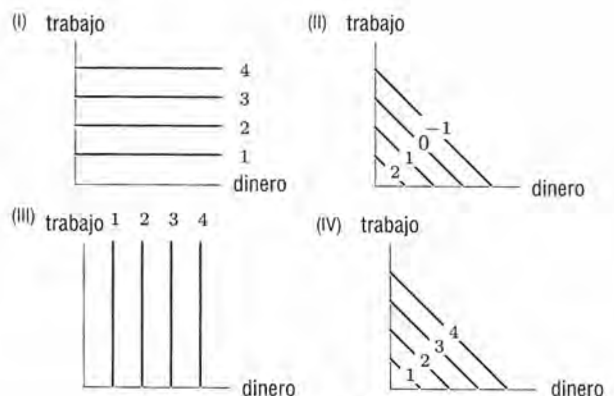


Figura 9.32.

[4]Tomado del trabajo de tesis de un alumno del profesor Robert Cook, director del Harvard's Arnold Arboretum.

27. A usted le gustan la pizza y el refresco de cola. Los diagramas de contorno de la figura 9.33 muestran su felicidad como función del número de pizzas y de refrescos de cola que consume. ¿Cuál de los diagramas representa su felicidad si:

(a) no hay nada mejor que muchas pizzas y muchos refrescos de cola?

(b) hay cosas mejores que demasiadas pizzas o demasiados refrescos de cola?

(c) hay cosas mejores que demasiados refrescos de cola pero nada tan bueno como muchas pizzas?

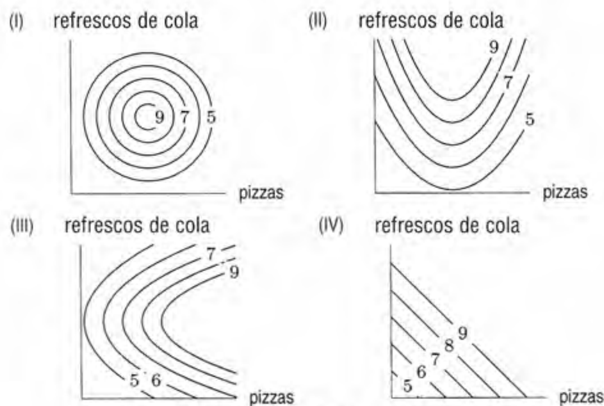


Figura 9.33.

28. Compare las tablas (a) a (d) con los diagramas de contorno (I) a (IV) de la figura 9.34.

(a)

y \ x	-1	0	1
-1	2	1	2
0	1	0	1
1	2	1	2

(b)

y \ x	-1	0	1
-1	0	1	0
0	1	2	1
1	0	1	0

(c)

y \ x	-1	0	0
-1	2	0	2
0	2	0	2
1	2	0	2

(d)

y \ x	-1	0	1
-1	2	2	2
0	0	0	0
1	2	2	2

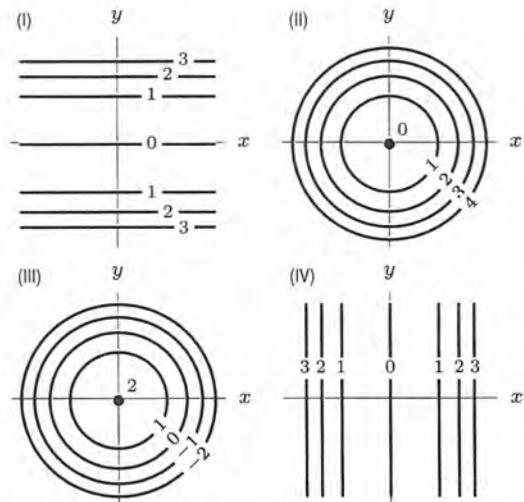


Figura 9.34.

29. Suponga que se encuentra en una habitación de 30 pies de largo con un calentador en un extremo. En la mañana la habitación está a 65 °F. Enciende el calentador, que rápidamente calienta hasta 85 °F. Sea $H(x, t)$ la temperatura a x pies del calentador, t minutos después de encenderlo. En la figura 9.35 se muestra el diagrama de contorno para H. ¿Cuál es la temperatura a 10 pies del calentador, cinco minutos después de encenderlo? ¿Y 10 minutos después de encenderlo?

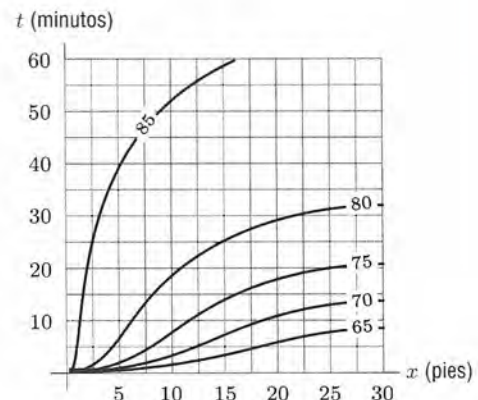


Figura 9.35.

30. Usando el diagrama de contorno de la figura 9.35, trace las gráficas de las funciones de una variable $H(x, 5)$ y $H(x, 20)$. Interprete las dos gráficas en términos prácticos y explique la diferencia entre ellas.

31. La figura 9.36 muestra el rendimiento cardiaco (en litros por minuto) en pacientes que sufren una conmoción (*shock*) como función de la presión sanguínea en las venas centrales (en mm de Hg) y el tiempo en horas desde que inició la conmoción.[5]

[5]Guyton, Arthur C. y John E. Hall, *Textbook of Medical Physiology*, 9a. edición, W. B. Saunders, Filadelfia, 1996, p. 299.

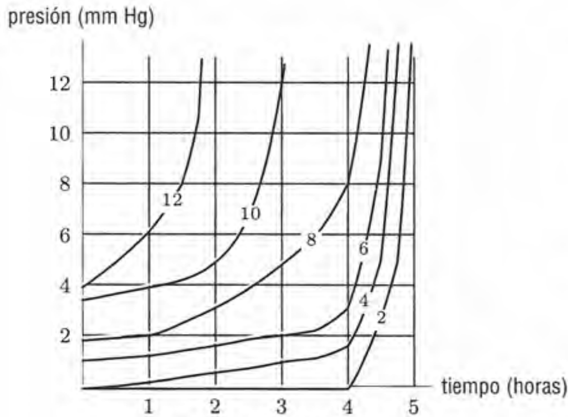


Figura 9.36.

(a) En un paciente con presión sanguínea de 4 mm de Hg, ¿cuál es el rendimiento cardiaco cuando el paciente entra primero en conmoción? Estime cuál es el rendimiento cardiaco tres horas después. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando el rendimiento cardiaco se reduce a 50% del valor inicial?

(b) En pacientes conmocionados, ¿es el rendimiento cardiaco una función creciente o decreciente de la presión sanguínea?

(c) ¿Es el rendimiento cardiaco una función creciente o decreciente del tiempo, t, donde t representa el tiempo transcurrido desde que el paciente se conmocionó?

(d) Si la presión sanguínea es de 3 mm de Hg, explique cómo cambia el rendimiento cardiaco como función del tiempo. En particular, ¿cambia rápida o lentamente durante las primeras dos horas de la conmoción? ¿Durante las horas 2 a 4? ¿Durante la última hora del estudio? Explique por qué esta información podría ser útil a un medico que trata a un paciente conmocionado.

32. En los problemas 18 al 21 en la sección 9.1, vimos la siguiente función de demanda de café, Q, en miles de libras por semana, como función del precio del café, c y del precio del té, t:

$$Q = f(c, t) = 100\frac{t}{c}.$$

(a) Trace un diagrama de contorno para $Q = 25$, $Q = 50$, $Q = 100$, $Q = 200$.

(b) Determine, del diagrama de contorno, si Q es una función creciente o decreciente de c. ¿Es Q una función creciente o decreciente de t?

(c) La demanda se denomina *elástica* si pequeños aumentos en el precio del producto ocasionan cambios relativamente grandes a la demanda del producto. Si el precio del té se fija en $t = 1$, ¿es la demanda de café más *elástica* a precios bajos o a precios altos? Explique sus respuestas usando el diagrama de contorno.

9.3 DERIVADAS PARCIALES

En el cálculo para funciones de una variable vimos cómo la derivada mide la razón de cambio de una función. Comenzamos por repasar esta idea.

Razón de cambio de los ingresos de una aerolínea

En la sección 9.1 vimos una función de dos variables que da el ingreso de una aerolínea, R, como función del número de boletos vendidos a precio normal, x, y del número de boletos con descuento, y:

$$R = f(x, y) = 350x + 200y.$$

Si fijamos el número de boletos con descuento en $y = 10$, tenemos una función de una variable

$$R = f(x, 10) = g(x)= 350x + 2{,}000.$$

La razón de cambio del ingreso respecto a x se da con la derivada de una variable

$$g'(x) = 350.$$

Esto nos indica que, si y se fija en 10, entonces el ingreso aumenta en \$350 por cada boleto adicional vendido a precio normal. A $g'(x)$ le damos el nombre de *derivada parcial de R respecto a x* en el punto $(x, 10)$. Si $R = f(x, y)$, escribimos

$$\frac{\partial R}{\partial x} = f_x(x, 10) = g'(x) = 350.$$

Ejemplo 1 Encuentre la razón de cambio del ingreso, R, a medida que y aumenta con x fija en $x = 20$.

Solución Sustituyendo $x = 20$ en $R = 350x + 200y$ resulta la función de una variable

$$R = h(y) = 350(20) + 200y = 7{,}000 + 200y$$

La razón de cambio de R a medida que y aumenta con x fija es

$$\frac{\partial R}{\partial y} = f_y(20, y) = h'(y) = 200.$$

Denominamos a $\partial R/\partial y = f_y(20, y)$ *derivada parcial de R respecto a y* en el punto (20, y). El hecho de que ambas derivadas parciales de R sean positivas corresponde al hecho de que el ingreso es creciente a medida que se venda cualquier tipo de boleto.

Definición de la derivada parcial

Para cualquier función $f(x, y)$ estudiamos la influencia de x y y en forma separada sobre el valor $f(x, y)$ conservando una fija y dejando que la otra varíe. El método del ejemplo anterior nos permite calcular la razón de cambio de $f(x, y)$ respecto a x y y. Para todos los puntos (a, b) en los que existen los límites siguientes, damos estas definiciones:

Derivadas parciales de f respecto a x y y

La *derivada parcial de f respecto a x* en (a, b) es la derivada de f con y constante:

$$f_x(a,b) = \begin{array}{c}\text{Razón de cambio de } f \text{ con } y \text{ fija} \\ \text{en } b, \text{ en el punto } (a, b)\end{array} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}.$$

La *derivada parcial de f respecto a y* en (a, b) es la derivada de f con x constante:

$$f_y(a,b) = \begin{array}{c}\text{Razón de cambio de } f \text{ con } x \text{ fija} \\ \text{en } a, \text{ en el punto } (a, b)\end{array} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}.$$

Si consideramos a a y b como variables, $a = x$ y $b = y$, tenemos las **funciones derivadas parciales** $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

Al igual que en derivadas ordinarias, hay una notación alternativa:

Notación alternativa para las derivadas parciales

Si $z = f(x, y)$ podemos escribir

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$f_x(a,b) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} \qquad \text{y} \qquad f_y(a,b) = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)}$$

Utilizamos el símbolo ∂ para distinguir derivadas parciales de derivadas ordinarias. En el caso donde las variables independientes tengan nombres diferentes de x y y, ajustamos la notación según sea necesario. Por ejemplo, las derivadas parciales de $f(u, v)$ se denotan por f_u y f_v.

Estimación de derivadas parciales a partir de una tabla

Ejemplo 2 Un experimento[6] realizado en ratas para medir la toxicidad del formaldehído dio la información que se muestra en la tabla 9.7. Los valores de la tabla presentan el porcentaje, P, de ratas que sobrevivieron a una exposición con concentración c (en partes por millón) después de t meses, de modo que $P = f(t, c)$. Usando la tabla 9.7, estime $f_t(18, 6)$ y $f_c(18, 6)$. Interprete sus respuestas en términos de la toxicidad del formaldehído.

Tabla 9.7 *Porcentaje, P, de población de ratas supervivientes después de una exposición a vapor de formaldehído*

Concentración c (ppm) \ Tiempo t (meses)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	99	97	95
2	100	100	100	100	100	100	100	100	99	98	97	95	92
6	100	100	100	99	99	98	96	96	95	93	90	86	80
15	100	100	100	99	99	99	99	96	93	82	70	58	36

Solución Para $f_t(18, 6)$, fijamos c en 6 ppm y encontramos la razón de cambio del porcentaje superviviente, P, respecto a t. Tenemos

$$f_t(18,6) \approx \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{f(20,6) - f(18,6)}{20 - 18} = \frac{90 - 93}{20 - 18} \approx -1.5\ \% \text{ por mes.}$$

Ésta es la razón de cambio del porcentaje superviviente, P, *en la dirección del tiempo* t en el punto (18,6). El hecho de que sea negativa significa que P es decreciente a medida que leemos a lo largo del renglón de $c = 6$ de la tabla en el sentido de t creciente (es decir, horizontalmente de izquierda a derecha en la tabla 9.7). Para $f_c(18, 6)$, fijamos t en 18 y calculamos la razón de cambio de P conforme nos movemos en el sentido de c creciente (es decir, de arriba a abajo en la tabla 9.7). Tenemos

$$f_c(18,6) \approx \frac{\Delta P}{\Delta c} = \frac{f(18,15) - f(18,6)}{15 - 6} = \frac{82 - 93}{15 - 6} = -1.22\% \text{ por ppm.}$$

La razón de cambio de P a medida que c aumenta es aproximadamente -1.22% por ppm. Esto significa que a medida que la concentración aumenta de 1 ppm a 6 ppm, el porcentaje que sobrevive 18 meses decrece en alrededor de 1.22% por unidad de aumento de ppm. La derivada parcial es negativa porque menos ratas sobreviven este lapso cuando aumenta la concentración de formaldehído. (Es decir, P baja a medida que c sube.)

Uso de derivadas parciales para estimar valores de la función

Ejemplo 3 Utilice la tabla 9.7 y las derivadas parciales para estimar el porcentaje de ratas supervivientes si se exponen a formaldehído con una concentración de

(a) 6 ppm durante 18.5 meses, **(b)** 18 ppm durante 24 meses, **(c)** 9 ppm durante 20.5 meses.

Solución **(a)** Como $t = 18.5$ y $c = 6$, queremos evaluar $P = f(18.5, 6)$. La tabla 9.7 nos indica que $f(18, 6) = 93\%$ y acabamos de calcular

$$\left.\frac{\partial P}{\partial t}\right|_{(18,6)} = f_t(18,6) = -1.5\% \text{ por mes.}$$

Esta derivada parcial nos indica que después de 18 meses de exposición al formaldehído a una concentración de 6 ppm, P decrece en 1.5% por cada mes adicional de exposición. Por tanto, después de 0.5 mes adicional, tenemos

$$P \approx 93 - 1.5(0.5) = 92.25\%.$$

[6]Gibson, James E., *Formaldehyde Toxicity*, Hemisphere Publishing Company, McGraw-Hill, 1983, p. 125.

(b) Ahora deseamos evaluar $f(24, 18)$. La entrada más cercana a esto en la tabla 9.7 es $f(24, 15) = 36$. Conservamos t fija en 24 y aumentamos c de 15 a 18. Estimamos la razón de cambio en P a medida que c cambia; ésta es $\partial P/\partial c$. Vemos, de la tabla 9.7, que

$$\left.\frac{\partial P}{\partial c}\right|_{(24,15)} \approx \frac{\Delta P}{\Delta c} = \frac{36-80}{15-6} = -4.89\% \text{ por ppm.}$$

El porcentaje que sobrevive 24 meses baja de 36% en alrededor de 4.89% por cada unidad de aumento de la concentración de formaldehído arriba de 15 ppm. Tenemos:

$$f(24,18) \approx 36 - 4.89(3) = 21.33\%.$$

Estimamos que sólo aproximadamente 21% de las ratas sobrevivirían durante 24 meses si estuvieran expuestas al formaldehído de 18 ppm de concentración. Como esta cifra es una extrapolación de los datos disponibles, debemos usarla con precaución.

(c) Para estimar $f(20.5, 9)$, usamos la entrada más cercana $f(20, 6) = 90$. A medida que nos movemos de (20, 6) a (20.5, 9), el porcentaje, P, cambia debido al cambio en t y al cambio en c. Estimamos las dos derivadas parciales en $t = 20$, $c = 6$:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial t}\right|_{(20,6)} \approx \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{86-90}{22-20} = -2\% \text{ por mes}$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial c}\right|_{(20,6)} \approx \frac{\Delta P}{\Delta c} = \frac{70-90}{15-6} = -2.22\% \text{ por mes}$$

El cambio en P debido a un cambio de $\Delta t = 0.5$ meses y $\Delta c = 3$ ppm es

$$\begin{aligned}\Delta P &\approx \text{Cambio debido a } \Delta t + \text{cambio debido a } \Delta c\\ &= -2(0.5) - 2.22(3)\\ &= -7.66\end{aligned}$$

Por tanto, para $t = 20.5$, $c = 9$ tenemos

$$f(20.5, 9) \approx f(20, 6) - 7.66 = 82.34\%.$$

En el ejemplo 3, inciso (c), estimamos cambios en la función usando la relación entre ΔP, Δt y Δc. La forma general de esta relación se denomina *linealidad local*:

$$\begin{matrix}\text{Cambio}\\ \text{en } f\end{matrix} \approx \begin{matrix}\text{Razón de cambio}\\ \text{en la dirección } x\end{matrix} \cdot \Delta x + \begin{matrix}\text{Razón de cambio}\\ \text{en la dirección } y\end{matrix} \cdot \Delta y$$

$$\Delta f \approx f_x \cdot \Delta x + f_y \cdot \Delta y$$

Estimación de derivadas parciales a partir de un diagrama de contorno

Si nos desplazamos en forma paralela a uno de los ejes en un diagrama de contorno, la derivada parcial es la razón de cambio del valor de la función en los contornos. Por ejemplo, si los valores en los contornos son crecientes en la dirección de cambio positivo, entonces la derivada parcial debe ser positiva.

Ejemplo 4 La figura 9.37 muestra el diagrama de contorno para la temperatura $H(x, t)$ (en °F) en una habitación como función de la distancia x (en pies) desde un calentador y el tiempo t (en minutos) después que el calentador se haya encendido. ¿Cuáles son los signos de $H_x(10, 20)$ y $H_t(10, 20)$? Estime estas derivadas parciales y explique las respuestas en términos prácticos.

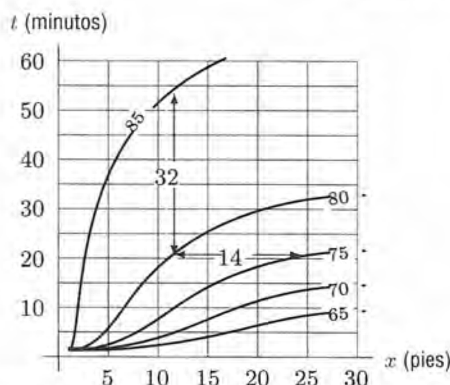


Figura 9.37. Temperatura en un cuarto calentado.

Solución El punto (10, 20) está sobre el contorno $H = 80$. A medida que x aumenta, nos movemos hacia el contorno $H = 75$, de modo que H es decreciente y $H_x(10, 20)$ es negativa. Esto tiene sentido, porque a medida que nos alejamos del calentador, la temperatura disminuye. Por otra parte, conforme t aumenta, nos movemos hacia el contorno $H = 85$, de modo que H es creciente y $H_t(10, 20)$ es positiva. Esto también tiene sentido, porque nos dice que a medida que el tiempo transcurre, el cuarto se calienta.

Para estimar las derivadas parciales, usamos un cociente de diferencias. Al observar el diagrama de contorno, vemos que hay un punto sobre el contorno $H = 75$ aproximadamente 14 unidades a la derecha de (10, 20). Por tanto, H decrece en 5 cuando x aumenta en 14, de modo que la razón de cambio de H con respecto a x es alrededor de $\Delta H/\Delta x = -5/14 \approx -0.36$. Entonces, encontramos

$$H_x(10, 20) \approx -0.36 \text{ °F/pies}.$$

Esto significa que cerca del punto a 10 pies del calentador, después de 20 minutos la temperatura desciende alrededor de 1/3 de grado por cada pie que nos alejemos del calentador.

Para estimar $H_t(10, 20)$, vemos nuevamente el diagrama de contorno y observamos que el contorno $H = 85$ está a unas 32 unidades directamente arriba del punto (10, 20). Por tanto, H aumenta en 5 cuando t aumenta en 32. En consecuencia,

$$H_t(10, 20) \approx \frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{5}{32} \approx 0.16 \text{ °F/min}$$

Esto significa que después de 20 minutos, la temperatura sube alrededor de 1/6 de grado cada minuto en el punto situado a 10 pies del calentador.

Uso de unidades para interpretar derivadas parciales

Las unidades de las variables independiente y dependiente pueden ser útiles al explicar el significado de una derivada parcial.

Ejemplo 5 Suponga que su peso w en libras es una función $f(c, n)$ del número de calorías c que consume diariamente y del número n de minutos que hace ejercicio diariamente. Usando las unidades para w, c y n, interprete en palabras comunes los enunciados

$$\left.\frac{\partial w}{\partial c}\right|_{(2{,}000,15)} = 0.02 \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{(2{,}000,15)} = -0.025.$$

Solución Las unidades de $\partial w/\partial c$ son libras por caloría. El enunciado

$$\left.\frac{\partial w}{\partial c}\right|_{(2{,}000,15)} = 0.02$$

significa que si usted está consumiendo 2,000 calorías diariamente y hace 15 minutos de ejercicio al día, pesará 0.02 libras más por cada caloría extra que consuma diariamente, o sea unas 2 libras por

cada 100 calorías extras por día. Las unidades de $\partial w/\partial n$ son libras por minuto. El enunciado

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{(2{,}000,15)} = -0.025$$

significa que para el mismo consumo de calorías y de minutos de ejercicio, usted pesará 0.025 libras menos por cada minuto extra de ejercicio, o aproximadamente 1 libra menos por cada 40 minutos extra por día. En consecuencia, si consume 100 calorías extra por día y hace ejercicios 80 minutos más al día, su peso permanecerá casi constante.

Problemas para la sección 9.3

1. La demanda de café, Q, en libras vendidas por semana, es una función del precio del café, c, en dólares por libra y del precio del té, t, en dólares por libra, de modo que $Q = f(c, t)$.

(a) ¿Usted espera que f_c sea positiva o negativa? ¿Y f_t? Explique.

(b) Interprete cada uno de los siguientes enunciados en términos de la demanda de café:

$$f(3,2) = 780 \quad f_c(3,2) = -60 \quad f_t(3,2) = 20.$$

2. Se inyecta un medicamento en la vena de un paciente. La función $c = f(x, t)$ representa la concentración del medicamento a una distancia x mm en la dirección y sentido de la circulación de la sangre medida desde el punto de la inyección y en el tiempo t segundos desde que se aplicó la inyección. ¿Cuáles son las unidades de las siguientes derivadas parciales? ¿Cuáles son sus interpretaciones prácticas? ¿Cuáles espera que sean sus signos?

(a) $\partial c/\partial x$ **(b)** $\partial c/\partial t$

3. El pago mensual de la hipoteca en dólares, P, de una casa es una función de tres variables

$$P = f(A, r, N),$$

donde A es la cantidad prestada en dólares, r es la tasa de interés y N es el número de años antes de que se termine de pagar la hipoteca.

(a) $f(92{,}000, 14, 30) = 1{,}090.08$. ¿Qué significa esto en términos financieros?

(b) $\left.\dfrac{\partial P}{\partial r}\right|_{(92{,}000,14,30)} = 72.82$. ¿Cuál es la importancia financiera del número 72.82?

(c) ¿Esperaría que $\partial P/\partial A$ sea positivo o negativo? ¿Por qué?

(d) ¿Esperaría que $\partial P/\partial N$ sea positivo o negativo? ¿Por qué?

4. La figura 9.38 es un diagrama de contorno para $z = f(x, y)$. ¿Es f_x positiva o negativa? ¿Es f_y positiva o negativa? Estime $f(2, 1)$, $f_x(2, 1)$ y $f_y(2,1)$.

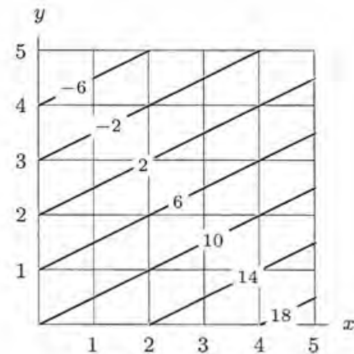


Figura 9.38.

5. Las ventas de un producto se describen mediante $S = f(p, a)$, que es una función del precio, p, del producto (en dólares por unidad) y de la cantidad, a, gastada en publicidad (en miles de dólares).

(a) ¿Esperaría que f_p sea positiva o negativa? ¿Por qué?

(b) Explique el significado del enunciado $f_a(8, 12) = 150$ en términos de las ventas.

6. La tabla 9.8 proporciona el número de calorías quemadas por minuto $B = f(s, w)$, usando unos patines[7] como función del peso de una persona, w, y de la velocidad, s.

(a) ¿f_w es positiva o negativa? ¿f_s es positiva o negativa? ¿Qué nos indican las respuestas acerca del efecto del peso y de la rapidez de calorías quemadas por minuto?

(b) Estime $f_w(160, 10)$ y $f_s(160, 10)$. Interprete sus respuestas.

Tabla 9.8 *Calorías quemadas por minuto*

$w\backslash s$	8 mph	9 mph	10 mph	11 mph
120 libras	4.2	5.8	7.4	8.9
140 libras	5.1	6.7	8.3	9.9
160 libras	6.1	7.7	9.2	10.8
180 libras	7.0	8.6	10.2	11.7
200 libras	7.9	9.5	11.1	12.6

[7]Tomada de *Parade Magazine*, de 28 de agosto de 1994.

7. A usted le prestan $\$A$ a una tasa de interés de $r\%$ (al mes) y deberá pagarlo en t meses, con pagos mensuales de $P = g(A, r, t)$ dólares. En términos financieros, ¿qué le indican los siguientes enunciados?

(a) $g(8{,}000, 1, 24) = 376.59$

(b) $\left.\dfrac{\partial g}{\partial A}\right|_{(8{,}000,1,24)} = 0.047$

(c) $\left.\dfrac{\partial g}{\partial r}\right|_{(8{,}000,1,24)} = 44.83$

8. El pago mensual, en dólares, por su automóvil es $P = f(P_0, t, r)$ donde $\$P_0$ es la cantidad que le prestaron, t es el número de meses en los que deberá pagar el préstamo y $r\%$ es la tasa de interés. ¿Cuáles son las unidades, la importancia financiera y los signos de $\partial P/\partial t$ y $\partial P/\partial r$?

9. La siguiente tabla muestra los valores de una función $f(x, y)$.

(a) ¿Es f_x positiva o negativa? ¿Es f_y positiva o negativa? Dé razones.

(b) Estime $f_x(10, 6)$ y $f_y(10, 6)$.

(c) Use derivadas parciales para evaluar $f(30, 9)$ y $f(34, 8)$ Explique su razonamiento.

	$x = 0$	$x = 10$	$x = 20$	$x = 30$
$y = 0$	89	80	74	71
$y = 2$	93	85	80	76
$y = 4$	98	91	85	81
$y = 6$	104	98	92	88
$y = 8$	112	105	99	94

10. Usando el diagrama de contorno para $f(x, y)$ en la figura 9.39, decida si cada una de estas derivadas parciales es positiva, negativa o aproximadamente cero.

(a) $f_x(4, 1)$ (b) $f_y(4, 1)$

(c) $f_x(5, 2)$ (d) $f_y(5, 2)$

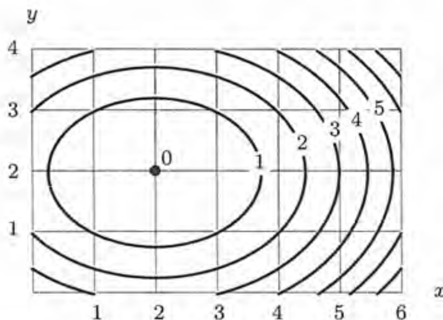


Figura 9.39.

11. De acuerdo con el diagrama de contorno para $f(x, y)$ de la figura 9.39, ¿cuál es más grande: $f_x(3, 1)$ o $f_x(5, 2)$? Explique.

12. La figura 9.40 muestra un diagrama de contorno para el pago mensual P como función de la tasa de interés, $r\%$, y la cantidad, L, de un préstamo a cinco años. Estime $\partial P/\partial r$ y $\partial P/\partial L$ en el punto donde $r = 8$ y $L = 5{,}000$. Dé las unidades y el significado financiero de su respuesta.

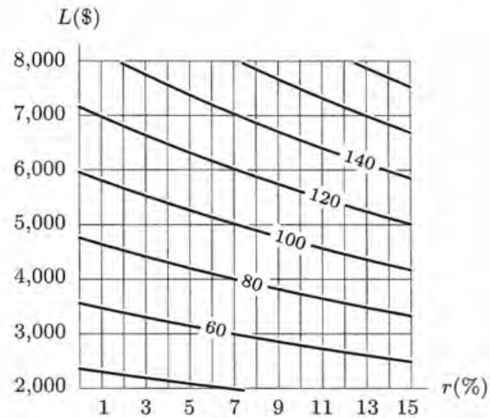


Figura 9.40.

13. La tabla 9.2 de la página 324 da la cantidad de carne de res comprada, C, como función del ingreso familiar, I, y del precio de la carne, p. Por tanto, tenemos $C = f(I, p)$.

(a) Encuentre $f_p(80, 4.0)$ e interprételа en términos del consumo de carne.

(b) Encuentre $f_I(80, 4.0)$ e interprételа en términos del consumo de carne.

(c) Use las derivadas parciales para evaluar la cantidad de carne que compra una familia con ingreso familiar de \$110,000 si el precio de la carne es de \$4.00 por libra.

14. En cada caso, haga un posible diagrama de contorno para la función $f(x, y)$ si

(a) $f_x > 0$ y $f_y > 0$ (b) $f_x > 0$ y $f_y < 0$

(c) $f_x < 0$ y $f_y > 0$ (d) $f_x < 0$ y $f_y < 0$

15. La figura 9.41 muestra contornos de $f(x, y)$ con los valores de f sobre los contornos omitidos. Si $f_x(P) > 0$, determine el signo de

(a) $f_y(P)$ (b) $f_y(Q)$ (c) $f_x(Q)$

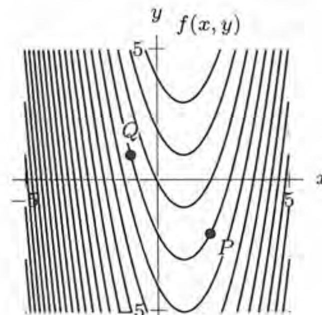


Figura 9.41.

16. La figura 9.13 de la página 329 da un diagrama de contorno de producción de maíz como función de la cantidad de lluvia, R, en pulgadas y la temperatura, T, en °F. La producción de maíz, C, se mide como porcentaje de la producción actual y $C = f(R, T)$. Estime las siguientes cantidades. Dé unidades con sus respuestas e interprételas en términos de la producción de maíz.

   (a) $f_R(15, 76)$ (b) $f_T(15, 76)$

17. Suponga que para una función $f(x, y)$, sabemos que $f(100, 20) = 2{,}750$ y $f_x(100, 20) = 4$ y $f_y(100, 20) = 7$. Estime $f(105, 21)$.

18. Suponga que para una función $f(r, s)$, sabemos que $f(50, 100) = 5.67$, $f_r(50, 100) = 0.60$ y $f_s(50, 100) = -0.15$. Estime $f(52, 108)$.

Para los problemas 19 al 21, consulte la tabla 9.4 en la página 325, y dé la temperatura ajustada para viento-frío, C, en °F, como función $f(w, T)$ de la velocidad del viento, w, en mph y la temperatura, T, en °F. La temperatura ajustada para viento-frío nos indica cuánto frío se siente como resultado de la combinación de viento y temperatura.

19. Estime $f_w(10, 25)$. ¿Qué significa su respuesta en términos prácticos?

20. Estime $f_T(5, 20)$. ¿Qué significa su respuesta en términos prácticos?

21. En la tabla 9.4 se puede ver que cuando la temperatura es de 20 °F, la temperatura ajustada para viento-frío baja en un promedio de 2.6 °F por cada mph de aumento en la velocidad del viento, a partir de 5 mph y hasta 10 mph. ¿De qué derivada parcial nos habla esto?

Para los problemas 22 y 23 consulte la tabla 9.6 de la página 331 que nos proporciona el índice de calor, I, en °F, como función $f(H, T)$ de la humedad relativa, H, y la temperatura, T, en °F. El índice de calor es una temperatura que indica cuánto calor se siente como resultado de la combinación de humedad y temperatura.

22. Estime $\partial I/\partial H$ y $\partial I/\partial T$ para condiciones climatológicas normales en Tucson en el verano ($H = 10, T = 100$). ¿Qué significan sus respuestas en términos prácticos para los residentes de Tucson?

23. Responda la pregunta del problema 22 para Boston en verano ($H = 50, T = 80$).

24. El ingreso de una aerolínea, I, es una función del número de boletos vendidos a precio normal (sin descuento), x, y del numero de boletos con descuento, y. Base sus respuestas en los valores de esta función $R = f(x, y)$ dados en la tabla 9.9.

   (a) Estime $f(200, 400)$ e interprete su respuesta.
   (b) ¿Es $f_x(200, 400)$ positiva o negativa? ¿Es $f_y(200, 400)$ positiva o negativa? Explique.
   (c) Estime cada una de las derivadas parciales del inciso (b). Dé las unidades con sus respuestas e interprételas en términos del ingreso de la aerolínea.

Tabla 9.9 *Ingresos por venta de boletos (en dólares)*

Número de boletos con descuento, y \ Número de boletos a precio normal, x	100	200	300	400
200	75,000	110,000	145,000	180,000
400	115,000	150,000	185,000	220,000
600	155,000	190,000	225,000	260,000
800	195,000	230,000	265,000	300,000
1,000	235,000	270,000	305,000	340,000

25. En el problema 24 el ingreso es de \$150,000 cuando se venden 200 boletos a precio normal y 400 con descuento, esto es, $f(200, 400) = 150{,}000$. Utilice este hecho y las derivadas parciales $f_x(200, 400) = 350$ y $f_y(200, 400)$ para estimar el ingreso cuando

   (a) $x = 201$ y $y = 400$ (b) $x = 200$ y $y = 405$
   (c) $x = 203$ y $y = 406$

26. La tabla 9.7 de la página 339 da el porcentaje de ratas supervivientes, P, como función del tiempo, t, en meses y de la concentración de formaldehído, c, en ppm, con lo que $P = f(t, c)$. Utilice derivadas parciales para estimar el porcentaje de ratas supervivientes después de 26 meses cuando la concentración es de 15. Explique su razonamiento.

27. Suponga que x es el precio promedio de un nuevo automóvil y que y es el precio promedio de un galón de gasolina. Entonces q_1, el número de automóviles nuevos comprados en un año, depende de x y de y, con lo que $q_1 = f(x, y)$. Del mismo modo, si q_2 es la cantidad de gasolina comprada en un año, entonces $q_2 = g(x, y)$.

   (a) ¿Cuáles espera que sean los signos de $\partial q_1/\partial x$ y $\partial q_2/\partial y$? Explique.
   (b) ¿Cuáles espera que sean los signos de $\partial q_1/\partial y$ y $\partial q_2/\partial x$? Explique.

28. La figura 9.42 da un diagrama de contorno para el número n de zorros por kilómetro cuadrado en el suroeste de Inglaterra. Estime $\partial n/\partial x$ y $\partial n/\partial y$ en los puntos A, B y C, donde x es kilómetros al este y y es kilómetros al norte.

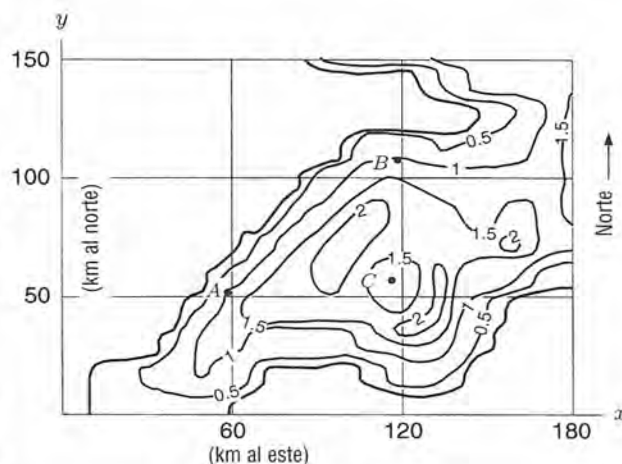


Figura 9.42.

29. Estime $z_x(1, 0)$, $z_x(0, 1)$ y $z_y(0, 1)$ del diagrama de contorno para $z(x, y)$ en la figura 9.43.

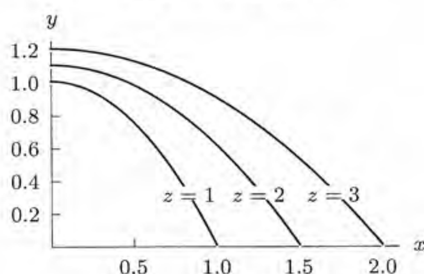


Figura 9.43.

30. Utilice el diagrama del problema 22, página 326, para estimar $H_T(T, w)$ para $T = 10, 20, 30$ y $w = 0.1, 0.2, 0.3$. ¿Cuál es el significado práctico de estas derivadas parciales?

31. Repita el problema 30 para $H_w(T, w)$ en $T = 10, 20$ y 30 y $w = 0.1, 0.2$ y 0.3. ¿Cuál es el significado práctico de estas derivadas parciales?

9.4 CÁLCULO ALGEBRAICO DE DERIVADAS PARCIALES

La derivada parcial $f_x(x, y)$ es la derivada ordinaria de la función $f(x, y)$ respecto a x con y fija, y la derivada parcial $f_y(x, y)$ es la derivada ordinaria de $f(x, y)$ respecto a y con x fija. Entonces, podemos usar todas las técnicas de derivación del cálculo de una variable para hallar derivadas parciales.

Ejemplo 1 Sea $f(x, y) = x^2 + 5y^2$. Encuentre algebraicamente $f_x(3, 2)$ y $f_y(3, 2)$.

Solución Utilizamos el hecho de que $f_x(3, 2)$ es la derivada de $f(x, 2)$ en $x = 3$. Para encontrar f_x fijamos y en 2:

$$f(x, 2) = x^2 + 5(2^2) = x^2 + 20.$$

Derivando respecto a x se obtiene

$$f_x(x, 2) = 2x \qquad \text{entonces} \qquad f_x(3, 2) = 2(3) = 6.$$

Del mismo modo, $f_y(3, 2)$ es la derivada de $f(3, y)$ en $y = 2$. Para encontrar f_y, fijamos x en 3:

$$f(3, y) = 3^2 + 5y^2 = 9 + 5y^2.$$

Derivando respecto a y tenemos

$$f_y(3, y) = 10y \qquad \text{entonces} \qquad f_y(3, 2) = 10(2) = 20.$$

Ejemplo 2 Sea $f(x, y) = x^2 + 5y^2$ como en el ejemplo 1. Encuentre f_x y f_y como funciones de x y y.

Solución Para hallar f_x, tratamos y como constante. Por consiguiente, $5y^2$ es una constante y la derivada respecto a x de este término es 0. Tenemos

$$f_x(x, y) = 2x + 0 = 2x.$$

Para encontrar f_y, tratamos x como constante y por lo tanto la derivada de x^2 con respecto a y es cero. Tenemos

$$f_y(x, y) = 0 + 10y = 10y.$$

Ejemplo 3 Encuentre ambas derivadas parciales de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = 3x + e^{-5y}$ **(b)** $f(x, y) = x^2y$ **(c)** $f(u, v) = u^2e^{2v}$

Solución **(a)** Para hallar f_x, tratamos y como constante, de modo que el término e^{-5y} es una constante, y la derivada de este término es cero. Asimismo, para hallar f_y, tratamos x como constante. Tenemos

$$f_x(x, y) = 3 + 0 = 3 \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = 0 + (-5)e^{-5y} = -5e^{-5y}.$$

(b) Para hallar f_x, tratamos y como constante, de modo que la función se trata como una constante por x^2. La derivada de una constante por x^2 es la constante por $2x$ y, por tanto, tenemos

$$f_x(x, y) = (2x)y = 2xy \qquad \text{del mismo modo} \qquad f_y(x, y) = (x^2)(1) = x^2.$$

(c) Para hallar f_u, tratamos v como constante y para hallar f_v, tratamos u como constante. Tenemos

$$f_u(u, v) = (2u)(e^{2v}) = 2ue^{2v} \qquad \text{y} \qquad f_v(u, v) = u^2(2e^{2v}) = 2u^2e^{2v}.$$

Ejemplo 4 La concentración C de bacterias en la sangre (en millones de bacterias/ml) después de una inyección de un antibiótico, es una función de la dosis x (en mg) inyectada en el tiempo t (en horas) desde que se aplicó la inyección. Suponga que los datos indican que $C = f(x, t) = te^{-xt}$. Evalúe las cantidades siguientes y explique lo que cada una significa en términos prácticos **(a)** $f_x(1, 2)$ **(b)** $f_t(1, 2)$

Solución **(a)** Para hallar f_x, consideramos t constante y derivamos respecto a x, obteniendo

$$f_x(x, t) = -t^2e^{-xt}.$$

Sustituyendo $x = 1$ y $t = 2$ tenemos

$$f_x(1, 2) = -4e^{-2} \approx -0.54.$$

Para ver qué significa $f_x(1, 2)$, consideramos a la función $f(x, 2)$ de la que es la derivada. La gráfica de $f(x, 2)$ de la figura 9.44 da la concentración de bacterias como función de la dosis dos horas después de la inyección. La derivada $f_x(1, 2)$ es la pendiente de la gráfica de esta función en el punto $x = 1$; es negativa porque una dosis más grande reduce la población de bacterias. Más precisamente, la derivada parcial $f_x(1, 2)$ da la razón de cambio de concentración de bacterias respecto a la dosis inyectada, a saber, una reducción en la concentración de bacterias de 0.54 millones/ml por gramo de antibiótico adicional inyectado.

(b) Para hallar f_t, tratamos x como constante y derivamos usando la regla del producto:

$$f_t(x, t) = 1 \cdot e^{-xt} - xte^{-xt}.$$

Sustituyendo $x = 1$, $t = 2$ resulta

$$f_t(1, 2) = e^{-2} - 2e^{-2} \approx -0.14.$$

Para ver qué significa $f_t(1, 2)$, consideremos a la función $f(1, t)$ de la cual es la derivada. La gráfica de $f(1, t)$ de la figura 9.45 da la concentración de bacterias en el tiempo t si la dosis del antibiótico es de 1 mg. La derivada de $f_t(1, 2)$ es la pendiente de la gráfica en el punto $t = 2$; es negativa porque, después de dos horas, la concentración de bacterias es decreciente. Más precisamente, la derivada parcial $f_t(1, 2)$ da la razón a la cual la concentración de bacterias está cambiando respecto al tiempo, a saber, una reducción en concentración de bacterias de 0.14 millones/ml por hora.

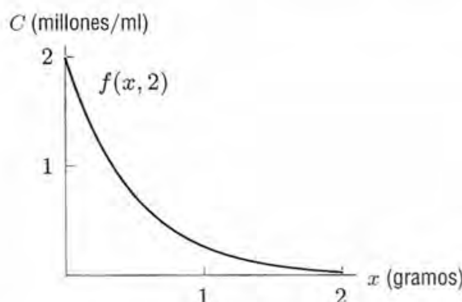


Figura 9.44. Concentración de bacterias después de dos horas como función de la cantidad de antibiótico inyectado.

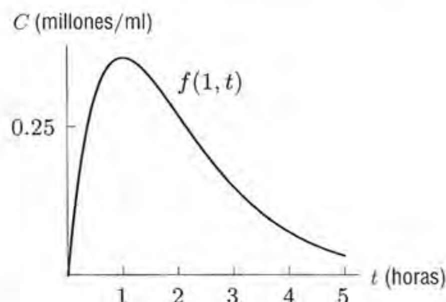


Figura 9.45. Concentración de bacterias como función del tiempo si se inyecta 1 unidad de antibiótico.

Funciones de producción de Cobb-Douglas

Supongamos que usted maneja una pequeña imprenta y decide ampliarla porque tiene más pedidos de los que puede manejar. ¿Cómo debe ampliarla? ¿Debe poner un turno de noche y contratar más trabajadores? ¿Debe comprar computadoras más caras, pero más rápidas, que harán posible que el personal actual realice todo el trabajo? ¿O debe hacer una combinación de las dos?

Obviamente, la forma en que se debe tomar está decisión en la práctica implica muchas otras consideraciones, por ejemplo, si se deben contratar trabajadores más calificados para el turno de la noche, o si hay computadoras más rápidas disponibles. Sin embargo, se podría hacer un modelo de la cantidad, P, del trabajo producido por el negocio como función de dos variables: el número total, N, de trabajadores y el valor total, V, del equipo.

¿Cómo esperaría usted que se comporte esta función de producción? En general, con más equipo y más trabajadores es posible producir más. Sin embargo, aumentar el equipo sin aumentar el número de trabajadores aumentaría un poco la producción, pero no más allá de cierto punto. (Si el equipo ya está sin trabajar, tener más no ayudará en nada.) Del mismo modo, aumentar el número de trabajadores sin aumentar el equipo aumentará la producción, pero no a más del punto donde el equipo se utilice a toda su capacidad, ya que ningún nuevo empleado tendría equipo para trabajar.

Ejemplo 5 Explique por qué el diagrama de contorno en la figura 9.46 no modela el comportamiento esperado de la función de producción, mientras que el diagrama de contorno de la figura 9.47 sí lo hace.

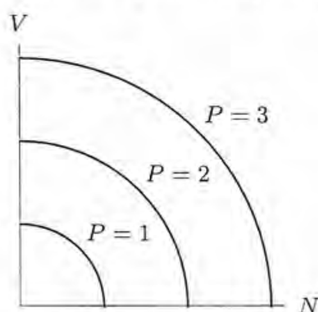


Figura 9.46. Contornos incorrectos para la producción de la imprenta.

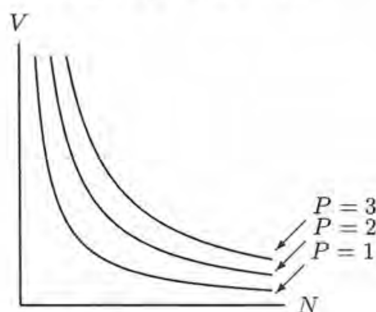


Figura 9.47. Contornos correctos para la producción de la imprenta.

Solución La producción P debe ser una función creciente de N y una función creciente de V. Vemos que ambos diagramas de contorno (en las figuras 9.46 y 9.47) satisfacen esta condición. ¿Cuál de los diagramas de contorno tiene producción creciente en la forma correcta? Primero veamos el diagrama de contorno de la figura 9.46. Fijar V en un valor en particular y dejar que N aumente significa movernos a la derecha del diagrama de contorno. Al hacerlo así, cruzamos contornos con valores cada vez más grandes que P, lo cual significa que la producción aumenta en forma indefinida. Por otra parte, en la figura 9.47, a medida que nos movemos en la misma dirección finalmente nos encontramos moviéndonos de manera casi paralela a los contornos, cruzándolos cada vez con menor frecuencia. Por tanto, la producción aumenta con más lentitud a medida que N aumenta mientras V se mantiene fija. Del mismo modo, si mantenemos N fija y hacemos que V aumente, el diagrama de contorno de la figura 9.46 muestra que la producción aumenta a una razón constante, mientras que la figura 9.47 muestra aumento en la producción, pero a una razón decreciente. En consecuencia, la figura 9.47 se ajusta mejor al comportamiento esperado de la función de producción.

Modelo de producción de Cobb-Douglas

En 1928, Cobb y Douglas usaron una fórmula sencilla para hacer un modelo de la producción de toda la economía de Estados Unidos en el primer trimestre del siglo pasado. Mediante el uso de estimaciones de P del gobierno, la producción anual total entre 1899 y 1922, y de K, la inversión total de capital en el mismo periodo, y de L, el total de fuerza laboral, encontraron que P se podía aproximar bien con la función:

$$P = 1.01L^{0.75}K^{0.25}.$$

Esta función produce un modelo sorprendentemente preciso de la economía de los Estados Unidos, tanto para el periodo en el cual se basaron como para algún tiempo en el futuro. El diagrama de contorno de esta función es semejante al de la figura 9.47. En general, la producción se modela frecuentemente con una función de la siguiente forma:

Función de producción de Cobb-Douglas

$$P = f(N,V) = cN^{\alpha}V^{\beta}$$

donde P es la cantidad total producida y c, α y β son constantes positivas con $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$.

Ejemplo 6 Consideremos un pequeño negocio de imprenta donde N es el número de trabajadores, V es el valor del equipo (en unidades de \$25,000) y P es la producción, medida en miles de páginas por día. Supongamos que la función de producción para esta compañía está dada por

$$P = f(N, V) = 2N^{0.6}V^{0.4}.$$

(a) Si esta compañía tiene una fuerza laboral de 100 trabajadores y un valor de equipo de 200 unidades, ¿cuál es la producción de la compañía?

(b) Encuentre $f_N(100, 200)$ y $f_V(100, 200)$. Interprete sus respuestas en términos de producción.

Solución **(a)** Tenemos $N = 100$ y $V = 200$, por consiguiente

$$\text{Producción} = 2(100)^{0.6}(200)^{0.4} = 263.9 \text{ miles de páginas por día.}$$

(b) Para hallar f_N, consideramos V constante y derivamos respecto a N:

$$f_N(N, V) = 2(0.6)N^{-0.4}V^{0.4}.$$

Sustituyendo $N = 100$, $V = 200$ resulta

$$f_N(100, 200) = 1.2(100^{-0.4})(200^{0.4}) \approx 1.583 \text{ miles de páginas/trabajador.}$$

Esto nos indica que si tenemos 200 unidades de equipo y aumentamos el número de trabajadores en 1, de 100 a 101, la producción subirá alrededor de 1.58 unidades, o sea 1,580 páginas por día.

Similarmente, para hallar $f_V(100, 200)$, consideramos N constante y derivamos respecto a V:

$$f_V(N, V) = 2(0.4)N^{0.6}V^{-0.6}.$$

Sustituyendo $N = 100$, $V = 200$ resulta

$$f_V(100, 200) = 0.8(100^{0.6})(200^{-0.6}) \approx 0.53 \text{ miles de páginas/unidad de equipo.}$$

Esto nos indica que si tenemos 100 trabajadores y aumentamos el valor del equipo en una unidad (\$25,000), de 200 unidades a 201, la producción aumentará en aproximadamente 0.53 unidades, o 530 páginas por día.

Derivadas parciales de segundo orden

Como las derivadas parciales de una función son funciones por sí mismas, por lo general podemos derivarlas y obtener *derivadas parciales de segundo orden*. Una función $z = f(x, y)$ tiene dos derivadas parciales de primer orden, f_x y f_y, y cuatro derivadas parciales de segundo orden.

Derivadas parciales de segundo orden de $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} = (f_x)_x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx} = (f_y)_x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy} = (f_x)_y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} = (f_y)_y.$$

Es usual omitir los paréntesis, escribiendo f_{xy} en lugar de $(f_x)_y$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ en lugar de $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$.

Ejemplo 7 Utilice los valores de la función $f(x, y)$ en la tabla 9.10 para estimar $f_{xy}(1, 2)$ y $f_{yx}(1,2)$.

Tabla 9.10 *Valores de $f(x, y)$*

y \ x	0.9	1.0	1.1
1.8	4.72	5.83	7.06
2.0	6.48	8.00	9.60
2.2	8.62	10.65	12.88

Solución Como $f_{xy} = (f_x)_y$, primero calculamos f_x:

$$f_x(1, 2) \approx \frac{f(1.1, 2) - f(1, 2)}{0.1} = \frac{9.60 - 8.00}{0.1} = 16.0,$$

$$f_x(1, 2.2) \approx \frac{f(1.1, 2.2) - f(1, 2.2)}{0.1} = \frac{12.88 - 10.65}{0.1} = 22.3.$$

Entonces,

$$f_{xy}(1, 2) \approx \frac{f_x(1, 2.2) - f_x(1, 2)}{0.2} = \frac{22.3 - 16.0}{0.2} = 31.5.$$

Análogamente,

$$f_{yx}(1, 2) \approx \frac{f_y(1.1, 2) - f_y(1, 2)}{0.1} \approx \frac{1}{0.1}\left(\frac{f(1.1, 2.2) - f(1.1, 2)}{0.2} - \frac{f(1, 2.2) - f(1, 2)}{0.2}\right)$$

$$= \frac{1}{0.1}\left(\frac{12.88 - 9.60}{0.2} - \frac{10.65 - 8.00}{0.2}\right) = 31.5.$$

Observe que en este ejemplo, $f_{xy} = f_{yx}$ en el punto (1, 2).

Ejemplo 8 Calcule las cuatro derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = xy^2 + 3x^2e^y$.

Solución De $f_x(x, y) = y^2 + 6xe^y$ obtenemos

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 + 6xe^y) = 6e^y \quad \text{y} \quad f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + 6xe^y) = 2y + 6xe^y.$$

De $f_y(x, y) = 2xy + 3x^2e^y$ obtenemos

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 3x^2e^y) = 2y + 6xe^y \quad \text{y} \quad f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + 3x^2e^y) = 2x + 3x^2e^y.$$

Observe que $f_{xy} = f_{yx}$ en este ejemplo.

Derivadas parciales mixtas son iguales

No es casual que los estimados para $f_{xy}(1, 2)$ y $f_{yx}(1, 2)$ sean iguales en el ejemplo 7, porque los mismos valores de la función se utilizan para calcularse entre sí. El hecho de que $f_{xy} = f_{yx}$ en el ejemplo 8 corrobora el siguiente resultado general:

> Si f_{xy} y f_{yx} son continuas en (a, b), entonces
> $$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

La mayor parte de las funciones que encontraremos no sólo tienen a f_{xy} y f_{yx} continuas, sino que todas sus derivadas parciales de orden superior (por ejemplo, f_{xxy} y f_{xyyy}) serán continuas. Estas funciones se denominan *suaves*.

Problemas para la sección 9.4

1. Si $f(x, y) = x^3 + 3y^2$, encuentre $f(1, 2)$, $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$.

2. Si $f(u, v) = 5uv^2$, encuentre $f(3, 1)$, $f_u(3, 1)$ y $f_v(3, 1)$.

Encuentre las derivadas parciales indicadas para los problemas 3 al 17. Suponga que las variables están restringidas a un dominio en el que la función está definida.

3. f_x y f_y si $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3$

4. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ si $z = x^2 e^y$

5. f_x y f_y si $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$

6. $\dfrac{\partial Q}{\partial p}$ si $Q = 5a^2p - 3ap^3$

7. $\dfrac{\partial P}{\partial r}$ si $P = 100e^{rt}$

8. f_t si $f(t,a) = 5a^2t^3$

9. f_x y f_y si $f(x,y) = 100x^2y$

10. f_x y f_y si $f(x,y) = 10x^2e^{3y}$

11. z_x si $z = x^2y + 2x^5y$

12. f_u y f_v si $f(u,v) = u^2 + 5uv + v^2$

13. $\dfrac{\partial A}{\partial h}$ si $A = \frac{1}{2}(a+b)h$

14. $\dfrac{\partial}{\partial m}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)$

15. f_x y f_y si $f(x,y) = 5x^2y^3 + 8xy^2 - 3x^2$

16. $\dfrac{\partial V}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial V}{\partial h}$ si $V = \frac{4}{3}\pi r^2 h$

17. $f_x(1,2)$ y $f_y(1,2)$ si $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 2y^2$

18. La fórmula de Dubois relaciona el área corporal de una persona, s, en m^2, con el peso, w, en kg y la altura, h, en cm, mediante
$$s = f(w,h) = 0.01w^{0.25}h^{0.75}.$$
Encuentre $f(65, 160)$ y $f_w(65, 160)$ y $f_h(65, 160)$. Interprete sus respuestas en términos del área corporal, la altura y el peso.

19. La cantidad de dinero, $\$B$, de una cuenta bancaria que gana intereses a una tasa continua, r, depende de la cantidad depositada, $\$P$, y del tiempo, t, que el dinero ha estado en el banco, donde
$$B = Pe^{rt}.$$
Encuentre $\partial B/\partial t$, $\partial B/\partial r$ y $\partial B/\partial P$ e interprete cada una en términos financieros.

20. El costo de rentar un automóvil de cierta compañía es de \$40 por día más 15 centavos por milla, por lo que tenemos
$$C = 40d + 0.15m.$$
Encuentre $\partial C/\partial d$, $\partial C/\partial m$. Dé unidades y explique la lógica de sus respuestas.

21. Una compañía manufacturera produce dos artículos en cantidades q_1 y q_2, respectivamente. Los costos totales de producción se dan con
$$\text{Costo} = f(q_1, q_2) = 16 + 1.2q_1 + 1.5q_2 + 0.2q_1q_2.$$
Encuentre $f(500, 1{,}000)$, $f_{q1}(500, 1{,}000)$ y $f_{q2}(500, 1{,}000)$. Dé unidades con sus repuestas e interprete cada una de éstas en términos del costo de producción.

22. **(a)** Considere la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. Estime $f_x(2,1)$ y $f_y(2, 1)$ usando el diagrama de contorno para f en la figura 9.48.
(b) Estime $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$ a partir de una tabla de valores para f con $x = 1.9, 2, 2.1$ y $y = 0.9, 1, 1.1$.
(c) Compare sus estimaciones de los incisos **(a)** y (b) con los valores exactos de $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$ encontrados algebraicamente.

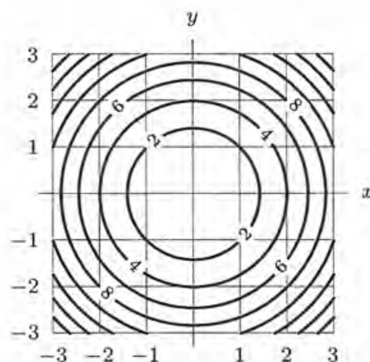


Figura 9.48.

23. Suponga que está usted en un estadio donde el público hace una ola. Éste es un ritual en el que los asistentes se ponen de pie y se sientan, de modo que crean una ola que se mueve alrededor del estadio. Normalmente una sola ola se mueve alrededor de todo el estadio, pero supondremos que hay una secuencia continua de olas. Sea $h(x, t) = 5 + \cos(0.5x - t)$ la función que describe la ola de este estadio. El valor de $h(x, t)$ da la altura (en pies) de la cabeza del espectador del asiento x en el tiempo t en segundos. Evalúe $h_x(2, 5)$ y $h_y(2, 5)$ e interprete cada uno en términos de la ola.

24. La producción de una compañía, P, se da en toneladas y es una función del número de trabajadores, N, y del valor del equipo, V, en unidades de \$25,000. La función de producción para la compañía es

$$P = f(N, V) = 5N^{0.75}V^{0.25}.$$

La compañía actualmente emplea a 80 trabajadores y tiene equipo con valor de \$750,000. ¿Cuánto valen N y V? Encuentre los valores de f, f_N y f_V para estos valores de N y V. Dé unidades con sus respuestas, y explique lo que cada una significa en términos de producción.

25. Suponga que la función de producción de Cobb-Douglas para un producto se encuentra con

$$Q = 25K^{0.75}L^{0.25},$$

donde Q es la cantidad producida por una inversión de capital de K dólares y una inversión de trabajo de L.

(a) Encuentre Q_K y Q_L.
(b) Encuentre los valores de Q, Q_K y Q_L dado que $K = 60$ y $L = 100$.
(c) Interprete cada uno de los valores que encontró en el inciso (b) en términos de producción.

26. Suponga que $P = 2N^{0.6}V^{0.4}$ en un pequeño negocio de imprenta, en donde N es el número de trabajadores, V es el valor del equipo y P es la producción, en miles de páginas por día.

(a) Si esta compañía tiene una fuerza laboral de 300 trabajadores y equipo con valor de 200 unidades, ¿cuál es la producción de la compañía?
(b) Si la fuerza laboral se duplica (a 600 trabajadores), ¿cómo cambia la producción?
(c) Si la compañía compra suficiente equipo para duplicar el valor de su equipo (a 400 unidades), ¿cómo cambia la producción?
(d) Si N y V se duplican a partir de los valores dados en el inciso (a), ¿cómo cambia la producción?

27. Suponga que la cantidad, Q, de cierto artículo producido depende del número de unidades de trabajo, L, y de capital, K, de acuerdo con la fórmula $Q = 900L^{1/2}K^{2/3}$.

(a) Si $L = 70$ y $K = 50$, ¿qué cantidad se produce?
(b) Encuentre Q cuando $L = 140$ y $K = 100$. En general, analice los efectos sobre Q de duplicar L y K.

28. La figura 9.49 muestra los diagramas de contorno para diferentes funciones de producción de Cobb-Douglas $F(L, K)$. Relacione cada diagrama de contorno con los enunciados correctos.

(a) Triplicar cada entrada triplica la salida.
(b) Cuadruplicar cada entrada duplica la salida.
(c) Duplicar cada entrada casi triplica la salida.

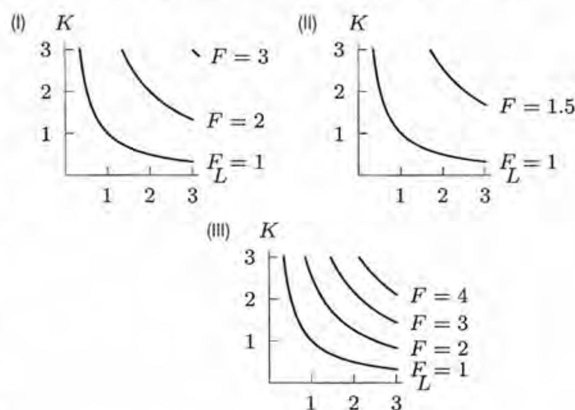


Figura 9.49.

Para los problemas 29 al 40, calcule las cuatro derivadas parciales de segundo orden y confirme que las derivadas parciales son iguales.

29. $f(x, y) = x^2y$
30. $f(x, y) = x^2+2xy+y^2$
31. $f(x, y) = xe^y$
32. $f(x, y) = \dfrac{2x}{y}, \quad y \neq 0$
33. $f = 5 + x^2y^2$
34. $f = e^{xy}$
35. $Q = 5p_1^2p_2^{-1}, \quad p_2 \neq 0$
36. $V = \pi r^2 h$
37. $P = 2KL^2$
38. $B = 5xe^{-2t}$
39. $f(x, t) = t^3 - 4x^2t$
40. $f = 100e^{rt}$

41. ¿Existe alguna función f que tenga las siguientes derivadas parciales? Si es así, ¿cuál es? ¿Hay algunas otras?

$$f_x(x, y) = 4x^3y^2 - 3y^4,$$
$$f_y(x, y) = 2x^4y - 12xy^3.$$

9.5 PUNTOS CRÍTICOS Y OPTIMIZACIÓN

Optimizar una función significa hallar el valor máximo o mínimo de la función. Si la función representa la utilidad, podemos hallar las condiciones que maximizan la utilidad. Por otra parte, si la función representa el costo, podemos hallar las condiciones que minimicen el costo. En el capítulo 4 vimos cómo optimizar una función de una variable al investigar sus puntos críticos. En esta sección, veremos cómo extender los conceptos de puntos críticos y extremos locales a una función de más de una variable.

Máximos y mínimos locales y globales para funciones de dos variables

Las funciones de varias variables, al igual que las funciones de una variable, pueden tener *extremos locales y globales*. (Es decir, máximos y mínimos locales y globales.) Una función tiene un extremo local en un punto donde toma el valor máximo o mínimo en una pequeña región alrededor del punto. Los extremos globales son los valores máximo o mínimo en cualquier parte. Para una función f definida en un dominio R, decimos:

- f tiene un **máximo local** en P_0 si $f(P_0) \geq f(P)$ para todos los puntos P cerca de P_0.
- f tiene un **mínimo local** en P_0 si $f(P_0) \leq f(P)$ para todos los puntos P cerca de P_0.
- f tiene un **máximo global** en P_0 si $f(P_0) \geq f(P)$ para todos los puntos P en R.
- f tiene un **mínimo global** en P_0 si $f(P_0) \leq f(P)$ para todos los puntos P en R.

Ejemplo 1 La tabla 9.11 proporciona los valores para una función $f(x, y)$. Estime la ubicación y el valor de cualquier máximo o mínimo globales para $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 20$.

Tabla 9.11 *¿Dónde están los puntos extremos de esta función $f(x, y)$?*

y \ x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	80	84	82	76	71	65
5	86	90	88	73	77	71
10	91	95	93	88	82	76
15	87	91	89	84	78	72
20	82	86	84	79	73	67

Solución El valor máximo global de la función parece ser 95 en el punto (0.2, 10). Como la tabla sólo da ciertos valores, no podemos estar seguros que éste sea exactamente el máximo. (La función podría tener un valor más grande, por ejemplo en (0.3, 11).) El valor mínimo global de esta función en los puntos dados es 65 en el punto (1, 0).

Ejemplo 2 La figura 9.50 da un diagrama de contorno para una función $f(x, y)$. Estime la ubicación y el valor de cualesquier máximos o mínimos locales. ¿Algunos de éstos son máximos o mínimos globales en el cuadrado mostrado?

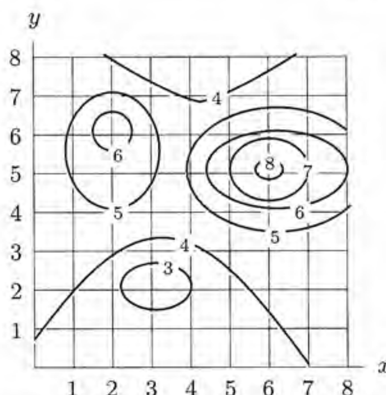


Figura 9.50. ¿Dónde están los puntos extremos locales y globales de esta función?

Solución Hay un máximo local con un valor arriba de 8 cerca del punto (6, 5), un máximo local con un valor mayor de 6 cerca del punto (2,6), y un mínimo local con un valor menor de 3 cerca del punto (3, 2). El valor señalado arriba de 8 es el máximo global y el valor menor de 3 es el mínimo global en el dominio dado.

En los ejemplos 1 y 2 podemos estimar la ubicación y el valor de los puntos extremos, pero no tenemos suficiente información para hallarlos exactamente. Esto suele ser cierto cuando nos dan una tabla de valores o un diagrama de contorno. Para hallar exactamente los extremos locales o globales, por lo general necesitamos tener una fórmula para la función.

Búsqueda analítica de un máximo o un mínimo locales

En el cálculo de una variable, los extremos locales de una función se presentan en puntos donde la derivada es cero o no está definida. ¿Cómo se generaliza esto en el caso de funciones de dos o más variables? Supongamos que una función $f(x, y)$ tiene un máximo local en un punto (x_0, y_0), que no está en la frontera del dominio f. Si la derivada parcial $f_x(x_0, y_0)$ estuviera definida y fuera positiva, entonces podríamos aumentar f al aumentar x. Si $f_x(x_0, y_0) < 0$, entonces se podría aumentar f al disminuir x. Como f tiene un máximo local en (x_0, y_0), no puede haber dirección en la que f sea creciente, de modo que debemos tener $f_x(x_0, y_0) = 0$. Análogamente, si $f_x(x_0, y_0)$ está definida, entonces $f_x(x_0, y_0) = 0$. El caso en que $f(x, y)$ tiene un mínimo local es similar. Por tanto, llegamos a la siguiente conclusión:

> Si una función $f(x, y)$ tiene un máximo o mínimo local en un punto (x_0, y_0) que no está en la frontera del dominio de f, entonces ya sea
>
> $$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$
>
> o (por lo menos) una de las derivadas parciales no está definida en el punto (x_0, y_0). Los puntos donde cada una de las derivadas parciales es cero o no está definida se denominan **puntos críticos**.

Al igual que en el caso de una sola variable, el hecho que (x_0, y_0) sea un punto crítico para f no necesariamente significa que f tiene un máximo o un mínimo ahí.

¿Cómo encontramos los puntos críticos?

Para hallar los puntos críticos de una función f, encontramos los puntos donde ambas derivadas parciales de f sean cero o no estén definidas.

Ejemplo 3 Encuentre y analice los puntos críticos de $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$.

Solución Para hallar los puntos críticos, igualamos a cero ambas derivadas parciales:

$$f_x(x, y) = 2x - 2 = 0,$$
$$f_y(x, y) = 2y - 4 = 0.$$

Al resolver estas ecuaciones resulta $x = 1$ y $y = 2$. Por tanto, f tiene sólo un punto crítico, a saber, $(1, 2)$. ¿Cuál es el comportamiento de f cerca de $(1, 2)$? Los valores de la función de la tabla 9.12 sugieren que la función tiene un valor mínimo local de 0 en el punto $(1, 2)$.

Tabla 9.12 *Valores de $f(x, y)$ cerca del punto* $(1, 2)$

y \ x	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
1.8	0.08	0.05	0.04	0.05	0.08
1.9	0.05	0.02	0.01	0.02	0.05
2.0	0.04	0.01	0.00	0.01	0.04
2.1	0.05	0.02	0.01	0.02	0.05
2.2	0.08	0.05	0.04	0.05	0.08

Ejemplo 4 Una compañía manufacturera elabora dos productos que se venden en dos mercados diferentes. Los economistas de la compañía analizan los dos mercados y determinan que las cantidades q_1 y q_2, que demandan los consumidores, y los precios p_1 y p_2 (en dólares) de cada artículo están relacionados por las ecuaciones

$$p_1 = 600 - 0.3q_1 \quad \text{y} \quad p_2 = 500 - 0.2q_2.$$

Entonces, si aumenta el precio de cualquier artículo, la demanda del mismo se reduce. El costo total de la producción de la compañía se encuentra con

$$C = 16 + 1.2q_1 + 1.5q_2 + 0.2q_1q_2.$$

Si la compañía quiere maximizar sus utilidades totales, ¿cuánto de cada artículo debe producir? ¿Cuál es la utilidad máxima?[8]

Solución El ingreso total R es la suma de los ingresos, p_1q_1 y p_2q_2, de cada mercado. Sustituyendo por p_1 y p_2, obtenemos

$$\begin{aligned} R &= p_1q_1 + p_2q_2 \\ &= (600 - 0.3q_1)q_1 + (500 - 0.2q_2)q_2 \\ &= 600q_1 - 0.3q_1^2 + 500q_2 - 0.2q_2^2. \end{aligned}$$

Entonces la utilidad total π está dada por

$$\begin{aligned} \pi &= R - C \\ &= 600q_1 - 0.3q_1^2 + 500q_2 - 0.2q_2^2 - (16 + 1.2q_1 + 1.5q_2 + 0.2q_1q_2) \\ &= -16 + 598.8q_1 - 0.3q_1^2 + 498.5q_2 - 0.2q_2^2 - 0.2q_1q_2. \end{aligned}$$

Para maximizar π, calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 598.8 - 0.6q_1 - 0.2q_2,$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 498.5 - 0.4q_2 - 0.2q_1.$$

[8]Adaptado de M. Rosser, *Basic Mathematics for Economists*, Routledge, Nueva York, 1993, p. 316.

Como las derivadas parciales están definidas en todas partes, los únicos puntos críticos de π son aquellos donde las derivadas parciales de π son iguales a cero. Así, resolvemos q_1 y q_2 de las ecuaciones,

$$598.8 - 0.6q_1 - 0.2q_2 = 0,$$
$$498.5 - 0.4q_2 - 0.2q_1 = 0,$$

se obtiene

$$q_1 = 699.1 \approx 699 \quad \text{y} \quad q_2 = 896.7 \approx 897.$$

Para ver si éste es un máximo, vemos una tabla de valores de la utilidad π alrededor de este punto. La tabla 9.13 sugiere que la utilidad es máxima en (699, 897). Por tanto, la compañía debe producir 699 unidades del primer artículo valuadas en \$390.30 por unidad y 897 unidades del segundo artículo valuadas en \$320.60 por unidad. La utilidad máxima es entonces $\pi(699, 897) = \$432{,}797$.

Tabla 9.13 *¿Tiene un máximo esta función de utilidad en* (699, 897)*?*

Cantidad, q_2 \ Cantidad, q_1	698	699	700
896	432,796.4	432,796.9	432,796.8
897	432,796.7	432,797.0	432,796.7
898	432,796.6	432,796.7	432,796.2

¿Es un punto crítico un máximo local o un mínimo local?

Con frecuencia podemos ver si un punto crítico es un máximo o un mínimo locales o ninguno de ellos al observar una tabla o un diagrama de contorno. El siguiente método analítico también puede ser útil al distinguir entre máximos o mínimos locales.[9] Es análogo a la prueba de la segunda derivada del capítulo 4.

Prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables

Supongamos que (x_0, y_0) es un punto crítico donde $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Sea

$$D = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2.$$

- Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en (x_0, y_0).
- Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces f tiene un máximo local en (x_0, y_0).
- Si $D < 0$, entonces f no tiene ni máximo ni mínimo local en (x_0, y_0).
- Si $D = 0$, la prueba no es concluyente.

Ejemplo 5 Utilice la prueba de la segunda derivada para comprobar que el punto crítico $q_1 = 699.1$, $q_2 = 896.7$ da un máximo local de la función de utilidad π del ejemplo 4.

Solución Para ver si hemos encontrado o no un punto máximo, calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2} = -0.6, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} = -0.4, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 \partial q_2} = -0.2.$$

Como

$$D = \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2 = (-0.6)(-0.4) - (-0.2)^2 = 0.2 > 0,$$

la prueba de la segunda derivada implica que hemos encontrado un punto máximo local.

[9] Una explicación de esta prueba se puede encontrar, por ejemplo, en *Multivariable Calculus*, por W. McCallum *et al.*, John Wiley, Nueva York, 1997.

Problemas para la sección 9.5

1. Al observar el mapa meteorológico de la figura 9.5 de la página 327, encuentre los valores máximos y mínimos diarios para las temperaturas más altas en cada uno de los estados de Mississippi, Alabama, Pensilvania, Nueva York, California, Arizona y Massachussets.

En los problemas 2 al 11, encuentre los puntos críticos y determine si cada uno es un máximo local, un mínimo local, o ninguno de ellos.

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 10y + 8$
3. $f(x, y) = x^2 + 4x + y^2$
4. $f(x, y) = x^2 + xy + 3y$
5. $f(x, y) = y^3 - 3xy + 6x$
6. $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$
7. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x^2 + 10y + 6$
8. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 8y$
9. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y + 10$
10. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6y^2 - 3x + 9$
11. Encuentre los valores de x y y que maximizan la función $f(x, y) = 400 - 3x^2 - 4x + 2xy - 5y^2 + 48y$.
12. La figura 9.51 muestra un diagrama de contorno de una función $f(x, y)$. Señale las coordenadas x y y y el valor de la función de cada punto máximo local y mínimo local e identifique cuál es cuál. ¿Algunos de estos extremos locales son también extremos globales en la región que se muestra? Si es así, ¿cuáles?

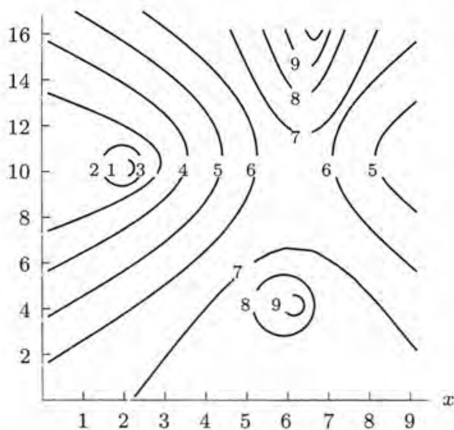


Figura 9.51.

13. La figura 9.52 muestra un diagrama de contorno de una función $f(x, y)$. Señale las coordenadas x y y y el valor de la función de cada punto máximo local y mínimo local e identifíquelos. Algunos de estos extremos locales, ¿son también extremos globales en la región mostrada? Si es así, ¿cuáles?

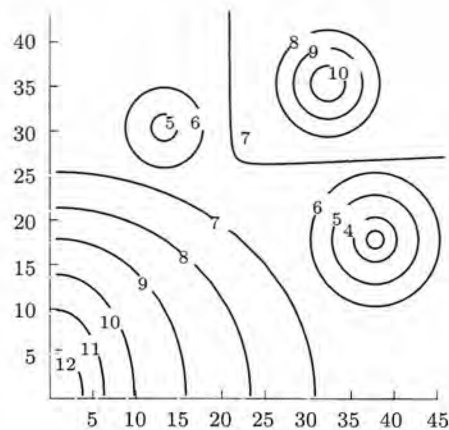
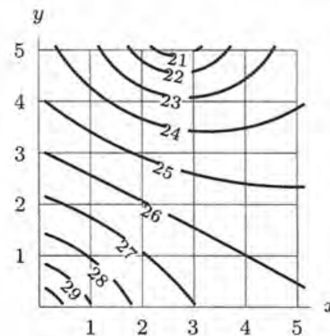


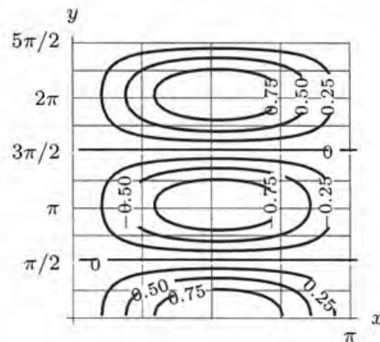
Figura 9.52.

Para los problemas 14 al 16, estime la ubicación y los valores aproximados de los máximos y mínimos globales en la región mostrada.

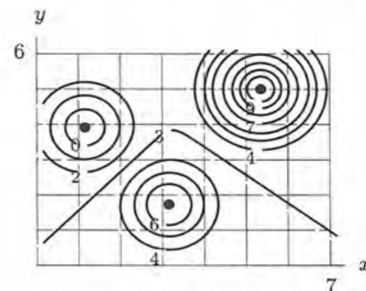
14.



15.



16.



17. Suponga que $f(x, y) = A - (x^2 + Bx + y^2 + Cy)$. ¿Cuáles valores de A, B y C dan a f un valor máximo local de 15 en el punto $(-2, 1)$?

18. Una compañía vende dos productos que son sustitutos parciales uno del otro, por ejemplo, café y té. Si el precio de un producto sube, entonces la demanda del otro producto aumenta. Las cantidades demandadas, q_1 y q_2, se dan como función de los precios p_1 y p_2, con

$$q_1 = 517 - 3.5p_1 + 0.8p_2, \quad q_2 = 770 - 4.4p_2 + 1.4p_1.$$

(a) Escriba el ingreso por ventas totales como función de p_1 y p_2.
(b) ¿Qué precios debe cobrar la compañía con el fin de maximizar el ingreso por las ventas totales?[10]

19. Una compañía opera dos plantas que producen el mismo artículo y cuyas funciones de costo total son:

$$C_1 = 8.5 + 0.03q_1^2 \quad \text{y} \quad C_2 = 5.2 + 0.04q_2^2,$$

donde q_1 y q_2 son las cantidades producidas por cada planta. La cantidad total demandada, $q = q_1 + q_2$, está relacionada con el precio, p, por

$$p = 60 - 0.04q.$$

¿Cuánto debe producir cada planta para maximizar la utilidad de la compañía?[11]

20. Suponga que se fabrican dos productos en cantidades q_1 y q_2 y se venden a precios p_1 y p_2, respectivamente, y que el costo de producción de éstos se encuentra con

$$C = 2q_1^2 + 2q_2^2 + 10.$$

(a) Encuentre la máxima utilidad que se puede obtener, suponiendo que los precios son fijos.
(b) Encuentre la razón de cambio de la utilidad máxima a medida que p_1 aumenta.

21. Un misil tiene un dispositivo que lo guía, el cual es sensible a la temperatura, t °C, y a la humedad, h. El rango en km en el que se puede controlar al misil está dado por

$$\text{Rango} = 27{,}800 - 5t^2 - 6ht - 3h^2 + 400t + 300h.$$

¿Cuáles son las condiciones atmosféricas óptimas para controlar el misil?

9.6 OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA

Muchos problemas reales de optimización están restringidos por circunstancias externas. Por ejemplo, una ciudad que quiere construir un sistema de transporte público tiene sólo un número limitado de dólares de impuestos para invertir en el proyecto. Cualquier nación que trate de mantener el equilibrio de su comercio debe gastar menos en importaciones de lo que gana en exportaciones. En esta sección, veremos cómo encontrar un valor óptimo bajo estas restricciones.

Un problema de optimización restringida

Suponga que queremos maximizar la producción de una compañía bajo una restricción de presupuesto. Suponga que la producción, f, es una función de dos variables, x y y, que son las cantidades de dos materias primas y

$$f(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}.$$

Si x y y se compran a precios de p_1 y p_2 dólares por unidad, ¿cuál es la máxima producción f que se puede obtener con un presupuesto de c dólares?

Para maximizar f cualquiera que sea el presupuesto, simplemente aumentamos x y y cuando sea posible. Sin embargo, el presupuesto impide aumentar x y y más allá de cierto punto. ¿Exactamente cómo nos restringe el presupuesto? Supongamos que x y y tienen un costo de \$100 por unidad y supongamos que el presupuesto total es de \$378,000. La cantidad invertida en x y y juntas está dada por $g(x, y) = 100x + 100y$ y como no podemos gastar más de lo que permite el presupuesto, debemos tener:

$$g(x, y) = 100x + 100y \leq 378{,}000.$$

La meta es maximizar la función

$$f(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}.$$

Como esperamos agotar el presupuesto, tenemos

$$100x + 100y = 378{,}000.$$

[10] Adaptado de Rosser, M., *Basic Mathematics for Economists*, Routledge, Nueva York, 1993, p. 318.
[11] *Ibídem.*

Ejemplo 1 Una compañía tiene una función de producción $f(x,y) = x^{2/3}y^{1/3}$ y una restricción presupuestal de $100x + 100y = 378{,}000$.

(a) Si se gastan \$100,000 en x, ¿cuánto se puede gastar en y? ¿Cuál es la producción en este caso?

(b) Si se gastan \$200,000 en x, ¿cuánto se puede gastar en y? ¿Cuál es la producción en este caso?

(c) ¿Cuál de las dos opciones anteriores es la mejor para la compañía? ¿Piensa que ésta es la mejor de todas las opciones posibles?

Solución **(a)** Si la compañía gasta \$100,000 en x, entonces tiene \$278,000 para gastar en y. En este caso, tenemos $100x = 100{,}000$, de modo que $x = 1{,}000$ y $100y =\$278{,}000$, de modo que $y = 2{,}780$. Por tanto,

$$\text{Producción} = f(1{,}000,\ 2{,}780) = (1{,}000)^{2/3}(2{,}780)^{1/3} = 1{,}406 \text{ unidades.}$$

(b) Si la compañía gasta \$200,000 en x, entonces tiene \$178,000 para gastar en y. Por tanto, $x = 2{,}000$ y $y = 1{,}780$ y

$$\text{Producción} = f(2{,}000,\ 1{,}780) = (2{,}000)^{2/3}(1{,}780)^{1/3} = 1{,}924 \text{ unidades.}$$

(c) De estas dos opciones, (b) es mejor porque la producción es mayor en este caso. Es probable que ésta no sea la óptima, ya que hay muchas otras combinaciones de x y y que no hemos comprobado.

Método gráfico: maximización de la producción sujeta a una restricción de presupuesto

¿Cómo podemos hallar el valor máximo de la producción? Deseamos maximizar la *función objetivo*.

$$f(x,y) = x^{2/3}y^{1/3}$$

sujeta a $x \geq 0$ y $y \geq 0$ y la restricción de presupuesto

$$g(x,y) = 100x + 100y = 378{,}000.$$

La restricción está representada por la recta de la figura 9.53. Cualquier punto situado en la recta o debajo de ésta representa un par de valores de x y y que podemos permitir. Un punto en la recta agota completamente el presupuesto, mientras que un punto arriba de la recta representa un par de valores que rebasan el presupuesto.

La figura 9.53 también muestra algunos contornos de la función de producción f. Como queremos maximizar f, deseamos hallar el punto que se encuentre en el contorno con el máximo valor posible de f y que se encuentre dentro del presupuesto. El punto que buscamos debe estar dentro de la restricción presupuestal porque debemos gastar todo el dinero disponible. La observación clave es ésta: el máximo se presenta en el punto P donde la restricción presupuestal es tangente a un contorno (véase la figura 9.53). La razón es que si estamos en la recta de restricción a la izquierda de P, al movernos a la derecha aumentará f; si estamos en la recta a la derecha de P, movernos a la izquierda hará que aumente f. Entonces, el máximo valor de f en la recta de restricción del presupuesto está en el punto P.

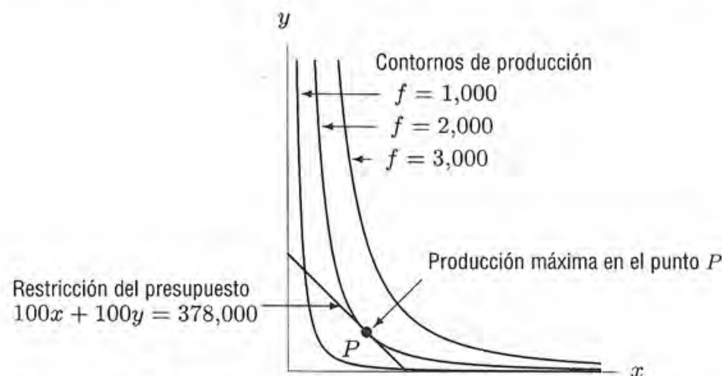


Figura 9.53. Restricción de presupuesto y contornos de producción.

En general, siempre que f y g sean suaves, tenemos el siguiente resultado:

Si $f(x, y)$ tiene un máximo o mínimo global en la restricción $g(x, y) = c$, entonces el mismo se presenta en un punto donde la gráfica de la restricción es tangente a un contorno de f, o está en un punto extremo de la restricción.[12]

Método analítico: el método de los multiplicadores de Lagrange

Supongamos que deseamos optimizar $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = c$. Damos la siguiente definición.

Suponga que P_0 es un punto que satisface la restricción $g(x, y) = c$.

- f tiene un **máximo local** en P_0 **sujeto a la restricción** si $f(P_0) \geq f(P)$ para todos los puntos P cerca de P_0 que satisfacen la restricción.
- f tiene un **máximo global** en P_0 **sujeto a la restricción** si $f(P_0) \geq f(P)$ para todos los puntos P que satisfacen la restricción.

Los mínimos locales y globales se definen de modo similar.

Se puede demostrar[13] que la restricción es tangente a un contorno de f en el punto que satisface las ecuaciones que se muestran en el siguiente método.

Método de los multiplicadores de Lagrange. Para optimizar $f(x, y)$ sujeto a la restricción $g(x, y) = c$, resuelva el siguiente sistema de tres ecuaciones

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lambda g_x(x,y), \\ f_y(x,y) &= \lambda g_y(x,y), \\ g(x,y) &= c, \end{aligned}$$

para las tres incógnitas x, y y λ; al número λ se le denomina *multiplicador de Lagrange*. Si f tiene un máximo o mínimo global restringido, entonces se presenta en una de las soluciones (x_0, y_0) de este sistema o en un punto extremo de la restricción.

Ejemplo 2 Maximice $f(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$ sujeto a $100x + 100y = \$378{,}000$.

Solución Al derivar resulta

$$f_x(x,y) = \frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3} \quad \text{y} \quad f_y(x,y) = \frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}$$

y

$$g_x(x,y) = 100 \quad \text{y} \quad g_y(x,y) = 100,$$

lo que lleva a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3} &= \lambda(100) \\ \frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3} &= \lambda(100) \\ 100x + 100y &= 378{,}000. \end{aligned}$$

[12] Si la restricción tiene puntos extremos.

[13] Véase W. McCallum, *et al.*, *Multivariable Calculus*, John Willey, Nueva York, 1997.

La primera de las dos ecuaciones muestran que debemos tener

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3} = \frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}.$$

Usando el hecho que $x^{-1/3} = 1/x^{1/3}$, podemos escribir esto como

$$\frac{2y^{1/3}}{3x^{1/3}} = \frac{x^{2/3}}{3y^{2/3}}.$$

Multiplicando por los denominadores resulta

$$2y^{1/3}(3y^{2/3}) = x^{2/3}(3x^{1/3}),$$

y simplificando debido a $y^{1/3} \cdot y^{2/3} = y^1$ obtenemos

$$6y = 3x$$
$$2y = x.$$

Como debemos satisfacer también la restricción de que $100x + 100y = 378{,}000$, sustituimos $x = 2y$ y obtenemos

$$100(2y) + 100y = 378{,}000$$
$$300y = 378{,}000$$
$$y = 1{,}260.$$

Como $x = 2y$, tenemos $x = 2{,}520$. El valor óptimo se presenta en $x = 2{,}520$ y $y = 1{,}260$. Para estos valores,

$$f(2{,}520, 1{,}260) = (2{,}520)^{2/3}(1{,}260)^{1/3} \approx 2{,}000.1.$$

Los puntos extremos de la restricción son los puntos (3,780, 0) y (0, 3,780). Como

$$f(3{,}780, 0) = f(0, 3{,}780) = 0,$$

vemos que el máximo valor de f es aproximadamente 2,000 y que se presenta en $x = 2{,}520$ y $y = 1{,}260$.

Significado de λ

En el ejemplo anterior nunca encontramos (ni necesitamos) el valor de λ. Sin embargo, λ tiene una interpretación práctica. En el problema de producción maximizamos

$$f(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$$

sujeta a la restricción

$$g(x, y) = 100x + 100y = 378{,}000.$$

Resolvimos las ecuaciones

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3} = 100\lambda,$$
$$\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3} = 100\lambda,$$
$$100x + 100y = 378{,}000,$$

para obtener $x = 2{,}520$, $y = 1{,}260$. Continuando para hallar λ, obtenemos

$$\lambda \approx 0.0053.$$

Supongamos que ahora hacemos otro cálculo aparentemente sin relación. Supongamos que nuestro presupuesto aumenta \$1,000, de \$378,000 a \$379,000. La nueva restricción de presupuesto es

$$100x + 100y = 379{,}000.$$

La solución correspondiente está en $x = 2{,}527$, $y = 1{,}263$ y el nuevo valor máximo (en lugar de $f = 2{,}000.1$) es

$$f = (2{,}527)^{2/3}(1{,}263)^{1/3} \approx 2{,}005.4.$$

Los \$1,000 adicionales del presupuesto aumentaron el nivel de producción f en 5.3 unidades. Observe que la producción aumentó en $5.3/1{,}000 = 0.0053$ unidades por dólar, que es nuestro valor de λ. El valor de λ representa la producción extra lograda al aumentar el presupuesto en un dólar; en otras palabras, la producción extra que se obtiene de un dólar extra de presupuesto.

Al despejar λ en cualquiera de las ecuaciones $f_x = \lambda g_x$ o $f_y = \lambda g_y$ se sugiere que el multiplicador de Lagrange está dado por el cociente de los cambios:

$$\lambda \approx \frac{\Delta f}{\Delta g} = \frac{\text{Cambio en el valor óptimo de } f}{\text{Cambio en } g}.$$

Estos resultados sugieren las siguientes interpretaciones:

- El valor de λ es aproximadamente el aumento en el valor óptimo de f cuando el valor de la restricción se aumenta en 1 unidad.
- El valor de λ representa la razón de cambio del valor óptimo de f cuando la restricción aumenta.

Ejemplo 3 La cantidad de artículos que se producen según la función $f(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$ se maximiza sujeta a la restricción de presupuesto $100x + 100y = 378{,}000$. Suponga que el presupuesto se aumenta para permitir un pequeño incremento en la producción. ¿A qué precio se debe vender el producto para que valga la pena el aumento en el presupuesto?

Solución Sabemos que $\lambda = 0.0053$. Por tanto, aumentar el presupuesto en \$1 aumenta la producción en alrededor de 0.0053 unidades. Para hacer rentable el aumento en presupuesto, los artículos extra producidos deben venderse en más de \$1. Si el precio es p, debemos tener $0.0053p > 1$. Entonces, necesitamos $p > 1/0.0053 \approx \$189$.

Ejemplo 4 La cantidad, Q, de un producto fabricado por una compañía está dado por

$$Q = xy,$$

donde x y y son las cantidades de materia prima usadas. Suponga que x cuesta \$20 por unidad, y cuesta \$10 por unidad, y el presupuesto es \$10,000.

(a) ¿Cuántas unidades de x y y deben comprarse para maximizar la producción?
(b) ¿Cuántas unidades se producen al valor máximo?
(c) Encuentre el valor de λ e interprételo.

Solución (a) Se maximiza $f(x, y) = xy$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 20x + 10y = 10{,}000$ y $x \geq 0$, $y \geq 0$. Tenemos las siguientes derivadas parciales:

$$f_x = y, \quad f_y = x, \quad \text{y} \quad g_x = 20, \quad g_y = 10.$$

El método de los multiplicadores de Lagrange da las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= 20\lambda \\ x &= 10\lambda \\ 20x + 10y &= 10{,}000. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de x y y de las dos primeras ecuaciones en la tercera, resulta

$$\begin{aligned} 20(10\lambda) + 10(20\lambda) &= 10{,}000 \\ 400\lambda &= 10{,}000 \\ \lambda &= 25. \end{aligned}$$

Sustituyendo $\lambda = 25$ en las primeras dos ecuaciones anteriores da $x = 250$ y $y = 500$. La compañía debe comprar 250 unidades de x y 500 unidades de y.

(b) Los puntos extremos de la restricción son los puntos (500, 0) y (0, 1,000). Como $f(500, 0) = f(0, 1{,}000) = 0$, el máximo valor de la función de producción es

$$f(250, 500) = (250)(500) = 125{,}000 \text{ unidades.}$$

(c) Tenemos $\lambda = 25$. Esto nos indica que si el presupuesto se aumenta en \$1, esperamos que la producción suba a 25 unidades. Si el presupuesto aumenta en \$1,000, la producción máxima aumentará unas 25,000 para un total de casi 150,000 unidades.

Función de Lagrange

Los problemas de optimización restringida se resuelven frecuentemente usando una *función de Lagrange*, $\mathcal{L}$. Por ejemplo, para optimizar la función $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = c$, usamos la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c).$$

Para ver por qué es útil la función $\mathcal{L}$, se calculan las derivadas parciales de $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -(g(x, y) - c). \end{aligned}$$

Observe que si (x_0, y_0) es un punto crítico de $f(x, y)$ sujeto a la restricción $g(x, y) = c$ y λ_0 es el correspondiente multiplicador de Lagrange, entonces en el punto (x_0, y_0, λ_0) tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0.$$

Es decir, (x_0, y_0, λ_0) es un punto crítico para el problema no restringido de optimización de la función de Lagrange $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$.

Por tanto, podemos atacar problemas de optimización restringida en dos pasos. Primero, escribimos la función de Lagrange $\mathcal{L}$. Segundo, encontramos los puntos críticos de $\mathcal{L}$.

Problemas para la sección 9.6

En los problemas 1 al 10, utilice los multiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximo o mínimo de $f(x, y)$ sujetos a las restricciones dadas.

1. $f(x,y) = xy, \quad 5x + 2y = 100$
2. $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 100, \quad 8x + 6y = 88$
3. $f(x,y) = x^2 + 4xy, \quad x + y = 100$
4. $f(x,y) = 5xy, \quad x + 3y = 24$
5. $f(x,y) = x + y, \quad x^2 + y^2 = 1$
6. $f(x,y) = 3x - 2y, \quad x^2 + 2y^2 = 44$
7. $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad 4x - 2y = 15$
8. $f(x,y) = x^2 + y, \quad x^2 - y^2 = 1$
9. $f(x,y) = xy, \quad 4x^2 + y^2 = 8$
10. $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad x^4 + y^4 = 2$

11. La figura 9.54 muestra un diagrama de contorno de la función $f(x, y)$ y la restricción $g(x, y) = c$. Aproximadamente, ¿qué valores de x y y maximizan $f(x, y)$ sujeta a la restricción? ¿Cuál es el valor aproximado de f en este máximo?

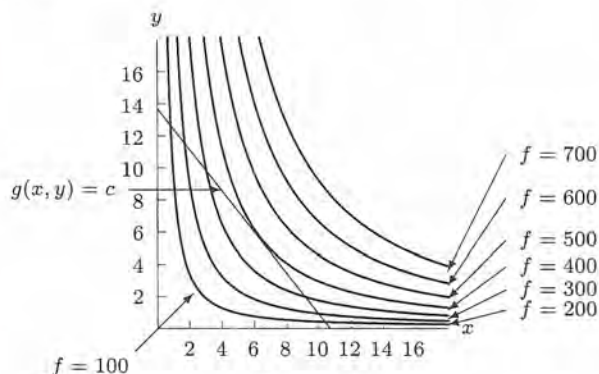


Figura 9.54.

12. La cantidad, Q, de cierto artículo manufacturado depende de la cantidad de trabajo, L, y del capital, K, usado según la función

$$Q = 900L^{1/2}K^{2/3}.$$

Supongamos que el trabajo cuesta \$100 por unidad y el capital cuesta \$200 por unidad. ¿Qué combinación de trabajo y de capital se debe usar para producir 36,000 unidades de los artículos a un costo mínimo? ¿Cuál es ese costo mínimo?

13. La cantidad, Q, de un producto manufacturado por una compañía se da con

$$Q = aK^{0.6}L^{0.4},$$

donde a es una constante positiva, K es la cantidad de capital y L es la cantidad de trabajo utilizado. Los costos de capital son de \$20 por unidad, los costos del trabajo son de \$10 por unidad y la compañía quiere que los costos por capital y trabajo combinados no sean mayores de \$150. Suponga que a usted se le pide asesorar a la compañía y se entera de que se están usando 5 unidades de capital y 5 de trabajo.

(a) ¿Qué les aconsejaría usted? ¿Debe la compañía usar más o menos trabajo? ¿Más o menos capital? Si es así, ¿en qué cantidad?
(b) Escriba un resumen breve que pueda emplearse para vender su asesoría a la junta directiva.

14. Considere una firma que produce una mercancía en dos fábricas diferentes. El costo total de manufactura depende de las cantidades, q_1 y q_2, proporcionadas por cada fábrica y se expresa por la *función de costo conjunto*,

$$C = f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 500.$$

La meta de la compañía es producir 200 unidades, al mismo tiempo que reducir los costos de producción. ¿Cuántas unidades debe proporcionar cada fábrica?

15. La función de producción para una compañía está dada por

$$P = 24K^{0.6}L^{0.4},$$

donde P es la cantidad producida por la compañía, L es la cantidad gastada en trabajo, y K es el valor del equipo, o capital. La cantidad total gastada en L y K juntas no pueden exceder \$1,000. Si la meta es maximizar la producción, ¿cuánto debe gastarse en trabajo y cuánto en capital?

(a) Determine las ecuaciones para resolver este problema usando multiplicadores de Lagrange.
(b) ¿Cuáles son los valores óptimos de L y K?
(c) ¿Cuántas unidades se producen en este nivel de producción?
(d) Encuentre el valor de λ e interprételo.

16. El director de un sanatorio de cierto sector de la ciudad tiene un presupuesto anual de \$600,000. Cómo debe distribuir el presupuesto para maximizar el número de visitas a pacientes, V, que es una función del número de doctores, D, y del número de enfermeras, N, y está dado por

$$V = 1{,}000D^{0.6}N^{0.3}.$$

Los doctores reciben un salario anual de \$40,000, y las enfermeras ganan \$10,000.

(a) Determine el problema de optimización restringida del director.
(b) Resuelva el problema formulado en el inciso (a).
(c) Encuentre el valor del multiplicador de Lagrange e interprete su significado en este problema.

17. Para una función de costo, $f(x, y)$, el costo mínimo para una producción de 50 está dado por $f(33, 87) = 1{,}200$, con $\lambda = 15$. Estime el costo si la cuota de producción:

(a) Se ha elevado a 51. (b) Ha bajado a 49.

18. La cantidad, q, de un producto fabricado depende del número de trabajadores, W, y del capital invertido, K, y está representada por la función de Cobb-Douglas

$$q = 6W^{3/4}K^{1/4}.$$

Además, los costos de mano de obra son de \$10 por trabajador, los de capital son de \$20 por unidad, y el presupuesto es de 3,000.

(a) ¿Cuáles son el número óptimo de trabajadores y el de unidades de capital?

(b) Haga un nuevo cálculo de valores óptimos de W y K cuando el presupuesto se incrementa en \$1. Compruebe que aumentar el presupuesto en \$1 permite la producción de λ unidades extra del artículo, donde λ es el multiplicador de Lagrange.

19. Una compañía tiene la función de producción $P(x, y)$, que da el número de unidades que se pueden producir para una función de valores de x y y; la función de costo $C(x, y)$ da el costo de producción para valores dados de x y y.

(a) Si la compañía desea maximizar su producción a un costo de \$50,000, ¿cuál es la función objetivo f? ¿Cuál es la ecuación de restricción? ¿Cuál es el significado de λ en esta situación?

(b) Si en lugar de lo anterior la compañía desea minimizar los costos a un nivel de producción de 2,000 unidades, ¿cuál es la función objetivo f? ¿Cuál es la ecuación de restricción? ¿Cuál es el significado de λ en está situación?

20. Una compañía fabrica x unidades de un artículo y y unidades de otro. El costo total en dólares, C, de producir estos dos artículos se aproxima con la función

$$C = 5x^2 + 2xy + 3y^2 + 800.$$

(a) Si la cuota de producción para el número total de artículos (combinando ambos tipos) es 39, encuentre el costo mínimo de producción.

(b) Estime los ahorros o costo adicional de producción si la cuota de producción se eleva a 40 o si baja a 38.

21. Cada persona trata de repartir su tiempo entre descanso y trabajo. El resultado es que a medida que la persona trabaja menos, su ingreso baja. Por tanto, cada persona tiene *curvas de indiferencia* que conectan el número de horas de descanso, l, e ingreso, s. Si, por ejemplo, a usted le es indiferente entre 0 horas de descanso y un ingreso de \$1,125 a la semana, por un lado, y 10 horas de descanso y un ingreso de \$750 por semana, por el otro, entonces los puntos $l = 0$, $s = 1{,}125$ y $l = 10$, $s = 750$ caen ambos en la misma curva de indiferencia. La tabla 9.14 da información sobre tres curvas de indiferencia: I, II y III.

Tabla 9.14

Ingreso semanal			Horas de descanso semanal		
I	II	III	I	II	III
1,125	1,250	1,375	0	20	40
750	875	1,000	10	30	50
500	625	750	20	40	60
375	500	625	30	50	70
250	375	500	50	70	90

(a) Trace las tres curvas de indiferencia.

(b) Suponga que tiene 100 horas a la semana para el trabajo y descanso combinados y que gana \$10/hora. Escriba una ecuación en términos de l y s que represente esta restricción.

(c) En un mismo sistema de coordenadas, trace una gráfica de esta restricción.

(d) Estime, a partir de la gráfica, cuál combinación de horas de descanso e ingreso elegiría bajo estas circunstancias. Dé el número correspondiente de horas por semana que trabajaría.

22. Una gran planta fabricante de automóviles emplea 1,500 trabajadores y tiene una inversión de capital de 4 millones de dólares por mes. La función de producción es

$$Q = x^{0.4}y^{0.6},$$

donde Q es el número de automóviles producidos por mes, x es el número de trabajadores y y es la inversión de capital. El salario de cada trabajador es de \$2,100 por mes y cada unidad de capital cuesta \$1,000 por mes.

(a) ¿Cuántos automóviles ensambla actualmente la fábrica por mes?

(b) Debido a una recesión económica, la fábrica decide reducir la producción a 2,000 automóviles por mes. La fábrica quiere minimizar el costo de producción de estos 2,000 automóviles. ¿Cuántos trabajadores necesita despedir? ¿En qué cantidad se debe reducir la inversión mensual?

(c) Dé el valor del multiplicador de Lagrange, λ, e interprételo en términos de la fábrica de automóviles.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

- **Funciones de dos variables**
  Representadas por: tablas, gráficas, fórmulas, secciones transversales (una variable fija), contornos (valor fijo de la función).
- **Derivadas parciales**
  Definición como cociente de diferencias, interpretación usando unidades, estimación a partir de un diagrama de contorno o de una tabla, cálculo a partir de una fórmula, derivadas parciales de segundo orden.
- **Optimización**
  Puntos críticos, máximos y mínimos locales y globales.
- **Optimización restringida**
  Interpretación geométrica del método de multiplicadores de Lagrange, solución algebraica de problemas de multiplicadores de Lagrange, interpretación de λ.

PROBLEMAS DE REPASO

1. Un fabricante vende dos productos, uno a un precio de \$3,000 por unidad y el otro a \$12,000 por unidad. Una cantidad q_1 del primer artículo y q_2 del segundo artículo se venden a un costo total de \$4,000 para el fabricante.
   (a) Exprese la utilidad del fabricante, π, como función de q_1 y q_2.
   (b) Trace el diagrama de contorno para la función π para $\pi = 10{,}000$, $\pi = 20{,}000$ y $\pi = 30{,}000$ y la curva de beneficio nulo $\pi = 0$.
2. La figura 9.55 muestra los diagramas de contorno de temperatura en °C en una habitación en tres momentos diferentes. Describa el flujo de calor en la habitación. ¿Qué podría estar causando esto?

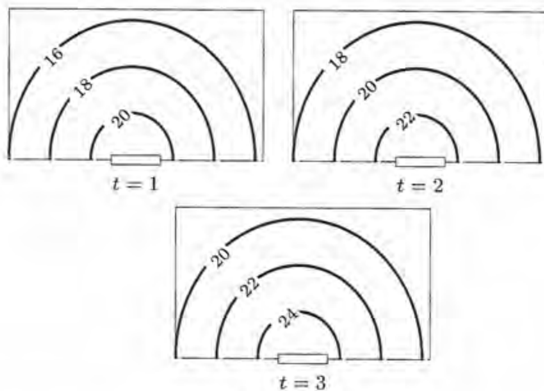


Figura 9.55.

En los problemas 3 y 4, suponga que una lluvia de cenizas, V (en kilogramos por kilómetro cuadrado), de una explosión volcánica depende de la distancia desde el volcán, d, y del tiempo, t, después de la explosión:

$$V = f(d, t) = (\sqrt{t})e^{-d}.$$

3. En un mismo sistema de coordenadas, trace una gráfica de las secciones transversales de f, con $t = 1$ y $t = 2$. A medida que aumenta la distancia desde el volcán, ¿cómo cambia la lluvia de cenizas? Observe la relación entre las gráficas, ¿cómo cambia la lluvia de cenizas con el tiempo? Explique sus respuestas en términos de volcanes.
4. En un mismo sistema de coordenadas, trace una gráfica de las secciones transversales de f, con $d = 0$, $d = 1$ y $d = 2$. A medida que pasa el tiempo desde la explosión, ¿cómo cambia la lluvia de cenizas? Observe la relación entre las gráficas, ¿cómo cambia la lluvia de cenizas como función de la distancia? Explique sus respuestas en términos de volcanes.
5. Trace un diagrama de contorno $z = y - \operatorname{sen} x$. Incluya por lo menos cuatro contornos marcados. Describa verbalmente los contornos y la forma en que están espaciados.

Para cada una de las funciones de los problemas 6 y 7, haga una gráfica de un diagrama de contorno en la región $-2 < x < 2$ y $-2 < y < 2$. En cada caso, ¿cuál es la ecuación y la forma de las líneas de contorno?

6. $z = 3x - 5y + 1$
7. $z = 2x^2 + y^2$

8. Supongamos que usted es un antropólogo que observa un ritual de unos nativos. Dieciséis personas se sientan en una banca dándole la espalda, pero tres de ellas se colocan a la extrema izquierda, alejados de los demás. La primera persona de la extrema izquierda (una mujer) está de pie con las manos a sus costados, la segunda (un hombre) está de pie con las manos levantadas, y la tercera (una mujer) está de pie con las manos a sus costados. A una señal invisible, la primera se sienta y todos los demás copian lo que su vecino de la izquierda hacía un segundo antes. Cada segundo que pasa, se repite este comportamiento hasta que todos están sentados otra vez.
   (a) Trace gráficas en varios tiempos diferentes, que muestren la forma en que la altura depende de la distancia a lo largo de la banca.
   (b) Trace gráficas de la localización de las manos levantadas como función del tiempo.
   (c) ¿Qué ritual en Estados Unidos se relaciona más con lo que usted ha observado?
9. La córnea es la superficie delantera del ojo. Los especialistas en córneas usan un SMT (sistema de modelación topográfico) para obtener un "mapa" de la curvatura de la superficie del ojo. Una computadora analiza la luz reflejada en el ojo y traza curvas de nivel que enlazan puntos de curvatura constante. Las regiones entre estas curvas se tiñen de colores diferentes.

   Las primeras dos imágenes de la figura 9.56 son secciones transversales de ojos con curvatura constante, siendo la menor de unas 38 unidades y la mayor de aproximadamente 50 unidades. En contraste, el tercer ojo tiene curvatura variable.
   (a) Describa verbalmente cómo se verá el mapa SMT de un ojo de curvatura constante.
   (b) Trace el mapa SMT de un ojo con la sección transversal de la figura 9.57. Suponga que el ojo es circular cuando se observa desde el frente, y la sección transversal es la misma en todas las direcciones. Ponga marcas numéricas razonables en sus curvas de nivel.

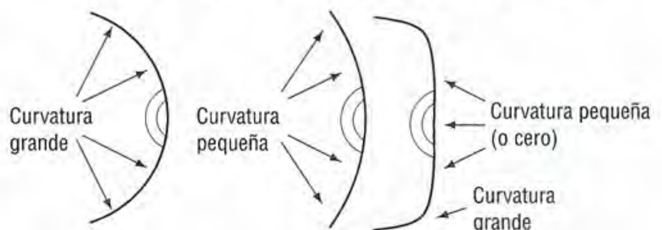


Figura 9.56. Imágenes de ojos con diferente curvatura.



Figura 9.57.

Para los problemas 10 al 15, encuentre las derivadas parciales indicadas. Suponga que las variables están restringidas a un dominio en el cual la función está definida.

10. f_x y f_y si $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$

11. P_a y P_b si $P = a^2 - 2ab^2$

12. $\dfrac{\partial Q}{\partial p_1}$ y $\dfrac{\partial Q}{\partial p_2}$ si $Q = 50p_1p_2 - p_2^2$

13. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ si $f = 5xe^{-2t}$

14. $\dfrac{\partial P}{\partial K}$ y $\dfrac{\partial P}{\partial L}$ si $P = 10K^{0.7}L^{0.3}$

15. f_x y f_y si $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Los problemas 16 al 20 se refieren a una cuerda de guitarra que está vibrando. Fotografías instantáneas de la cuerda en intervalos de milisegundos se muestran en la figura 9.58.

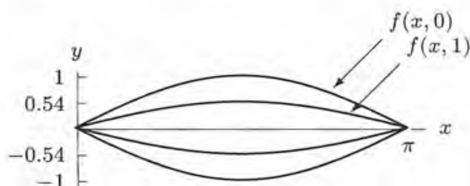


Figura 9.58. Una cuerda de guitarra vibrando: $f(x, t)$ cos t sen x para valores de t.

Considere que la cuerda de la guitarra está sumamente estirada a lo largo del eje desde $x = 0$ a $x = \pi$. Cada punto de la cuerda tiene una abscisa x. $0 \leq x \leq \pi$. Después de que ésta se ha pulsado, cada punto de la cuerda se mueve hacia un lado y otro del eje de las x. Sea $f(x, t)$ el desplazamiento al tiempo t del punto de la cuerda situado a x unidades del extremo izquierdo. Entonces

$$y = f(x, t) = \cos t \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \text{ en milisegundos.}$$

16. **(a)** Dibuje las gráficas de y respecto a x para valores fijos de t, $t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$.
(b) Use sus gráficas para explicar por qué esta función representaría una cuerda de guitarra vibrando.

17. Explique qué representan las funciones $f(x, 0)$ y $f(x, 1)$ en términos de la cuerda vibrando.

18. Explique qué representan las funciones $f(0, t)$ y $f(1, t)$ en términos de la cuerda vibrando.

19. Describa el movimiento de las cuerdas de la guitarra cuyos desplazamientos están dados por lo siguiente:

(a) $y = g(x, t) = \cos 2t \operatorname{sen} x$
(b) $y = h(x, t) = \cos t \operatorname{sen} 2x$

20. Use el diagrama de contorno para $f(x, t) = \cos t \operatorname{sen} x$ de la figura 9.59 para describir verbalmente las secciones transversales de f con t fijas y las secciones transversales de f con x fijas. Explique qué observa en términos del comportamiento de la cuerda.

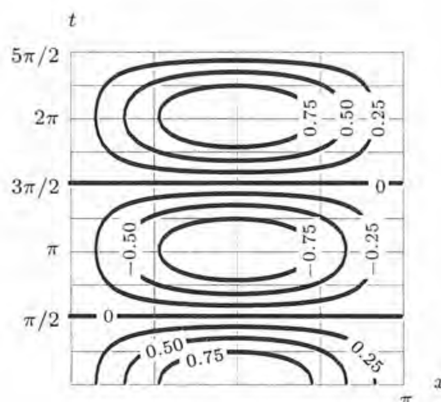


Figura 9.59.

21. La figura 9.60 muestra un diagrama de contorno para la temperatura T (en °C), a lo largo de una pared en una habitación como una función de la distancia x a lo largo de la pared y el tiempo t en minutos. Estime $\partial T/\partial x$ y $\partial T/\partial t$ en los puntos dados. Señale unidades e interprete sus respuestas.

(a) $x = 15, t = 20$ **(b)** $x = 5, t = 12$

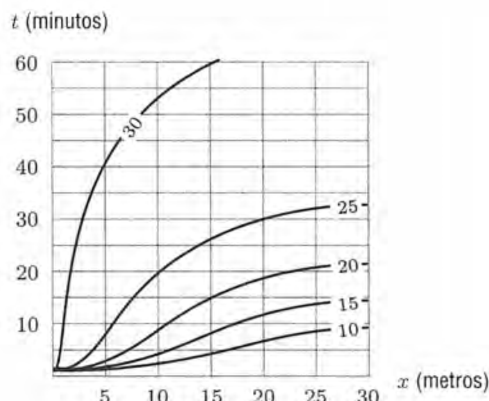


Figura 9.60.

22. La cantidad Q (en libras) de carne de res que compra cierta comunidad durante una semana es una función $Q = f(b, c)$ de los precios de la carne, b, y del pollo, c, durante la semana. ¿Espera que $\partial Q/\partial b$ sea positiva o negativa? ¿Y $\partial Q/\partial c$?

23. Suponga que el costo de producir una unidad de cierto producto se da con

$$c = a + bx + ky,$$

donde x es la cantidad de trabajo empleada (en horas-hombre) y y es la cantidad de materia prima empleada (por peso) y a, b y k son constantes. ¿Qué significa $\partial c/\partial x = b$? ¿Cuál es la interpretación práctica de b?

24. Las personas que viajan a una ciudad pueden elegir transportarse en autobús o en tren. El número de quienes escogen cualquiera de estos medios depende en parte del precio de cada uno de éstos. Sea $f(P_1, P_2)$ el número de personas que toman el autobús cuando P_1 es el precio de un viaje en autobús y P_2 es el precio de un viaje en tren. ¿Qué puede decir acerca de los signos de $\partial f/\partial P_1$ y $\partial f/\partial P_2$? Explique sus respuestas.

25. Una compañía de refrescos está interesada en ver cómo la demanda de su producto se ve afectada por los precios. La compañía cree que la cantidad, q, de su venta de refrescos depende de p_1, el precio promedio de los refrescos de la compañía, p_2, el precio promedio de los refrescos de la competencia, y p_3, la cantidad promedio de dinero que la compañía gasta en publicidad:

$$q = C - 8 \cdot 10^6 p_1 + 4 \cdot 10^6 p_2 + 2p_3.$$

(a) ¿Qué representa la constante C en términos de ventas de refrescos?

(b) Encuentre la demanda marginal de refrescos respecto a los cambios en p_1, p_2 y p_3. Explique por qué los signos y las magnitudes relativas de sus respuestas son razonables. [**Nota:** la demanda marginal es la razón de cambio de la cantidad demandada respecto al precio.]

26. Suponga que x es el precio de una marca de gasolina y y es el precio de una marca de la competencia. Entonces q_1, la cantidad de la primera marca vendida en un periodo de tiempo fijo, depende de x y de y, así que $q_1 = f(x, y)$. Análogamente, si q_2 es la cantidad de la segunda marca vendida durante el mismo periodo, $q_2 = g(x, y)$. ¿Cuáles espera que sean los signos de las siguientes cantidades? Explique.

(a) $\partial q_1/\partial x$ y $\partial q_2/\partial y$

(b) $\partial q_1/\partial y$ y $\partial q_2/\partial x$

27. En la década de 1940 se encontró que la cantidad, q, de cerveza que se vendía cada año en Inglaterra dependía de I (el ingreso personal agregado, ajustado para impuestos e inflación), p_1 (el precio promedio de la cerveza), y p_2 (el precio promedio de otros bienes y servicios). ¿Esperaría que $\partial q/\partial I$, $\partial q/\partial p_1$, $\partial q/\partial p_2$, sean positivas o negativas? Dé razones para sus respuestas.

28. Encuentre todos los puntos críticos de $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 10$.

29. Encuentre todos los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$. Construya una tabla de valores para determinar si cada punto crítico es un mínimo local, un máximo local, o ninguno de ellos.

30. La cantidad de un producto demandado por los consumidores es una función de su precio. La cantidad de un producto demandado también puede depender del precio de otros productos. Por ejemplo, la demanda de té se ve afectada por el precio del café; la demanda de automóviles se ve afectada por el precio de la gasolina. Supongamos que las cantidades demandadas, q_1 y q_2, de dos productos dependen de sus respectivos precios, p_1 y p_2, como sigue

$$q_1 = 150 - 2p_1 - p_2$$
$$q_2 = 200 - p_1 - 3p_2.$$

(a) ¿Qué nos indica el hecho de que los coeficientes de p_1 y p_2 sean negativos? Dé un ejemplo de dos productos que puedan estar relacionados de esta manera.

(b) Suponga que un fabricante vende ambos productos, ¿cómo debe el fabricante establecer precios para ganar el máximo ingreso posible? ¿Cuál es ese máximo ingreso posible?

31. Muestre que la función de Cobb-Douglas

$$Q = bK^{\alpha}L^{1-\alpha} \quad \text{donde } 0 < \alpha < 1$$

satisface la ecuación

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L} = Q.$$

32. El rendimiento cardiaco, representado por c, es el volumen de sangre que circula por el corazón de una persona en una unidad de tiempo. La resistencia vascular del sistema (RVS), representada por s, es la resistencia a la circulación sanguínea por venas y arterias. Sea p la presión sanguínea de una persona. Entonces p es una función de c y de s, $p = f(c, s)$.

(a) ¿Qué representa $\partial p/\partial c$?

Suponga ahora que $p = kcs$, donde k es una constante.

(b) Trace las curvas de nivel de p. ¿Qué representan? Marque sus ejes.

(c) Para una persona con un corazón débil, es aconsejable tener el corazón bombeando contra menor resistencia, al mismo tiempo que se mantiene la misma presión sanguínea. A esta persona se le puede suministrar nitroglicerina para reducir la RVS y dopamina para aumentar el rendimiento cardiaco. Represente esto en una gráfica mostrando curvas de nivel. Ponga un punto A en la gráfica, que represente el estado de la persona antes de que se le administren medicamentos y un punto B después de ello.

(d) Inmediatamente después de un ataque al corazón, baja el rendimiento cardiaco de un paciente, por lo que la presión sanguínea disminuye. Un error común que cometen médicos residentes es regresar la presión sanguínea del paciente a nivel normal con medicamentos para aumentar la RVS, en lugar de aumentar el rendimiento cardiaco. En una gráfica de las curvas de nivel de p, ponga un punto D que represente al paciente antes del ataque cardiaco, un punto E que represente al paciente justo después del ataque cardiaco y un tercer punto F que represente al paciente después de que el residente le haya administrado medicamentos para aumentar la RVS.

33. La función de producción de Cobb-Douglas para un producto es

$$P = 5L^{0.8}K^{0.2},$$

donde P es la cantidad producida, L es el tamaño de la fuerza laboral y K es la cantidad total de equipo. Cada unidad de trabajo cuesta \$300, cada unidad de equipo cuesta \$100 y el presupuesto total es de \$15,000.

(a) Haga una tabla de valores de L y K que agoten el presupuesto. Encuentre el nivel de producción, P, para cada par.

(b) Use el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar la forma óptima de gastar el presupuesto.

PROYECTOS

1. **Un calentador en una habitación**

La figura 9.61 muestra los contornos de la temperatura a lo largo de una pared de una habitación calentada en un día de invierno, con el tiempo indicado según un reloj de 24 horas. El cuarto tiene un calentador colocado en la esquina extrema izquierda de la pared y hay una ventana en la pared. El calentador se controla mediante un termostato que está a unos dos pies de la ventana.

(a) ¿En dónde está la ventana?
(b) ¿Cuándo está abierta la ventana?
(c) ¿Cuándo está encendido el calentador?
(d) Trace gráficas de la temperatura a lo largo de la pared del cuarto a las 6 a. m., a las 11 a. m., a las 3 p. m. (15 horas) y a las 5 p. m. (17 horas).
(e) Trace una gráfica de la temperatura como función del tiempo del lugar donde se encuentra el calentador, en la ventana y en la parte intermedia entre ambos.
(f) La temperatura en la ventana a las 5 p. m. (17 horas) es menor que a las 11 a. m., ¿por qué piensa que esto podría ser así?
(g) ¿A qué temperatura piensa que se ajusta el termostato? ¿Cómo lo sabe?
(h) ¿En dónde está el termostato?

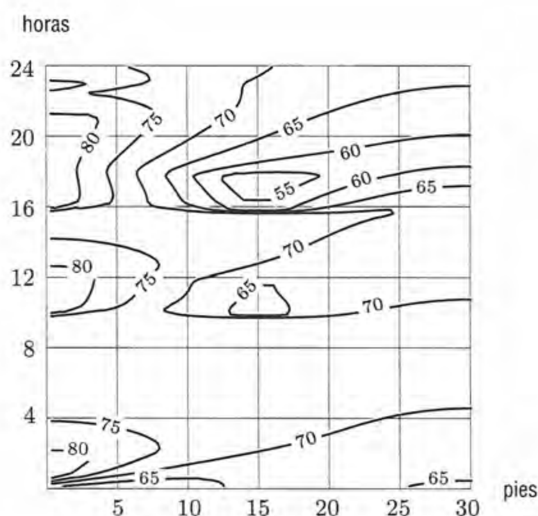


Figura 9.61.

2. **Optimización de precios relativos para adultos y niños**

Algunos artículos se venden con descuento para ancianos o para niños. La razón es que estos grupos pueden ser más sensibles a los precios, de modo que un descuento tendrá mayor impacto en sus decisiones de compra. El vendedor se enfrenta a un problema de optimización: ¿qué descuento debe ofrecer para maximizar sus utilidades? Suponga que un teatro puede vender q_c boletos para niños y q_a boletos para adultos a precios p_c y p_a, de acuerdo con las siguientes funciones de demanda:

$$q_c = r{p_c}^{-4} \quad \text{y} \quad q_a = s{p_a}^{-2},$$

y tiene costos de operación proporcionales al número total de boletos vendidos. ¿Cuál debe ser el precio relativo de boletos para niños y para adultos?

ENFOQUE TEÓRICO

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA PARA UNA RECTA DE REGRESIÓN

Suponga que queremos hallar la recta del "mejor ajuste" para algunos datos experimentales. En la sección Enfoque sobre modelado, que inicia en la página 75, usamos una computadora y una calculadora para hallar la fórmula para esta recta. En esta sección, deducimos esta fórmula.

Mediante el siguiente criterio, determinamos cuál recta ajusta mejor los datos. Los datos se trazan en el plano. La distancia desde una recta a los puntos de los datos se mide agregando los cuadrados de las distancias verticales desde cada punto a la recta. Cuanto más pequeña sea la suma de cuadrados, mejor se ajusta la recta a los datos. La recta con la mínima suma de cuadrados de las distancias se denomina *recta de mínimos cuadrados* o *recta de regresión*. Si los datos se aproximan a una línea recta, la recta de mínimos cuadrados será un buen ajuste; de lo contrario, puede ser que no lo sea (véase la figura 9.62).

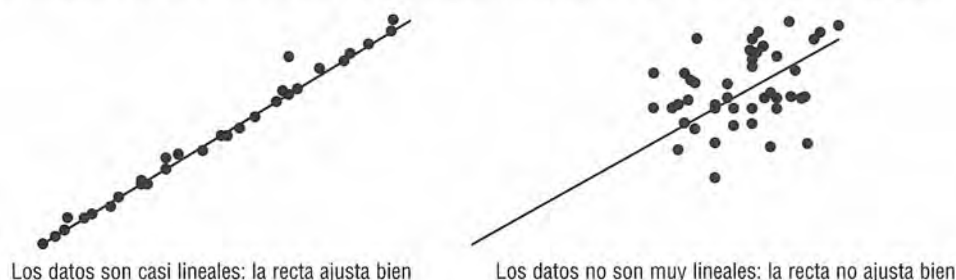


Figura 9.62. Rectas de ajuste a puntos de datos.

Ejemplo 1 Encuentre la recta de mínimos cuadrados para los siguientes puntos de información: (1, 1), (2, 1) y (3, 3).

Solución Supongamos que la recta tiene la ecuación $y = b + mx$. Si encontramos b y m entonces hemos encontrado la recta. Por tanto, para este problema, b y m son las dos variables. Queremos minimizar la función $f(b, m)$ que da la suma de los cuadrados de las tres distancias verticales de los puntos a la recta en la figura 9.63.

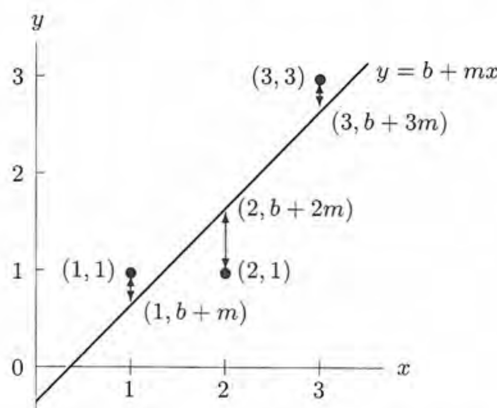


Figura 9.63. La recta de mínimos cuadrados minimiza la suma de los cuadrados de estas distancias verticales.

La distancia vertical desde el punto (1, 1) a la recta es la diferencia en las ordenadas $1 - (b + m)$; análogamente para los otros puntos. En consecuencia, la suma de los cuadrados es

$$f(b, m) = (1 - (b + m))^2 + (1 - (b + 2m))^2 + (3 - (b + 3m))^2.$$

Para minimizar f buscamos los puntos críticos. Primero derivamos f respecto a b:

$$\begin{aligned} f_b(b,m) &= -2(1-(b+m)) - 2(1-(b+2m)) - 2(3-(b+3m)) \\ &= -2+2b+2m-2+2b+4m-6+2b+6m \\ &= -10+6b+12m. \end{aligned}$$

Ahora derivamos respecto a m:

$$\begin{aligned} f_m(b,m) &= 2(1-(b+m))(-1) + 2(1-(b+2m))(-2) + 2(3-(b+3m))(-3) \\ &= -2+2b+2m-4+4b+8m-18+6b+18m \\ &= -24+12b+28m. \end{aligned}$$

Las ecuaciones $f_b = 0$ y $f_m = 0$ dan un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} -10+6b+12m &= 0, \\ -24+12b+28m &= 0. \end{aligned}$$

La solución a este par de ecuaciones es el punto crítico $b = -1/3$ y $m = 1$. Como

$$D = f_{bb}f_{mm} - (f_{mb})^2 = (6)(28) - 12^2 = 24 \quad \text{y} \quad f_{bb} = 6 > 0,$$

hemos encontrado un mínimo local. Este mínimo local también es el mínimo global de f. Por tanto, la recta de mínimos cuadrados es

$$y = x - \frac{1}{3}.$$

Como prueba, observe que la recta $y = x$ pasa por los puntos (1, 1) y (3, 3). Es razonable considerar que la introducción del punto (2, 1) baje la *ordenada en el origen* de 0 a $-1/3$.

Deducción de las fórmulas para la recta de regresión

Utilizamos el método del ejemplo 1 para deducir las fórmulas para la recta de mínimos cuadrados $y = b + mx$ generada por los puntos de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$. Observe que estamos buscando la pendiente y la ordenada en el origen, de modo que consideramos a m y b como las variables.

Para cada punto (x_i, y_i), el punto correspondiente directamente arriba o abajo de la recta tiene la ordenada, $b + mx_i$. Por tanto, el cuadrado de las distancias verticales desde el punto a la recta es $(y_i - (b + mx_i))^2$ (véase la figura 9.64).

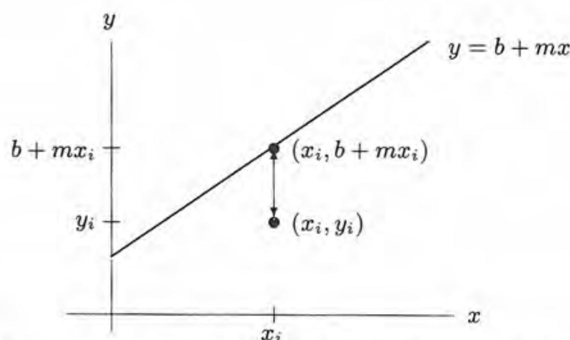


Figura 9.64. Distancia vertical desde un punto a la recta.

Encontramos la suma de las n distancias al cuadrado desde los puntos a la recta, y consideramos a la suma como una función de m y b:

$$f(b,m)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(b+mx_i))^2.$$

Para minimizar esta función, primero hallamos las dos derivadas parciales, f_b y f_m. Usamos la regla de la cadena y las propiedades de la suma.

$$\begin{aligned}
f_b(b,m)&=\frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-(b+mx_i))^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial b}(y_i-(b+mx_i))^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-(b+mx_i))\cdot\frac{\partial}{\partial b}(y_i-(b+mx_i))\\
&=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-(b+mx_i))\cdot(-1)\\
&=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(b+mx_i))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_m(b,m)&=\frac{\partial}{\partial m}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-(b+mx_i))^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial m}(y_i-(b+mx_i))^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-(b+mx_i))\cdot\frac{\partial}{\partial m}(y_i-(b+mx_i))\\
&=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-(b+mx_i))\cdot(-x_i)\\
&=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(b+mx_i))\cdot x_i
\end{aligned}$$

Ahora hacemos iguales a cero las derivadas parciales y despejamos m y b. Esto es más fácil de lo que parece: simplificamos la apariencia de las ecuaciones sustituyendo temporalmente otros símbolos para las sumas: escribimos SY por $\sum y_i$, SX por $\sum x_i$, SXY por $\sum y_i x_i$ y SXX por $\sum x_i^2$. Recuerde que x_i y y_i son constantes. Obtenemos un par de ecuaciones lineales simultáneas en m y en b; al resolver en m y b se obtienen fórmulas en términos de SX, SY, SXY y SXX. Separamos $f_b(b, m)$ en tres sumas como se muestra:

$$f_b(b,m)=-2\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-b\sum_{i=1}^{n}1-m\sum_{i=1}^{n}x_i\right).$$

Análogamente, podemos separar $f_m(b, m)$ después de multiplicar por x_i:

$$f_m(b,m)=-2\left(\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-b\sum_{i=1}^{n}x_i-m\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right).$$

Al escribir nuevamente la suma como se sugiere y haciendo que $\dfrac{\partial f}{\partial b}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial m}$ sean iguales a cero tenemos:

$$\begin{aligned}
0&=SY-bn-mSX\\
0&=SYX-bSX-mSXX
\end{aligned}$$

Resolviendo este par de ecuaciones simultáneas obtenemos el resultado:

$$\begin{aligned}
b&=((SXX)\cdot(SY)-(SX)\cdot(SYX))/(n(SXX)-(SX)^2)\\
m&=(n(SYX)-(SX)\cdot(SY))/(n(SXX)-(SX)^2)
\end{aligned}$$

Escribiendo estas expresiones con notación de sumatoria llegamos al siguiente resultado:

La recta de mínimos cuadrados para los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ es la recta $y = b + mx$ donde

$$b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i x_i\right) / \left(n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)$$

$$m = \left(n \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i\right) / \left(n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right).$$

Ejemplo 2 Utilice estas fórmulas para hallar la recta de mejor ajuste para el punto de datos (1, 5), (2, 4), (4, 3).

Solución Calculamos las sumas necesarias en las fórmulas:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$\sum_{i=1}^{3} y_i = 5 + 4 + 3 = 12$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$\sum_{i=1}^{3} y_i x_i = (5)(1) + (4)(2) + (3)(4) = 5 + 8 + 12 = 25$$

Como $n = 3$, tenemos:

$$\begin{aligned} b &= \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \sum_{i=1}^{3} y_i - \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{i=1}^{3} y_i x_i\right) / \left(3 \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2\right) \\ &= ((21)(12) - (7)(25)) / \left(3(21) - (7^2)\right) \\ &= 77/14 = 5.5 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m &= \left(3 \sum_{i=1}^{3} y_i x_i - \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{i=1}^{3} y_i\right) / \left(3 \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2\right) \\ &= (3(25) - (7)(12)) / \left(3(21) - (7^2)\right) \\ &= -9/14 = -0.64 \end{aligned}$$

La recta de mínimos cuadrados para estos tres puntos es

$$y = 5.5 - 0.64x.$$

Para comprobar esta ecuación, trace la recta y los puntos juntos.

Muchas calculadoras tienen integradas las fórmulas para la recta de mínimos cuadrados, de modo que cuando se marcan los datos aparecen en pantalla los valores b y m. Al mismo tiempo, se obtiene el *coeficiente de correlación*, que mide qué tan cerca ajustan estos datos a la recta de mínimos cuadrados.

Problemas de deducción de la fórmula para rectas de regresión

En los problemas 1 y 2 utilice el método del ejemplo 1 para hallar la recta de mínimos cuadrados para los puntos dados. Compruebe su trabajo trazando una gráfica de los puntos con la recta.

1. $(-1, 2), (0, -1), (1, 1)$ **2.** $(0, 2), (1, 4), (2, 5)$

Para los problemas 3 al 5 aplique las fórmulas para b y m para comprobar que se ha obtenido el mismo resultado que en el problema o ejemplo especificado.

3. $(-1, 2), (0, -1), (1, 1)$. Véase el problema 1.

4. $(0, 2), (1, 4), (2, 5)$. Véase el problema 2.

5. $(1, 1), (2, 1), (3, 3)$. Véase el ejemplo 1.

En los problemas 6 y 7 transformamos datos no lineales de modo que parezcan más lineales. Por ejemplo, suponga que espera que sus puntos (x, y) ajusten a una ecuación exponencial,

$$y = Ce^{ax},$$

donde a y C son constantes. Tomando el logaritmo natural en ambos lados, obtenemos

$$\ln y = ax + \ln C.$$

Entonces, $\ln y$ es una función lineal de x. Para hallar a y C, podemos usar mínimos cuadrados para la gráfica de $\ln y$ respecto a x.

6. La población de Estados Unidos era de unos 180 millones en 1960, creció a 206 millones en 1970 y a 226 millones en 1980.

(a) Si se supone que la población estuvo creciendo exponencialmente, utilice logaritmos y el método de mínimos cuadrados para estimar la población en 1990.

(b) De acuerdo con el censo nacional, la población de 1990 era de 249 millones. ¿Qué nos dice esto acerca de la suposición referente al crecimiento exponencial?

(c) Pronostique la población para el año 2010.

7. Una regla biológica práctica expresa que a medida que el área A de una isla aumenta diez veces, el número de especies animales, N, que viven en ella se duplica. La tabla contiene datos para la isla en las Indias Occidentales. Suponga que N es una función potencial de A.

(a) Utilice la regla biológica práctica para encontrar

(i) N como función de A.

(ii) $\ln N$ como función de $\ln A$.

(b) Usando los datos, tabule $\ln N$ respecto a $\ln A$ y encuentre la recta de mejor ajuste. ¿Su respuesta está de acuerdo con la regla biológica práctica?

Isla	Área (km^2)	Número de especies
Redonda	3	5
Saba	20	9
Montserrat	192	15
Puerto Rico	8,858	75
Jamaica	10,854	70
Española	75,571	130
Cuba	113,715	125

Capítulo 10

MODELADO MATEMÁTICO MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES

El *modelado matemático* significa utilizar las matemáticas para representar una situación. Podemos emplear las ecuaciones o fórmulas que constituyen al modelo para hacer pronósticos.

Un tipo particular de modelo es una *ecuación diferencial*. Si conocemos la razón de cambio, o la derivada, de una función desconocida, podemos usar esa información para escribir una ecuación que contenga la derivada. Esta ecuación se llama *ecuación diferencial*.

En este capítulo empleamos ecuaciones diferenciales para hacer un modelo de dinero en una cuenta bancaria, otro modelo para mostrar la contaminación en los Grandes Lagos, uno más para la cantidad de un medicamento en el cuerpo, y quizá otro para saber el valor neto de una compañía. Utilizamos sistemas de ecuaciones diferenciales para modelar la interacción de dos poblaciones (por ejemplo, dos especies o dos negocios), y la propagación de una enfermedad.

10.1 MODELADO MATEMÁTICO: PLANTEAMIENTO DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

A veces no conocemos una función clave, pero tenemos información acerca de su razón de cambio, o su derivada. Entonces podemos escribir un nuevo tipo de ecuación, llamada *ecuación diferencial*, a partir de la cual podemos obtener información sobre la función original. Por ejemplo, podemos utilizar lo que conocemos sobre la derivada de una función de determinada población (su razón de cambio) para pronosticar cuál será la población en el futuro.

En esta sección iniciaremos con una descripción que utilizaremos para escribir una ecuación diferencial.

Criaderos marinos

Comencemos por investigar el efecto de la pesca en un criadero de peces. Supongamos que, si les deja aislados, una población de peces aumenta a una razón continua de 20% al año. Supongamos también que los peces se pescan a una razón continua de 10 millones de peces por año. ¿Cómo cambia la población con el tiempo?

Advierta que tenemos información acerca de la razón de cambio, o de la derivada, de la población de peces. Combinada con la información acerca de la población inicial, podemos usar esto para pronosticar la población en el futuro. Sabemos que

$$\begin{array}{ccccc}\text{Razón de cambio de} & & \text{razón de aumento} & & \text{razón de los peces eliminados}\\ \text{la población de peces} & = & \text{debido a la cría} & - & \text{debido a la pesca}\end{array}$$

Suponga que la población de peces es P, en millones, y su derivada es dP/dt, donde t es el tiempo en años. Si tomamos esto por separado, la población de peces aumenta a una razón constante de 20% al año, de modo que tenemos

$$\begin{aligned}\text{Razón de aumento debido a la cría} &= 20\% \cdot \text{población actual}\\ &= 0.20P \text{ millones de peces/año.}\end{aligned}$$

Además,

$$\text{Razón de peces eliminados por la pesca} = 10 \text{ millones de peces/año.}$$

Como la razón de cambio de la población de peces es dP/dt, tenemos

$$\frac{dP}{dt} = 0.20P - 10.$$

Ésta es una ecuación diferencial que representa un modelo de cómo cambia la población de peces. La cantidad desconocida en la ecuación es la función que da P en términos de t.

Valor neto de una compañía

Una compañía obtiene ingresos y también hace pagos de nómina. Supongamos que obtiene el ingreso continuamente, que los pagos de nómina los realiza de la misma forma y que los únicos factores que afectan el valor neto son el ingreso y la nómina. El ingreso de la compañía se obtiene a una razón anual continua de 5% multiplicada por su valor neto. Al mismo tiempo, las obligaciones de nómina de la compañía se pagan a una razón constante de 200 millones de dólares al año. Empleamos esta información al escribir una ecuación para modelar el valor neto de la compañía, W, en millones de dólares, como función del tiempo, t, en años. Sabemos que

$$\begin{array}{ccccc}\text{Razón a la cual} & & \text{razón a la que} & & \text{razón a la que se realizan}\\ \text{cambia el valor neto} & = & \text{se gana el ingreso} & - & \text{los pagos de nómina}\end{array}$$

Como el ingreso de la compañía se obtiene a razón de 5% de su valor neto, tenemos

$$\text{Razón a la que se obtiene el ingreso} = 5\% \cdot \text{valor neto} = 0.05W \text{ millones de dólares/año.}$$

Como los pagos de nómina se realizan a una razón de 200 millones de dólares al año, tenemos

$$\text{Razón a la que se realizan los pagos} = 200 \text{ millones de dólares/año.}$$

Ponemos ambos datos juntos, tomando en cuenta que la razón a la cual cambia el valor neto es dW/dt y tenemos

$$\frac{dW}{dt} = 0.05W - 200.$$

Ésta es una ecuación diferencial que modela cómo cambia el valor neto de la compañía. La cantidad desconocida en la ecuación es la función que da el valor neto, W, como función del tiempo, t.

Contaminación en un lago

Si entra agua limpia a un lago contaminado y una corriente saca agua, el nivel de contaminación en el lago disminuirá (suponiendo que no se agreguen nuevos contaminantes).

Ejemplo 1 La cantidad del contaminante en el lago disminuye a una razón proporcional a la cantidad presente. Escriba una ecuación diferencial para modelar la cantidad de contaminante en el lago. ¿La constante de proporcionalidad es positiva o negativa? Utilice la ecuación diferencial para explicar por qué la gráfica de la cantidad de contaminante respecto al tiempo es decreciente y cóncava hacia arriba, como se muestra en la figura 10.1.

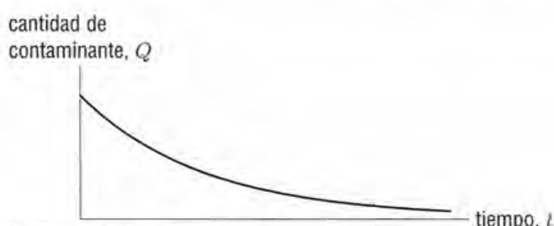


Figura 10.1. Cantidad de contaminante en un lago.

Solución Q denota la cantidad total de contaminante que está presente en el lago en el tiempo t. La razón de cambio de Q es proporcional a Q, por lo que dQ/dt es proporcional a Q. Por tanto, la ecuación diferencial es

$$\frac{dQ}{dt} = kQ.$$

Como no se arrojaron más contaminantes al lago, la cantidad Q disminuye a lo largo del tiempo, de ahí que dQ/dt sea negativa. Por tanto, la constante de proporcionalidad k es negativa.

¿Por qué la ecuación diferencial $dQ/dt = kQ$, con k negativa, indica que Q tiene una gráfica como la que se muestra en la figura 10.1? Debido a que k es negativa y Q es positiva, sabemos que kQ es negativa. Entonces, dQ/dt es negativa, por tanto, la gráfica de Q respecto a t es decreciente, como se muestra en la figura 10.1. ¿Por qué es cóncava hacia arriba? Como Q cada vez es menor y k es fija, a medida que t aumenta, el producto kQ es cada vez más pequeño en magnitud, de ahí que la derivada dQ/dt cada vez sea menor en magnitud. Por tanto, la gráfica de Q es más horizontal conforme t aumenta. Entonces, la gráfica es cóncava hacia arriba. Véase la figura 10.1.

La cantidad de un medicamento en el cuerpo

En el ejemplo anterior, la razón a la que los contaminantes son eliminados del lago es proporcional a la cantidad de los contaminantes en el lago. Este modelo es válido para cualesquier contaminantes que entren o salgan de un sistema hidráulico con mezcla completa. Otro ejemplo es la cantidad de un medicamento en el cuerpo de un paciente.

Ejemplo 2 Suponga que a un paciente se le practicó una cirugía muy delicada y el médico le suministra vancomicina (antibiótico) por vía intravenosa, a razón de 85 mg por hora. El medicamento se elimina a una razón proporcional a la cantidad presente con una constante de proporcionalidad 0.1 si el tiempo se mide en horas. Escriba una ecuación diferencial para la cantidad Q, en mg, de vancomicina en el cuerpo después de t horas.

Solución La cantidad de vancomicina, Q, aumenta a una razón constante de 85 mg/hora y disminuye a razón de 0.1 por Q. La administración de 85 mg/hora contribuye positivamente a la razón de cambio dQ/dt. La eliminación del medicamento a razón de $0.1Q$ contribuye negativamente a dQ/dt. Si unimos ambos datos tenemos

$$\text{Razón de cambio de una cantidad} = \text{Razón de entrada} - \text{Razón de salida},$$

por tanto,

$$\frac{dQ}{dt} = 85 - 0.1Q.$$

El modelo logístico

Una población en un espacio confinado crece en forma proporcional al producto de la población actual, P, y a la diferencia entre la *capacidad de carga*, L, y la población actual. (La capacidad de carga es la población máxima que el medio ambiente puede sostener.) Utilizamos esta información para escribir una ecuación diferencial para la población P.

La razón de cambio de P es proporcional al producto de P y $L - P$, por tanto,

$$\frac{dP}{dt} = kP(L - P), \qquad \text{donde } k \text{ es la constante de proporcionalidad.}$$

A ésta se le denomina *ecuación diferencial logística*. ¿Qué le dice sobre la gráfica de P? La derivada dP/dt es el producto de k y P y $L - P$, así que cuando P es pequeña, la derivada dP/dt es pequeña y la población crece lentamente. A medida que P aumenta, la derivada dP/dt se incrementa y la población crece más rápidamente. Sin embargo, conforme P se aproxima a la capacidad de carga, L, el término $L - P$ es pequeño, y de nuevo, dP/dt es también pequeña y la población crece más lentamente. La *curva de crecimiento logístico*, en la figura 10.2, satisface estas condiciones.

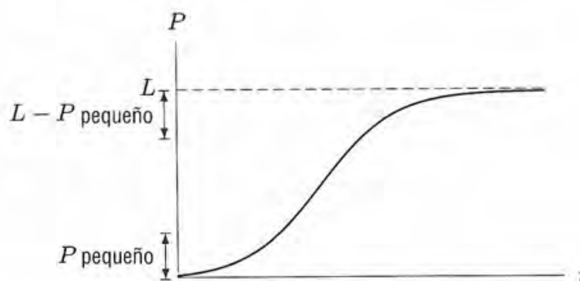


Figura 10.2. La curva de crecimiento logístico es una solución de $dP/dt = kP(L - P)$.

Problemas para la sección 10.1

1. Relacione las gráficas de la figura 10.3 con las siguientes descripciones.

(a) La población de una nueva especie que llega a una isla tropical.

(b) La temperatura de una barra de metal que se pone a calentar en un horno y después se retira de éste.

(c) La rapidez de un automóvil que viaja de manera uniforme y luego frena también uniformemente.

(d) La masa de carbono 14 en un fósil.

(e) La concentración de polen de un árbol en el aire durante un año.

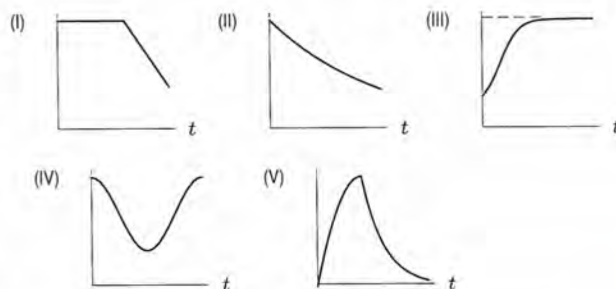


Figura 10.3.

2. Una cuenta bancaria gana interés a una razón continua de 5% del saldo corriente por año. Escriba la ecuación diferencial para el saldo, B, de la cuenta como función del tiempo, t, en años.
3. Una población de insectos crece a una razón proporcional al tamaño de la población. Escriba una ecuación diferencial para el tamaño de la población, P, como función del tiempo, t. ¿La constante de proporcionalidad es positiva o negativa? Explique su razonamiento.
4. Las sustancias radiactivas se desintegran a razón proporcional de la cantidad actual. Escriba una ecuación diferencial para la cantidad, Q, de una sustancia radiactiva presente en el tiempo t. ¿La constante de proporcionalidad es positiva o negativa? Explique su razonamiento.
5. Una taza de café contiene aproximadamente 100 mg de cafeína. El cuerpo metaboliza y elimina la cafeína a una razón continua de aproximadamente 17% por hora.
   (a) Escriba una ecuación diferencial para la cantidad, A, de cafeína en el cuerpo como función del número de horas, t, desde la ingesta de café.
   (b) Utilice la ecuación diferencial para encontrar dA/dt al inicio de la primera hora (justo después de la ingesta). Use su respuesta para evaluar el cambio en la cantidad de cafeína durante la primera hora.
6. El cuerpo metaboliza y elimina el alcohol a una razón de una onza por hora. Supongamos que una persona ingiere algo de alcohol; escriba una ecuación diferencial para la cantidad de alcohol, A (en onzas), que permanece en el cuerpo como función de t, el número de horas después de que dicha persona consumió alcohol.
7. Una cuenta bancaria que inicialmente tiene \$25,000 gana intereses a razón continua de 4% al año. Se hacen retiros de la cuenta a una razón constante de \$2,000 al año. Escriba la ecuación diferencial para el saldo, B, de la cuenta como función del número de años, t.
8. Supongamos que se administra morfina a una paciente por vía intravenosa, a razón de 2.5 mg por hora. Aproximadamente, el cuerpo de un paciente metaboliza y elimina la morfina a razón de 34.7% cada hora. Escriba una ecuación diferencial para la cantidad de morfina, M, en mg, en el cuerpo de la paciente, como función del tiempo, t, en horas.
9. Las toxinas que se hallan en los pesticidas pueden entrar en la cadena alimenticia y acumularse en el cuerpo. Suponga que una persona consume 10 microgramos al día de una toxina, que es ingerida a lo largo del día. La toxina se elimina del cuerpo a una razón continua de 3% cada día. Escriba una ecuación diferencial de la cantidad de toxina, A, en microgramos, en el cuerpo de una persona como función del número de días, t.
10. Una persona deposita dinero en una cuenta a una razón continua de \$6,000 al año y la cuenta gana intereses a una razón continua de 7% al año.
    (a) Escriba una ecuación diferencial para el saldo de la cuenta, B, en dólares, como función de años, t.
    (b) Utilice la ecuación diferencial para calcular dB/dt, si $B = 10{,}000$ y si $B = 100{,}000$. Explique sus respuestas.
11. Un contaminante que se derrama en el suelo se desintegra a razón de 8% al año. Además, el personal de limpieza utiliza un aerosol en espuma que absorbe el contaminante. El aerosol reduce el contaminante a razón de 30 galones al día. Escriba una ecuación diferencial para la cantidad de contaminante, P, en galones, que quedan después de t días.
12. Una cantidad W satisface la ecuación diferencial
$$\frac{dW}{dt} = 5W - 20.$$
    (a) ¿W es creciente o decreciente en $W = 10$? ¿Y en $W = 2$?
    (b) ¿En qué valores de W la razón de cambio de W es igual a cero?
13. Una cantidad y satisface la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dt} = -0.5y.$$
¿En qué condiciones y es creciente? ¿En cuáles es decreciente?

En los problemas del 14 al 18, utilice el hecho de que la derivada da la pendiente de una curva para decir cuál de las gráficas (A)−(F), de la figura 10.4, es una posible curva solución de la ecuación diferencial.

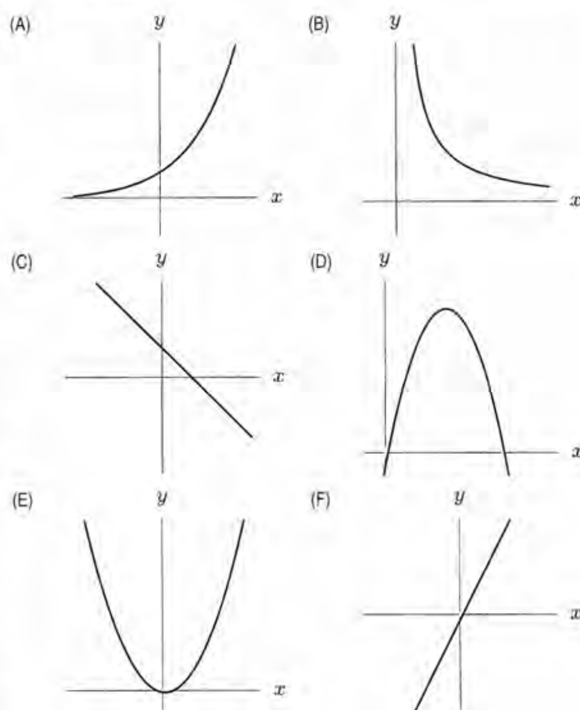


Figura 10.4.

14. $\frac{dy}{dx} = -1$ 15. $\frac{dy}{dx} = -y^2$ 16. $\frac{dy}{dx} = 2x$
17. $\frac{dy}{dx} = 2$ 18. $\frac{dy}{dx} = y$

10.2 SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

¿Qué significa resolver una ecuación diferencial? Una ecuación diferencial es una ecuación que implica la derivada de una función desconocida. La incógnita no es un número sino una función. Una *solución* de una ecuación diferencial es cualquier función que satisface la ecuación diferencial.

En esta sección analizaremos cómo resolver una ecuación diferencial numéricamente y como comprobar si una función es o no una solución a una ecuación diferencial. En la siguiente sección examinaremos cómo visualizar una solución.

Otra perspectiva de la captura marina

Consideremos nuevamente la población de peces que analizamos en la sección 10.1. Si se les deja solos, la población de peces aumenta a razón continua de 20% al año. Los peces se pescan a una razón constante de 10 millones de peces por año. Si P es la población de peces, en millones, en el año t, entonces tenemos

$$\frac{dP}{dt} = 0.20P - 10.$$

Resolver esta ecuación diferencial significa encontrar una función que dé P en términos de t. Si combinamos esto con la información acerca de la población inicial, podemos utilizar la ecuación para pronosticar la población para cualquier tiempo en el futuro.

Solución numérica de la ecuación diferencial

Supongamos que al tiempo $t = 0$ la población de peces es de 60 millones. Podemos sustituir $P = 60$ en la ecuación diferencial para calcular la derivada, dP/dt:

$$\text{Al tiempo } t = 0 \qquad \frac{dP}{dt} = 0.20P - 10 = 0.20(60) - 10 = 12 - 10 = 2.$$

Como para $t = 0$, está cambiando la población de peces a razón de 2 millones de peces por año, al final del primer año la población de peces habrá aumentado en aproximadamente 2 millones de peces. Entonces:

$$\text{En } t = 1, \qquad \text{estimamos} \qquad P = 60 + 2 = 62.$$

Empleamos este nuevo valor de P para calcular dP/dt durante el segundo año:

$$\text{Al tiempo } t = 1, \qquad \frac{dP}{dt} = 0.20P - 10 = 12.4 - 10 = 2.4.$$

Durante el segundo año la población de peces aumentó en aproximadamente 2.4 millones de peces, por tanto:

$$\text{En } t = 2, \qquad \text{se evalúa} \qquad P = 62 + 2.4 = 64.4.$$

Utilizamos este valor de P para evaluar la razón de cambio durante el tercer año, y así sucesivamente. Al continuar de esta manera, calculemos los valores aproximados de P en la tabla 10.1. Esta tabla indica los valores numéricos aproximados de P en tiempos futuros.

Tabla 10.1 *Valores aproximados de la población de peces, como función del tiempo*

t (años)	0	1	2	3	4	5	...
P (millones)	60	62	64.4	67.28	70.74	74.89	...

Una fórmula para la solución de la ecuación diferencial

Una función $P = f(t)$ que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0.20P - 10$$

se denomina *solución* de la ecuación diferencial. La tabla 10.1 muestra los valores numéricos aproximados

de una solución. A veces, pero no siempre, es posible hallar una fórmula para la solución. En este caso en particular hay una fórmula:

$$P = 50 + Ce^{0.20t}$$

donde C es cualquier constante. Comprobamos que ésta sea una solución de la ecuación diferencial al sustituirla por separado en los lados izquierdo y derecho de la ecuación diferencial. Encontramos

$$\begin{aligned}\text{Lado izquierdo} &= \frac{dP}{dt} = 0.20Ce^{0.20t}\\ \text{Lado derecho} = 0.20P - 10 &= 0.20(50 + Ce^{0.20t}) - 10\\ &= 10 + 0.20Ce^{0.20t} - 10\\ &= 0.20Ce^{0.20t}.\end{aligned}$$

Como obtenemos la misma expresión en ambos lados, decimos que $P = 50 + Ce^{0.20t}$ es una solución de esta ecuación diferencial. Cualquier selección de C funcionará, así que las soluciones forman una familia de funciones con un parámetro C. En la figura 10.5 se grafican varios miembros de la familia de soluciones.

Búsqueda de la constante arbitraria: condiciones iniciales

Para hallar un valor de la constante C (en otras palabras, para seleccionar una sola solución de la familia de soluciones) necesitamos una pieza adicional de información, por lo general, la población inicial. En este caso, sabemos que $P = 60$ cuando $t = 0$, por tanto, al sustituir en

$$P = 50 + Ce^{0.20t}$$

resulta

$$\begin{aligned}60 &= 50 + Ce^{0.20(0)}\\ 60 &= 50 + C \cdot 1\\ C &= 10.\end{aligned}$$

La función $P = 50 + Ce^{0.20t}$ satisface la ecuación diferencial *y* la condicional inicial de que $P = 60$ cuando $t = 0$.

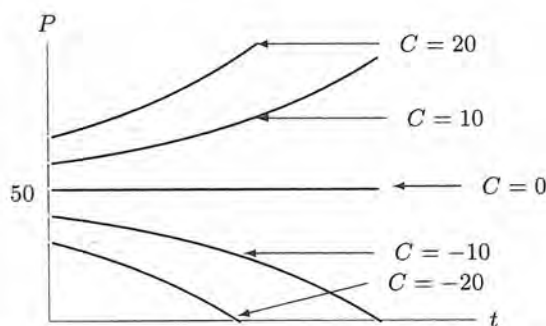


Figura 10.5. Curvas solución para $dP/dt = 0.20P - 10$: miembros de la familia $P = 50 + Ce^{0.20t}$.

Soluciones generales y soluciones particulares

Para la ecuación diferencial $dP/dt = 0.20P - 10$, se puede demostrar que cada solución es de la forma $P = 50 + Ce^{0.20t}$ para algún valor de C. Decimos que la *solución general* de la ecuación diferencial $dP/dt = 0.20P - 10$ es la familia de funciones $P = 50 + Ce^{0.20t}$. La solución $P = 50 + 10e^{0.20t}$ que satisface la ecuación diferencial junto con la condición inicial, de que $P = 60$ cuando $t = 0$, se denomina *solución particular*. La ecuación diferencial y la condición inicial juntas se llama *problema de valor inicial*.

Ejemplo 1 **(a)** Compruebe que $P = Ce^{2t}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 2P.$$

(b) Encuentre la solución particular que satisfaga la condición inicial $P = 100$ cuando $t = 0$.

Solución **(a)** Como $P = Ce^{2t}$ donde C es una constante, hallamos las expresiones de cada lado:

$$\text{Lado izquierdo} = \frac{dP}{dt} = Ce^{2t} \cdot 2 = 2\,Ce^{2t}$$

$$\text{Lado derecho} = 2P = 2\,Ce^{2t}.$$

Como las dos expresiones son iguales, $P = Ce^{2t}$ es una solución de la ecuación diferencial.

(b) Sustituimos $P = 100$ y $t = 0$ en la solución general $P = Ce^{2t}$ y despejamos C:

$$\begin{aligned} 100 &= Ce^{2(0)} \\ 100 &= C \cdot 1 \\ 100 &= C. \end{aligned}$$

La solución particular de este problema de valor inicial es $P = 100e^{2t}$.

Ejemplo 2 Determine si $y = e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' - 2y = 0$.

Solución Observe que $y' = dy/dx$. Al derivar a $y = e^{-2x}$ obtenemos $y' = -2e^{-2x}$. Si sustituimos, tenemos

$$y' - 2y = -2e^{-2x} - 2e^{-2x} = 4e^{-2x} \neq 0,$$

y por tanto, $y = e^{-2x}$ no es una solución de esta ecuación diferencial.

Ejemplo 3 **(a)** ¿Qué condiciones deben imponerse a las constantes C y k si $y = Ce^{kt}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -0.5y?$$

(b) ¿Qué condiciones adicionales deben imponerse a C y k si $y = Ce^{kt}$ también satisface la condición inicial que $y = 10$ cuando $t = 10$?

Solución **(a)** Si $y = Ce^{kt}$, entonces $dy/dt = Cke^{kt}$. Sustituyendo en la ecuación $dy/dt = -0.5y$ obtenemos

$$Cke^{kt} = -0.5(Cke^{kt}),$$

entonces, suponiendo que $C \neq 0$, luego $Ce^{kt} \neq 0$, tenemos

$$k = -0.5.$$

Por tanto, $y = Ce^{-0.5t}$ es una solución de la ecuación diferencial. Si $C = 0$, entonces $Ce^{kt} = 0$ es una solución de la ecuación diferencial. No imponemos condición alguna en C.

Debido a que $k = -0.5$, tenemos que $y = Ce^{-0.5t}$. Al sustituir $y = 10$ cuando $t = 10$ obtenemos

$$10 = Ce^{0}$$

por lo que

$$10 = C.$$

Entonces, $y = 10e^{-0.5t}$ es una solución de la ecuación diferencial junto con la condición inicial.

Problemas para la sección 10.2

1. Compruebe que $y = t^4$ es una solución de la ecuación diferencial $t\,\frac{dy}{dt} = 4y$

2. ¿$y = x^3$ es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 3y = 0$? Justifique su respuesta.

3. Determine si cada una de las siguientes funciones es o no una solución de la ecuación diferencial $xy' - 2y = 0$.

(a) $y = x^2$ **(b)** $y = x^3$

4. Si la población inicial de peces es de 70 millones, utilice la ecuación diferencial $dP/dt = 0.2P - 10$ para calcular la población de peces después de uno, dos y tres años.

5. Complete la tabla 10.2, dado que $dy/dt = 0.5y$. Suponga que la razón de crecimiento, dada por dy/dt, es aproximadamente constante en cada intervalo unitario de tiempo.

Tabla 10.2

t	0	1	2	3	4
y	8				

6. Complete la tabla 10.3 dado que $dy/dt = 0.5t$. Suponga que la razón de crecimiento, dada por dy/dt, es aproximadamente constante en cada intervalo unitario de tiempo.

Tabla 10.3

t	0	1	2	3	4
y	8				

7. Para cierta cantidad y, suponga que $dy/dt = -0.20y$. Complete los valores de y en la tabla 10.4. Suponga que la razón de crecimiento dada por dy/dt es aproximadamente constante en cada intervalo unitario de tiempo.

Tabla 10.4

t	0	1	2	3	4
y	125				

8. Complete la tabla 10.5 dado que $dy/dt = 4 - y$. Suponga que la razón de crecimiento, dada por dy/dt, es aproximadamente constante en cada intervalo unitario de tiempo.

Tabla 10.5

t	0	1	2	3	4
y	8				

9. Relacione las gráficas de la figura 10.6 con las siguientes descripciones.

(a) La temperatura de un vaso de agua helada dejado en la mesa de la cocina.

(b) La cantidad de dinero de una cuenta bancaria que gana intereses, en la cual se depositaron $50.

(c) La rapidez de un automóvil que desacelera constantemente.

(d) La temperatura de un trozo de acero calentado en un horno y luego dejado fuera para que se enfríe.

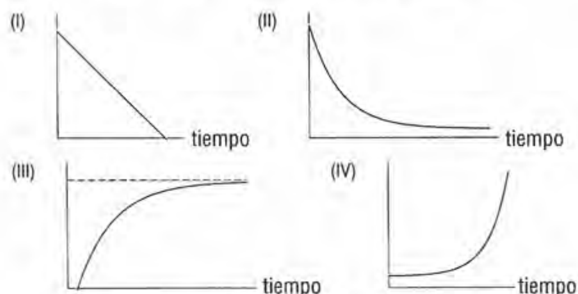


Figura 10.6.

10. Las gráficas de la figura 10.7 representan la temperatura, H(ºC), de cuatro huevos como función del tiempo, t, en minutos. Relacione tres de las gráficas con las descripciones siguientes. Escriba una descripción similar para la cuarta gráfica, incluyendo una interpretación de cualquier intersección con los ejes y las asíntotas.

(a) Se saca un huevo del refrigerador (a una temperatura un poco arriba de 0 ºC) y se introduce en agua hirviendo.

(b) Veinte minutos después que el huevo del inciso (a) se sacó del refrigerador y se introdujo en agua hirviendo se hace lo mismo con otro huevo.

(c) Se saca un huevo del refrigerador al mismo tiempo que el huevo del inciso (a) y se deja en la mesa de la cocina.

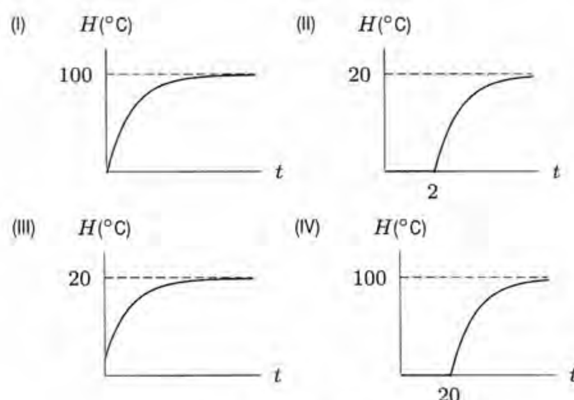


Figura 10.7.

11. Demuestre que, para cualquier constante P_0, la función $P = P_0e^t$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = P.$$

12. Suponga que $Q = Ce^{kt}$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = -0.03Q.$$

¿Qué indica esto (si es que indica algo) acerca de los valores de C y k?

13. Encuentre los valores de k para los cuales $y = x^2 + k$ es una solución de la ecuación diferencial $2y - xy' = 10$.

14. ¿Hay un valor de n que haga que $y = x^n$ sea una solución de la ecuación $13x(dy/dx) = y$? Si es así, ¿qué valor?

15. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dt} = 2t.$$

16. Elija qué funciones son soluciones de qué ecuaciones diferenciales. (**Nota**: las funciones pueden ser soluciones de más de una ecuación, o de ninguna; una ecuación puede tener más de una solución.)

(a) $\frac{dy}{dx} = -2y$ **(I)** $y = 2\operatorname{sen} x$

(b) $\frac{dy}{dx} = 2y$ **(II)** $y = \operatorname{sen} 2x$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$ **(III)** $y = e^{2x}$

(d) $\frac{d^2y}{dx^2} = -4y$ **(IV)** $y = e^{-2x}$

17. Relacione las soluciones y ecuaciones diferenciales. (**Nota**: cada ecuación puede tener más de una solución, o ninguna.)

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ **(I)** $y = x^3$

(b) $\frac{dy}{dx} = 3\frac{y}{x}$ **(II)** $y = 3x$

(c) $\frac{dy}{dx} = 3x$ **(III)** $y = e^{3x}$

(d) $\frac{dy}{dx} = y$ **(IV)** $y = 3e^{x}$

(e) $\frac{dy}{dx} = 3y$ **(V)** $y = x$

10.3 CAMPOS DE DIRECCIONES

En esta sección veremos la forma de visualizar una ecuación diferencial y sus soluciones. Comencemos con la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Cualquier solución de esta ecuación diferencial tiene la propiedad de que, en cualquier punto del plano, la pendiente de su gráfica es igual a su ordenada y. (¡Eso es lo que indica la ecuación $dy/dx = y$!) Esto significa que si la solución pasa por el punto (0, 1), su pendiente ahí es 1; si pasa por un punto con $y = 4$, su pendiente es 4. Una solución que pasa por el punto (0, 2) tiene una pendiente de 2 ahí; en el punto donde $y = 8$, la pendiente de su solución es 8 (véase la figura 10.8).

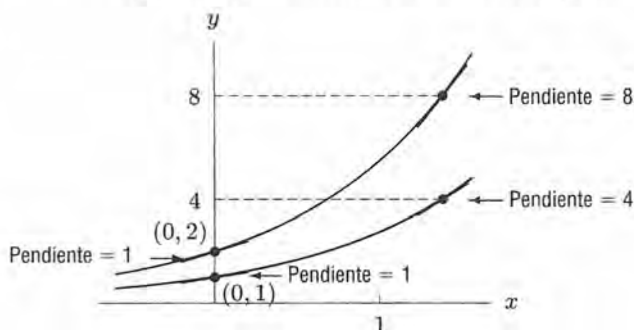


Figura 10.8. Soluciones de $\frac{dy}{dx} = 2x$.

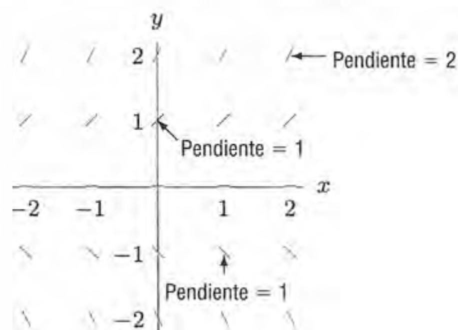


Figura 10.9. Visualización de la pendiente de y, si $\frac{dy}{dx} = 2x$.

En la figura 10.9 se traza un pequeño segmento de recta en los puntos marcados mostrando la pendiente de la curva solución ahí. Como $dy/dx = y$, la pendiente en el punto (1, 2) es 2 (la ordenada y) y, por tanto, trazamos un segmento de recta ahí con pendiente 2. Trazamos un segmento de recta en el punto (0, −1) con pendiente −1, y así sucesivamente. Si trazamos muchos de estos segmentos de recta, tenemos el *campo de direcciones (campo direccional o campo de pendientes)* para la ecuación $dy/dx = y$, que se muestra en la figura 10.10. Arriba del eje x, las pendientes son positivas (porque y es positiva ahí) y las pendientes aumentan a medida que nos movemos hacia arriba (a medida que y aumenta). Abajo del eje x, las pendientes son negativas y se vuelven cada vez más negativas (tienen signo negativo, pero su magnitud aumenta) a medida que nos movemos hacia abajo. Observe que en cualquier línea horizontal (donde y es constante) las pendientes son constantes. En el campo de direcciones se puede apreciar casi escondida (a modo de "fantasma") la curva solución. Comience usted sobre el plano y muévase de modo que los elementos del campo de direcciones sean tangentes a su trayectoria; trazará una de las curvas solución. Trate de seguir con el lápiz algunas curvas solución en la figura 10.10; unas arriba del eje x y otras debajo de éste. Las curvas que usted trace deben tener la forma de funciones exponenciales. Si sustituye $y = Ce^x$ en la ecuación diferencial, podrá comprobar que cada curva en la familia de las exponenciales, $y = Ce^x$, es una solución a esta ecuación diferencial.

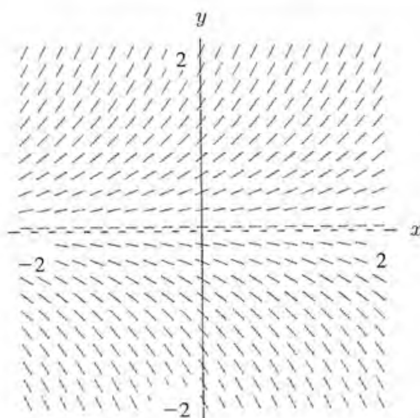


Figura 10.10. Campo de direcciones para $\frac{dy}{dx} = 2x$.

En la mayoría de los problemas, estamos interesados en obtener las curvas solución a partir del campo direccional (o campo de direcciones). Considere al campo direccional como un conjunto de postes indicadores que apuntan en la dirección en que usted debe ir en cada punto. Imagine que comienza en cualquier punto del plano; ahora observe el campo direccional en ese punto y comience a moverse en esa dirección. Tras un paso corto, vea nuevamente el campo direccional y si es necesario cambie su dirección. Siga moviéndose por el plano en la dirección que apunta el campo direccional y trazará una curva solución. Advierta que la curva solución no necesariamente es la gráfica de una función, e incluso si lo es puede que no tengamos una fórmula para la función. En términos geométricos, resolver una ecuación diferencial significa hallar la familia de curvas solución.

Ejemplo 1 La figura 10.11 muestra el campo direccional de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$.

(a) ¿Qué observa usted con respecto al campo direccional?

(b) Compare las curvas solución trazadas sobre la figura 10.12 con la fórmula $y = x^2 + C$ para las soluciones de esta ecuación diferencial.

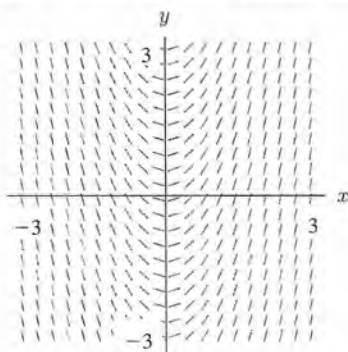


Figura 10.11. Campo direccional para $\frac{dy}{dx} = 2x$.

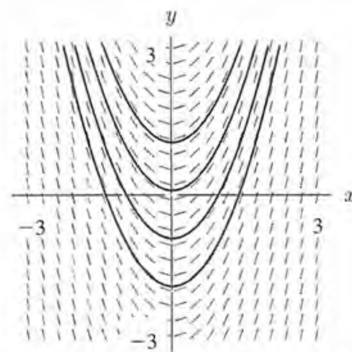


Figura 10.12. Algunas soluciones para $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Solución **(a)** En la figura 10.11 observe que sobre una recta vertical (donde x es constante) todas las pendientes son iguales. Esto se debe a que en esta ecuación diferencial dy/dx depende solamente de x. En el ejemplo anterior, $dy/dx = y$, las pendientes dependían sólo de y.

(b) Las curvas solución de la figura 10.12 semejan parábolas. Es fácil comprobar por sustitución que

$$y = x^2 + C \text{ es una solución a } \frac{dy}{dx} = 2x,$$

de modo que las parábolas $y = x^2 + C$ son curvas solución.

Veamos un ejemplo en el cual no tenemos una fórmula para la solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo 2 Utilizando el campo direccional, determine intuitivamente la ecuación de las curvas solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Solución El campo direccional se muestra en la figura 10.13. Observe que en el eje y, donde $x = 0$, la pendiente es 0. Sobre el eje x, donde y es 0, los segmentos de recta son verticales y la pendiente no está definida. En el origen, la pendiente no está definida y no hay segmento de recta.

¿Qué aspecto tienen las curvas solución de esta ecuación diferencial? El campo direccional indica que son círculos centrados en el origen. Pensamos que la solución general de esta ecuación diferencial es

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Se puede demostrar que ésta es, en realidad, la solución general de la ecuación diferencial.

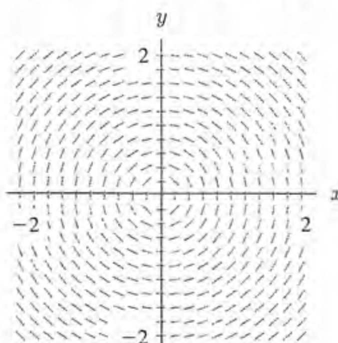


Figura 10.13. Campo direccional para $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

El ejemplo anterior muestra que, a veces, las soluciones de las ecuaciones diferenciales se pueden expresar algunas veces como funciones implícitas. Las funciones implícitas son aquellas donde no se ha "despejado" y, es decir, la variable dependiente no está expresada como una función explícita de x.

Ejemplo 3 En la figura 10.14 se muestran los campos direccionales para $\frac{dy}{dt} = 2 - y$ y $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}$.

(a) ¿Cuál campo direccional corresponde a cada ecuación diferencial?

(b) Trace curvas solución sobre cada campo direccional con las condiciones iniciales
(i) $y = 1$ cuando $t = 0$ **(ii)** $y = 3$ cuando $t = 0$ **(iii)** $y = 0$ cuando $t = 1$

(c) Para cada curva solución, ¿qué puede usted decir acerca del comportamiento de y a largo plazo (para valores grandes de t)? En particular, a medida que $t \to \infty$, ¿qué le ocurre al valor de y?

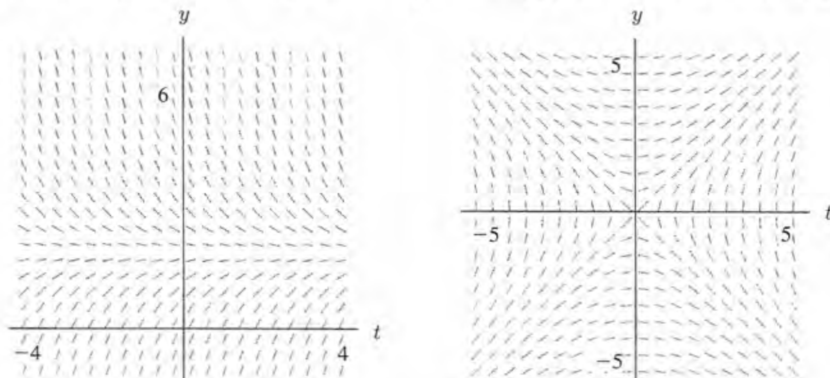


Figura 10.14. Campos direccionales para $\frac{dy}{dt} = 2 - y$ y $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}$, ¿cuál es cuál?

Solución (a) Considere las pendientes en puntos diferentes para las dos ecuaciones diferenciales. En particular, observe la recta $y = 2$ de la figura 10.14. Las curvas solución de la ecuación $dy/dt = 2 - y$ tienen pendiente 0 a todo lo largo de esta recta, mientras que las curvas solución de $dy/dt = t/2$ tienen pendiente $t/2$. Como el campo direccional (I) parece horizontal en $y = 2$, el campo direccional (I) corresponde a la ecuación diferencial $dy/dt = 2 - y$, y el campo direccional (II) corresponde a $dy/dt = t/y$.

(b) Las condiciones iniciales (i) y (ii) dan el valor de y cuando t es 0, es decir, la ordenada *en el origen*. Para trazar la curva solución que satisfaga la condición (i), dibuje la curva solución con ordenada en el origen igual a 1. Para (ii), dibuje la curva solución con ordenada en el origen igual a 3. Para (iii), la solución pasa por el punto (1, 0), por tanto, trace la curva solución que pase por este punto. Véanse las figuras 10.15 y 10.16.

(c) Para $dy/dt = 2 - y$, todas las curvas solución tienen $y = 2$ como asíntota horizontal, de modo que $y \to 2$ a medida que $t \to \infty$. Para $dy/dt = t/y$ con condiciones iniciales (0, 1) y (0, 3), vemos que $y \to \infty$ a medida que $t \to \infty$. La gráfica tiene asíntotas que parecen rectas diagonales. De hecho, éstas son $y = t$ y $y = -t$, de modo que $y \to \pm\infty$ a medida que $t \to \infty$.

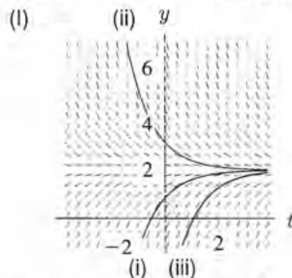


Figura 10.15. Curvas solución para $\dfrac{dy}{dt} = 2 - y$.

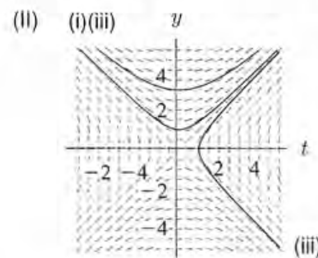


Figura 10.16. Curvas solución para $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{y}$.

Existencia y unicidad de soluciones

Puesto que se emplean ecuaciones diferenciales para modelar muchas situaciones reales, la pregunta de si existe o no una solución, y si ésta es única, puede tener una gran importancia práctica. Si conocemos cómo cambia la velocidad de un satélite, ¿podemos saber su velocidad para todo tiempo futuro? Si conocemos la población inicial de una ciudad y sabemos cómo cambia dicha población, ¿podemos pronosticar la población a futuro? El sentido común nos dice que sí: si conocemos el valor inicial de alguna cantidad y sabemos exactamente cómo está cambiando, podemos calcular el valor futuro de la cantidad.

En el lenguaje de las ecuaciones diferenciales, un problema de valor inicial (esto es, una ecuación diferencial y una condición inicial) que representa una situación real casi siempre tiene una solución única. Una forma de ver esto es observar el campo direccional. Imagine que inicia desde el punto que representa la condición inicial. Por lo general, por ese punto pasará un segmento de recta del campo direccional que apunte en la dirección en la que debe pasar la curva solución. Al seguir los segmentos de recta en el campo direccional, trazamos la curva solución. En la figura 10.17 hay varios ejemplos con diferentes puntos de inicio. En general, en cada punto hay un segmento de recta y, por tanto, sólo una dirección para que pase la curva solución. En consecuencia, la curva solución *existe* y es *única* siempre que nos den un punto inicial.

Se puede demostrar que si el campo direccional es continuo a medida que nos movemos de un punto a otro en el plano, podemos estar seguros que la curva solución existe alrededor de cualquier punto. El hecho de asegurarnos de que por cada punto sólo pase una curva solución requiere una condición ligeramente más fuerte.

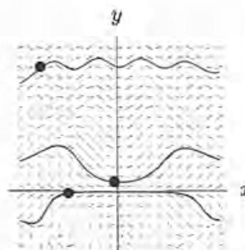


Figura 10.17. Sólo hay una curva solución que pasa por cada punto del plano para este campo direccional.

Problemas para la sección 10.3

1. La figura 10.18 ilustra gráficas de dos campos de pendientes. Trace tres curvas solución para cada uno de estos campos.

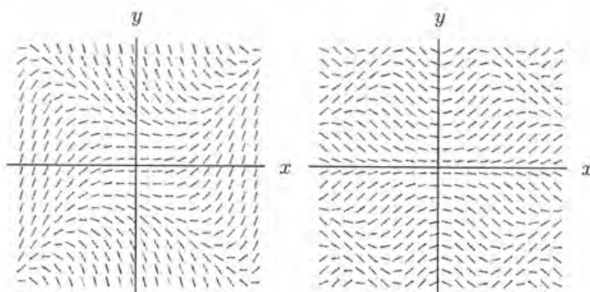


Figura 10.18.

2. La figura 10.19 es el campo direccional para la ecuación $y' = x + y$.
   (a) Grafique las soluciones que pasan por los puntos
   (i) (0, 0) (ii) (−3, 1) (iii) (−1, 0)
   (b) Con base en su gráfica, determine la ecuación de la solución que pasa por (−1, 0).
   (c) Compruebe su solución al inciso (b) sustituyéndola en la ecuación diferencial.

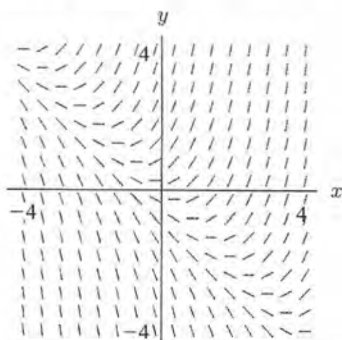


Figura 10.19. Campo direccional para $y' = x + y$.

2. (a) Trace la gráfica del campo direccional para la ecuación $y' = x - y$ en la figura 10.20, en los puntos indicados.
   (b) Compruebe que $y = x - 1$ es la solución a la ecuación diferencial que pasa por el punto (1, 0).

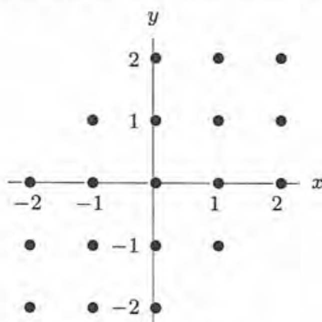


Figura 10.20.

4. La figura 10.21 es un campo direccional para $dy/dx = y - 10$.
   (a) Dibuje la curva solución para cada una de las siguientes condiciones iniciales:
   (i) $y = 8$ cuando $x = 0$ (ii) $y = 12$ cuando $x = 0$
   (iii) $y = 10$ cuando $x = 0$
   (b) Como $dy/dx = y - 10$, cuando $y = 10$ tenemos $dy/dx = 10 - 10 = 0$. Explique por qué esto se relaciona con su respuesta del inciso (iii).

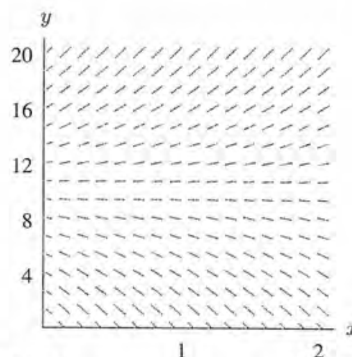


Figura 10.21. Campo direccional para $dy/dx = y - 10$.

5. (a) Considere el campo direccional para $dy/dx = xy$. ¿Cuál es la pendiente del segmento de recta en el punto (2, 1)? ¿En (0, 2)? ¿En (−1, 1)? ¿En (2, −2)?
   (b) Trace la gráfica de una parte del campo direccional al dibujar segmentos de recta con las pendientes calculadas en el inciso (a).

6. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones diferenciales se ajusta mejor al campo direccional que se muestra en la figura 10.22? Explique.
   (a) $y' = 1 + y$ (b) $y' = 2 - y$
   (c) $y' = (1 + y)(2 - y)$ (d) $y' = 1 + x$
   (e) $y' = xy$

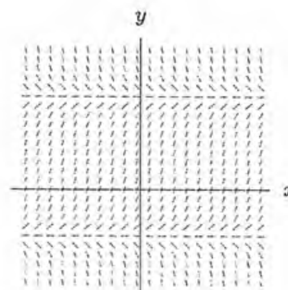


Figura 10.22.

7. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones diferenciales se ajusta mejor al campo direccional de la figura 10.23? Explique.

(a) $dP/dt = P - 1$ **(b)** $dP/dt = P(P-1)$
(c) $dP/dt = 3P(1-P)$ **(d)** $dP/dt = 1/3P(1-P)$

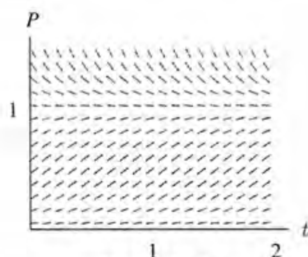


Figura 10.23.

Para los problemas 8 al 13, considere una curva solución para cada uno de los campos de pendientes del problema 15. Escriba uno o dos enunciados que describan cualitativamente el comportamiento de y para valores grandes de x. Por ejemplo, a medida que x aumenta, ¿$y \to \infty$, o y es infinito? Usted puede obtener distintos comportamientos en el límite para diferentes puntos iniciales. En cada caso, su respuesta debe analizar en qué medida el comportamiento en el límite depende del punto inicial.

8. Campo direccional (I) **9.** Campo direccional (II)
10. Campo direccional (III) **11.** Campo direccional (IV)
12. Campo direccional (V) **13.** Campo direccional (VI)

14. Relacione los campos direccionales de la figura 10.24 con sus diferentes ecuaciones diferenciales:

(a) $y' = -y$ **(b)** $y' = y$ **(c)** $y' = x$
(d) $y' = 1/y$ **(e)** $y' = y^2$

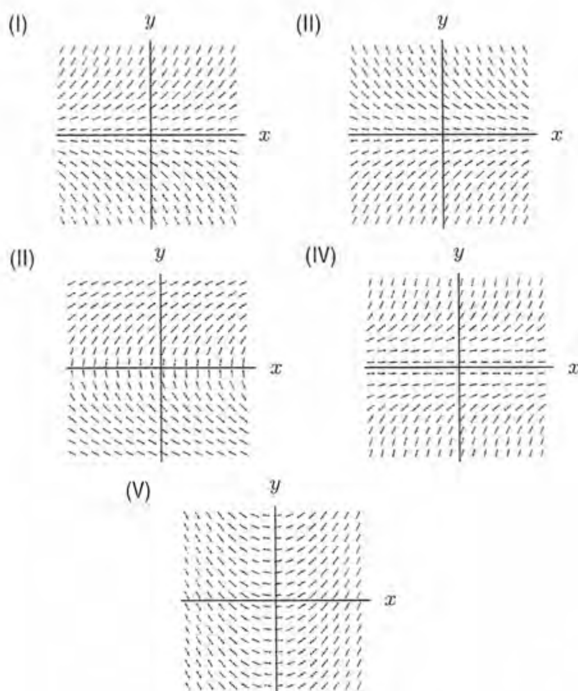


Figura 10.24.

15. Relacione los campos direccionales de la figura 10.25 con sus diferentes ecuaciones diferenciales:

(a) $y' = 1 + y^2$ **(b)** $y' = x$ **(c)** $y' = \operatorname{sen} x$
(d) $y' = y$ **(e)** $y' = x - y$ **(f)** $y' = 4 - y$

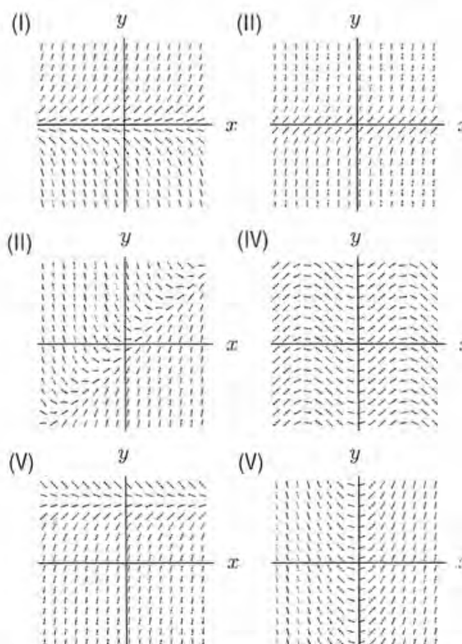


Figura 10.25. Campo direccional para $-5 \le x \le 5$, $-5 \le y \le 5$.

16. La ecuación de Gompertz, que modela el crecimiento de los tumores en animales, es $y' = -ay\ln(y/b)$, donde a y b son constantes positivas. Escriba un párrafo donde describa las similitudes y/o las diferencias de las soluciones de esta ecuación diferencial con $a = 1$ y $b = 2$, y las soluciones a la ecuación $y' = y(2 - y)$. Utilice las figuras 10.26 y 10.27.

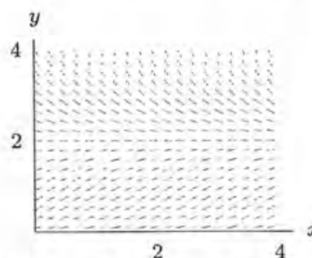


Figura 10.26. Campo direccional para $y' = -y\ln(y/2)$.

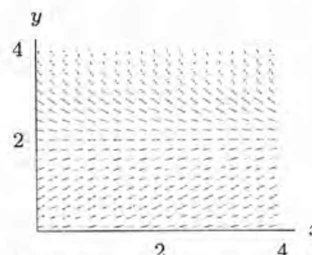


Figura 10.27. Campo direccional para $y' = y(2 - y)$.

10.4 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EXPONENCIALES

¿Cuál es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y?$$

Una solución es una función que es su propia derivada. La función $y = e^x$ tiene esta propiedad, y por tanto, $y = e^x$ es una solución. De hecho, cualquier múltiplo de e^x también tiene esta propiedad. La familia de funciones $y = Ce^x$ es la solución general de esta ecuación diferencial. Si k es una constante, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

es similar. Esta ecuación diferencial indica que la razón de cambio de y es proporcional a y. La constante k se denomina *constante de proporcionalidad*. Al sustituir $y = Ce^{kx}$ en la ecuación diferencial, usted puede comprobar que $y = Ce^{kx}$ es una solución. Tenemos el siguiente resultado:

> La solución general de la ecuación $\frac{dy}{dx} = ky$ es
>
> $$y = Ce^{kx} \qquad \text{para cualquier constante } C.$$
>
> - Indica crecimiento exponencial para $k > 0$, y decrecimiento exponencial para $k < 0$.
> - La constante C es el valor de y cuando x es 0.

Las gráficas de las curvas solución para algunas $k > 0$ están en la figura 10.28. Para $k < 0$, las gráficas están reflejadas respecto al eje y. Véase la figura 10.29.

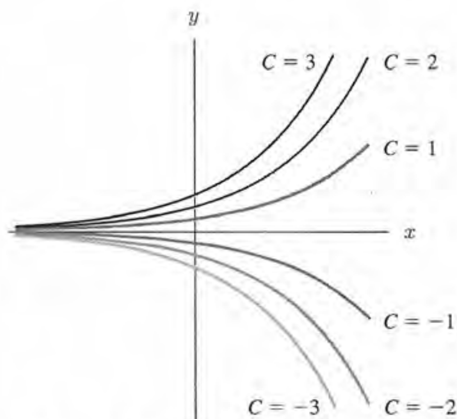


Figura 10.28. Gráficas de $y = Ce^{kx}$, que son soluciones para $\frac{dy}{dx} = ky$ para alguna $k > 0$ fija.

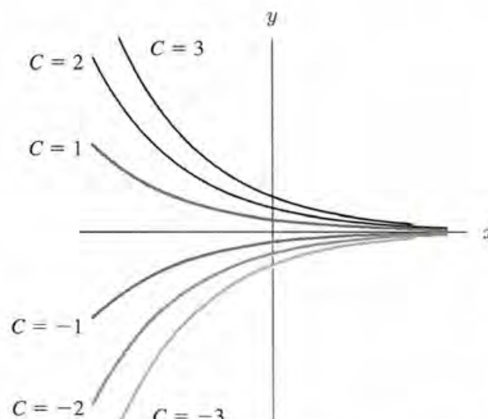


Figura 10.29. Gráficas de $y = Ce^{kx}$, que son soluciones para $\frac{dy}{dx} = ky$ para alguna $k < 0$ fija.

Ejemplo 1 **(a)** Encuentre la solución general para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(i) $\frac{dy}{dt} = 0.05y$ **(ii)** $\frac{dP}{dt} = -0.3P$ **(iii)** $\frac{dw}{dz} = 2z$ **(iv)** $\frac{dw}{dz} = 2w$

(b) Para la ecuación diferencial (i), encuentre la solución particular que satisfaga $y = 50$ cuando $t = 0$.

Solución (a) Las ecuaciones diferenciales dadas en (i), (ii) y (iv), todas son ellas ejemplos de crecimiento o decrecimiento exponenciales, puesto que cada una es de la forma

$$\text{Derivada} = \text{constante} \cdot \text{variable dependiente.}$$

Advierta que la ecuación diferencial (iii) no es de esta forma. El ejemplo 1, de la página 385, mostró que la solución de (iii) es $w = z^2 + C$. Las soluciones generales son

(i) $y = Ce^{0.05t}$ (ii) $P = Ce^{-0.3t}$ (iii) $w = z^2 + C$ (iv) $w = Ce^{2z}$

(b) La solución general de (i) es $y = Ce^{0.05t}$. Al sustituir a $y = 50$ y $t = 0$ tenemos

$$50 = Ce^{0.05(0)}$$
$$50 = C \cdot 1.$$

Por tanto, $C = 50$ y la solución particular de este problema de valor inicial es $y = 50e^{0.05t}$.

Crecimiento de población

Considere la población P de una región donde no hay inmigración ni emigración. La razón a la cual crece la población con frecuencia es proporcional al tamaño de la población. Esto significa que las poblaciones más grandes crecen más rápido, como era de esperarse, ya que hay más personas que tienen hijos. Si la población tiene una razón de crecimiento continuo de 2% por unidad de tiempo, entonces sabemos que

$$\text{Razón de crecimiento poblacional} = 2\% \text{ de la población actual,}$$

de modo que

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P.$$

Esta ecuación es de la forma $dP/dt = kP$ para $k = 0.02$ y tiene la solución general $P = Ce^{0.02t}$. Si la población inicial en el tiempo $t = 0$ es P_0, entonces $P_0 = Ce^{0.02(0)} = C$. Por tanto, $C = P_0$ y tenemos que

$$P = P_0e^{0.02t}.$$

Interés compuesto continuamente

En el capítulo 1 presentamos la composición continua como el caso límite en que el interés se suma cada vez con mayor frecuencia. Aquí aproximamos la composición continua desde un punto de vista diferente. Imaginamos que el interés se acumula a una razón proporcional al saldo en ese momento. Entonces, entre mayor es el saldo, gana interés más rápido y el saldo crece más rápidamente.

Ejemplo 2 Una cuenta bancaria gana interés continuamente a razón de 5% del saldo corriente por año. Suponga que el depósito inicial es de \$1,000 y no se hacen otros depósitos ni retiros.

(a) Escriba la ecuación diferencial satisfecha por el saldo de la cuenta.

(b) Resuelva la ecuación diferencial y trace una gráfica de la solución.

Solución (a) Estamos buscando B, el saldo de la cuenta en dólares, como función de t, el tiempo en años. El interés se suma continuamente a la cuenta a razón de 5% del saldo en ese momento, de modo que

$$\text{La razón a la que aumenta el saldo} = 5\% \text{ del saldo corriente.}$$

Entonces, la ecuación diferencial que describe el proceso es

$$\frac{dB}{dt} = 0.05B.$$

Advierta que aquí no aparecen los \$1,000, la condición inicial, porque el depósito inicial no afecta el proceso por el cual se gana el interés.

(b) Como $B_0 = 1{,}000$ es el valor inicial de B, la solución a esta ecuación diferencial es

$$B = B_0 e^{0.05t} = 1{,}000e^{0.05t}$$

Esta función se presenta en la figura 10.30.

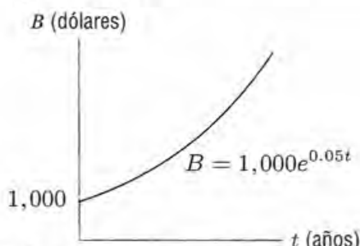


Figura 10.30. Saldo bancario respecto al tiempo.

Usted puede preguntarse cómo podemos representar una cantidad de dinero mediante una ecuación diferencial, ya que el dinero sólo puede tomar valores discretos (no se puede tener fracciones de centavo). De hecho, la ecuación diferencial sólo es una aproximación, pero, para grandes cantidades de dinero, es una muy buena aproximación.

Contaminación de los Grandes Lagos

En la década de 1960 la contaminación de los Grandes Lagos se convirtió en un problema de interés público. Construiremos un modelo para saber en cuánto tiempo se limpiarían los lagos por sí solos, suponiendo que no se arrojaran más contaminantes en ellos.

Sea Q la cantidad total de contaminante en un lago de volumen V en el tiempo t. Supongamos que entra agua limpia al lago a una razón constante r y que sale agua a la misma razón. Suponga que el contaminante se esparce uniformemente en el lago, y que el agua que entra en el lago se mezcla de inmediato con el resto del agua.

¿Cómo varía Q con el tiempo? Primero, observe que los contaminantes salen del agua, pero no entran, Q se reduce y el agua que sale del lago está menos contaminada, de modo que se reduce la razón a la que salen los contaminantes del lago. Esto indica que Q es decreciente y cóncava hacia arriba. Además, los contaminantes nunca se eliminarán por completo del lago, aunque la cantidad restante sea arbitrariamente pequeña. En otras palabras, Q se acerca de modo asintomático al eje t (véase la figura 10.31).

Planteamiento de una ecuación diferencial para la contaminación

Para comprender cómo cambia Q con el tiempo, escribimos una ecuación diferencial para Q. Sabemos que

$$\begin{array}{c}\text{Razón a la}\\ \text{que cambia } Q\end{array} = -\left(\begin{array}{c}\text{razón a la que salen}\\ \text{los contaminantes}\end{array}\right)$$

donde el signo negativo representa el hecho que Q es decreciente. En el tiempo t, la concentración de contaminantes es Q/V y el agua que contiene esta concentración sale a una razón r. Entonces,

$$\begin{array}{c}\text{Razón a la que salen}\\ \text{los contaminantes}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Razón de}\\ \text{salida}\end{array} \times \text{Concentración} = r \cdot \frac{Q}{V}.$$

Por tanto, la ecuación diferencial es

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{r}{V}Q$$

y su solución general es

$$Q = Q_0 e^{-rt/V}.$$

La tabla 10.6 contiene valores de r y V para cuatro de los Grandes Lagos.[1] Utilizamos estos datos para calcular cuánto tardarán ciertas partes de la contaminación en ser eliminadas del Lago Erie.

[1]Datos de Boyce, William E., y Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations*, Wiley, Nueva York, 1977.

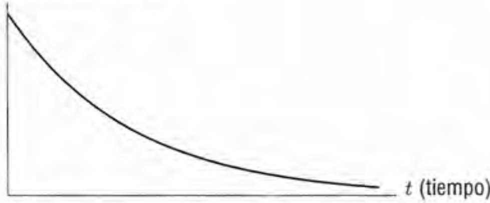


Figura 10.31. Contaminante en un lago respecto al tiempo

Tabla 10.6 *Volumen y flujo de salida en los Grandes Lagos*

	V (miles de km^3)	r (km^3/año)
Superior	12.2	65.2
Michigan	4.9	158
Erie	0.46	175
Ontario	1.6	209

Ejemplo 3 ¿Cuánto tardará el 90% de la contaminación en ser eliminada del Lago Erie? ¿Y para que sea eliminado el 99%?

Solución Para el Lago Erie, $r/V = 175/460 = 0.38$, de modo que en el tiempo t tenemos

$$Q = Q_0 e^{-0.38t}.$$

Cuando 90% de la contaminación haya sido eliminado, restará 10%, por tanto $Q = 0.1Q_0$. Al sustituir, resulta

$$0.1Q_0 = Q_0 e^{-0.38t}.$$

Al cancelar a Q_0 y despejar a t tenemos

$$t = \frac{-\ln(0.1)}{0.38} \approx 12 \text{ años}.$$

Análogamente, cuando 99% de la contaminación haya sido eliminada, $Q = 0.01Q_0$, y resolvemos

$$0.01Q_0 = Q_0 e^{-0.38t},$$

lo cual da

$$t = \frac{-\ln(0.1)}{0.38} \approx 12 \text{ años}.$$

La cantidad de un medicamento en el cuerpo

Como vimos en la sección 10.1, la razón a la que el cuerpo de un paciente elimina un medicamento es proporcional a la cantidad de éste que queda en el cuerpo. Si Q es la función que representa la cantidad que queda de medicamento, entonces

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ.$$

El signo negativo indica que la cantidad de medicamento en el cuerpo está decreciendo. La solución a esta ecuación diferencial es $Q = Q_0 e^{-kt}$; la cantidad decrece exponencialmente. La constante k depende del medicamento y Q_0 es la cantidad de medicamento en el cuerpo en el tiempo cero. A veces los médicos relacionan la información acerca de la razón relativa de decrecimiento con una *vida media*, que es el tiempo que tarda Q en decrecer en un factor de 1\2.

Ejemplo 4 El ácido valproico es un medicamento que se usa para controlar la epilepsia; su vida media en el cuerpo humano es de unas 15 horas.

(a) Utilice la vida media para determinar la constante k de la ecuación diferencial $dQ/dt = -kQ$, donde Q representa la cantidad de la sustancia en el cuerpo t horas después de que se administró el medicamento.

(b) ¿A qué hora quedará sólo el 10% de la dosis original?

Solución (a) Como la vida media es de 15 horas, sabemos que la cantidad restante es $Q = 0.5Q_0$ cuando $t = 15$. Sustituimos en la solución de la ecuación diferencial, $Q = Q_0e^{-kt}$, y despejamos k:

$$
\begin{aligned}
Q &= Q_0e^{-kt} \\
0.5Q_0 &= Q_0e^{-k(15)} \\
0.5 &= e^{-15k} \qquad \text{(dividiendo entre Q0)} \\
\ln 0.5 &= -15k \qquad \text{(tomando el logaritmo natural de ambos lados)} \\
k &= \frac{-\ln 0.5}{15} = 0.0462. \qquad \text{(despejando k)}
\end{aligned}
$$

(b) Para hallar el tiempo cuando 10% de la dosis original quede en el cuerpo, sustituimos $0.10Q$ por la cantidad restante, Q, y despejamos el tiempo, t.

$$
\begin{aligned}
0.10Q_0 &= Q_0e^{-0.0462t} \\
0.10 &= e^{-0.0462t} \\
\ln 0.10 &= -0.0462t \\
t &= \frac{\ln 0.10}{-0.0462} = 49.84.
\end{aligned}
$$

Habrá el 10% del medicamento todavía en el cuerpo en $t = 49.84$, o sea, unas 50 horas después.

Problemas para la sección 10.4

Encuentre las soluciones de las ecuaciones diferenciales de los problemas 1 al 6, sujetas a la condición inicial dada.

1. $\dfrac{dP}{dt} = 0.02P, \quad P(0) = 20$
2. $\dfrac{dy}{dx} = -0.14y, \quad y = 5.6 \text{ cuando } x = 0$
3. $\dfrac{dw}{dr} = 3w, \quad w = 30 \text{ cuando } r = 0$
4. $\dfrac{dp}{dq} = -0.1p, \quad p = 100 \text{ cuando } q = 5$
5. $\dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{Q}{5}, \quad Q = 50 \text{ cuando } t = 0$
6. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{3} = 0, \quad y(0) = 10$
7. Suponga que se hace un depósito en una cuenta bancaria que paga una tasa de interés anual de 7% compuesta continuamente. No se hacen otros depósitos ni retiros a la cuenta.
   - (a) Escriba una ecuación diferencial que satisfaga B, el saldo en la cuenta después de t años.
   - (b) Resuelva la ecuación diferencial dada en el inciso (a).
   - (c) Si el depósito inicial es de \$5,000, dé la solución particular que satisfaga la condición inicial.
   - (d) ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta después de 10 años?
8. El dinero de una cuenta bancaria crece continuamente a una razón anual de r (cuando la tasa de interés es de 5%, $r = 0.05$, y así sucesivamente). Supongamos que se depositaron \$1,000 en la cuenta en el año 2000.
   - (a) Escriba una ecuación diferencial que se satisfaga con M, la cantidad de dinero en la cuenta en el tiempo t, medido en años desde el 2000.
   - (b) Resuelva la ecuación diferencial.
   - (c) Trace una gráfica de la solución hasta el año 2030 para las tasas de interés de 5% y 10 por ciento.
9. La razón de crecimiento de un tumor es proporcional al tamaño de éste.
   - (a) Escriba una ecuación diferencial que satisfaga S, el tamaño del tumor, en mm, como función del tiempo, t.
   - (b) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial.
   - (c) Si el tumor mide 5 milímetros en el tiempo $t = 0$, ¿qué le dice esto acerca de la solución?
   - (d) Si, además, el tumor mide 8 mm en el tiempo $t = 3$, ¿qué le indica esto acerca de la solución?
10. La cantidad de ozono, Q, en la atmósfera está disminuyendo a una razón proporcional a la cantidad de ozono actual. Si t se mide en años, la constante de proporcionalidad es -0.0025. Escriba una ecuación diferencial para Q como función de t y dé la solución general a la ecuación diferencial. Si continúa esta razón, ¿aproximadamente qué porcentaje del ozono que en la actualidad hay en la atmósfera desaparecerá en los próximos 20 años?
11. El yodo radiactivo decrece a razón continua de 9% al día. Escriba una ecuación diferencial para modelar este comportamiento. Encuentre la solución general.
12. Empleando el modelo en el texto y los datos de la tabla 10.6, en la página 393, determine qué tiempo se requiere para que sea eliminado el 90% de la contaminación del Lago Michigan y del Lago Ontario, suponiendo que no se arrojen

nuevos contaminantes. Explique cómo puede usted decir qué lago tardará más en purificarse con sólo observar los datos en la tabla.

13. Utilice el modelo en el texto y los datos de la tabla 10.6, en la página 393, para determinar cuál de los Grandes Lagos necesitará más tiempo y cuál requiere menos tiempo para que se elimine el 80% de la contaminación, suponiendo que no se agreguen nuevos contaminantes. Determine la razón de estos dos tiempos.

14. El bitartrato de hidrocodona se utiliza como calmante para la tos. Después que el medicamento ha sido absorbido por completo, la cantidad de éste en el cuerpo decrece a una razón proporcional a la cantidad restante en el mismo. La vida media del bitartrato de hidrocodona en el cuerpo es de 3.8 horas y la dosis es de 10 mg.

(a) Escriba una ecuación diferencial para la cantidad, Q, de bitartrato de hidrocodona en el cuerpo en el tiempo t, en horas, desde que el medicamento haya sido absorbido por completo.

(b) Resuelva la ecuación diferencial dada en el inciso (a).

(c) Utilice la vida media para hallar la constante de proporcionalidad, k.

(d) ¿Cuánto de la dosis de 10 mg está aún en el cuerpo después de 12 horas?

15. La warfarina es un medicamento que se usa como anticoagulante. Después que se deja de aplicar el medicamento, la cantidad restante en el cuerpo de un paciente disminuye a una razón proporcional a la cantidad restante. La vida media de la warfarina en el cuerpo es de 37 horas.

(a) Trace una gráfica aproximada de la cantidad, Q, de warfarina en el cuerpo de un paciente como función del tiempo, t, desde que se deja de aplicar el medicamento. Marque las 37 horas en su gráfica.

(b) Escriba una ecuación diferencial que satisfaga Q.

(c) ¿Cuántos días tarda el nivel del medicamento en reducirse al 25% del nivel original?

16. La cantidad de tierras de cultivo (tierras para la producción de cosechas) crece a medida que aumenta la población mundial. Suponga que $A(t)$ representa el número total de hectáreas de tierra de cultivo en uso en el año t. (Una hectárea mide aproximadamente $2\frac{1}{2}$ acres.)

(a) Explique por qué es razonable que $A(t)$ satisfaga la ecuación $A'(t) = kA(t)$. ¿Qué suposiciones hace usted acerca de la población mundial y de su relación con la cantidad de tierras de cultivo empleadas?

(b) En 1950, se usaron unas $1 \cdot 10^9$ hectáreas de tierras de cultivo; en 1980, la cifra fue de $2 \cdot 10^9$. Si pensamos que la cantidad total de tierras de cultivo disponibles es de $3.2 \cdot 10^9$ hectáreas, ¿cuándo pronostica este modelo que se acabarán las tierras? (Sea $t = 0$ en 1950.)

17. Se extrae continuamente petróleo de un pozo a una razón proporcional a la cantidad de petróleo que hay en éste. Inicialmente había un millón de barriles de petróleo en el pozo; seis años después sólo quedaban 500,000 barriles.

(a) ¿A qué tasa decrecía la cantidad de petróleo en el pozo cuando quedaban 600,000 barriles?

(b) ¿Cuándo habrá 50,000 barriles restantes?

18. En algunas reacciones químicas, la razón a la que cambia con el tiempo la cantidad de una sustancia es proporcional a la cantidad presente. Por ejemplo, éste es el caso cuando la glucono-δ-lactona se convierte en ácido glucónico.

(a) Escriba una ecuación diferencial que satisfaga y, la cantidad de glucono-δ-lactona presente en el tiempo t.

(b) Si 100 gramos de glucono-δ-lactona se reducen a 54.9 gramos en una hora, ¿cuántos gramos habrá después de 10 horas?

19. El isótopo radiactivo de carbono 14 se encuentra en pequeñas cantidades en todas las formas de vida y se renueva constantemente hasta que el organismo muere, después de lo cual se desintegra a carbono 12 estable a una razón proporcional a la cantidad de carbono 14 presente, con una vida media de 5,730 años. Suponga que $C(t)$ es la cantidad de carbono 14 presente en el tiempo t.

(a) Encuentre el valor de la constante k en la ecuación diferencial $C' = -kC$.

(b) En 1988, tres equipos de investigación descubrieron que el Sudario de Turín, que se supone fue la mortaja de Jesucristo, contenía 91% de la cantidad de carbono 14 contenido en una tela recién hecha del mismo material.[2] De acuerdo con estos datos, ¿qué edad tiene el Sudario de Turín?

10.5 APLICACIONES Y MODELOS

En la sección anterior, se tomaron en cuenta varias situaciones modeladas por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

En esta sección, consideraremos situaciones en las que la razón de cambio de y es una función lineal de y de la forma

$$\frac{dy}{dt} = k(y - A), \qquad \text{donde } k \text{ y } A \text{ son constantes.}$$

[2]*The New York Times*, 18 de octubre de 1988.

Cantidad de medicamento en el cuerpo

A un paciente se le administra warfarina, un anticoagulante, vía intravenosa, a razón de 0.5 mg/hora. El cuerpo metaboliza y elimina la warfarina a una razón de aproximadamente 2% por hora. Una ecuación diferencial para la cantidad, Q (en mg), de warfarina en el cuerpo después de t horas está dada por

$$\text{Razón de cambio} = \text{Razón de entrada} - \text{Razón de salida}$$
$$\frac{dQ}{dt} = 0.5 - 0.02Q.$$

¿Qué le dice esto sobre la cantidad de warfarina en el cuerpo para los diferentes valores iniciales de Q?

Si Q es pequeña, entonces $0.02Q$ también es pequeña y la razón a la que se elimina el medicamento es menor que la razón a la que éste entra al cuerpo. Como la razón de entrada es mayor que la razón de salida, la razón de cambio es positiva y la cantidad de medicamento en el cuerpo es creciente. Si Q es lo suficientemente grande para que $0.02Q$ sea mayor a 0.5, entonces $0.5 - 0.02Q$ es negativa, por tanto, dQ/dt es negativa y la cantidad es decreciente.

Para valores pequeños de Q, la cantidad aumentará hasta que la razón de entrada sea igual a la razón de salida. Para valores grandes de Q, la cantidad disminuirá hasta que la razón de entrada sea igual a la razón de salida. ¿Cuál es el valor de Q en el que la razón de entrada sea exactamente igual a la razón de salida? Tenemos

$$\text{Razón de entrada} = \text{razón de salida}$$
$$0.5 = 0.02Q$$
$$Q = 25.$$

Si la cantidad de warfarina en el cuerpo en forma inicial es de 25 mg, entonces la cantidad que se eliminará será exactamente igual a la cantidad que se suministrará. La cantidad de la sustancia Q permanecerá constante en 25 mg. Asimismo, observe que cuando $Q = 25$, la derivada dQ/dt es cero, ya que

$$\frac{dQ}{dt} = 0.5 - 0.02(25) = 0.5 - 0.5 = 0.$$

Si la cantidad inicial es 25, entonces la solución es la recta horizontal $Q = 25$. A esta solución se le denomina *solución de equilibrio*.

En la figura 10.32 se muestra el campo direccional para esta ecuación diferencial, con las curvas solución de $Q_0 = 20$, $Q_0 = 25$, y $Q_0 = 30$. En cada caso, podemos observar que la cantidad de medicamento en el cuerpo se aproxima a la solución de equilibrio de 25 mg. La curva solución con $Q_0 = 30$ debe recordarle la función de decrecimiento exponencial. De hecho, ésta es una función de decrecimiento exponencial que ha sido desplazada hacia arriba 25 unidades.

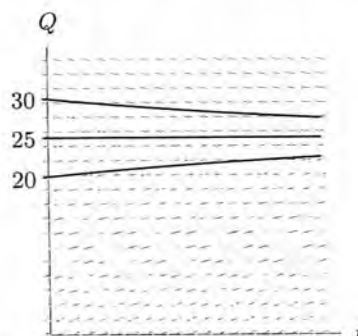


Figura 10.32. Campo direccional para $dQ/dt = 0.5 - 0.02Q$.

Solución de la ecuación diferencial $dy/dt = k\,(y - A)$

La concentración del medicamento en el ejemplo anterior satisface una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dt} = k(y - A).$$

Encontremos la solución general de esta ecuación. Como A es una constante, $dA/dt = 0$ y tenemos

$$\frac{d}{dt}(y - A) = \frac{dy}{dt} - \frac{dA}{dt} = \frac{dy}{dt} - 0 = k(y - A).$$

Entonces, $y - A$ satisface una ecuación diferencial exponencial, de manera que $y - A$ debe ser de la forma

$$y - A = Ce^{kt}.$$

> La solución general de la ecuación diferencial
>
> $$\frac{dy}{dt} = k(y - A)$$
>
> es
>
> $$y = A + Ce^{kt}, \quad \text{donde } C \text{ es una constante arbitraria.}$$

Atención: observe que, para ecuaciones diferenciales de esta forma, la constante arbitraria C *no* es el valor inicial de la variable, sino el valor inicial de $y - A$.

Ejemplo 1 Dé la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $\frac{dy}{dt} = 0.02(y - 50)$ **(b)** $\frac{dP}{dt} = 5(P - 10), \quad P = 8$ cuando $t = 0$

(c) $\frac{dy}{dt} = 3y - 300$ **(d)** $\frac{dW}{dt} = 500 - 0.1W$

Solución **(a)** La solución general es $y = 50 + Ce^{0.02t}$.

(b) La solución general es $P = 10 + Ce^{5t}$. Utilice la condición inicial para despejar C:

$$8 = 10 + C(e^0)$$
$$8 = 10 + C$$

Por tanto, $C = -2$, y la solución particular es $P = 10 - 2e^{5t}$.

(c) Primero escriba el lado derecho de la ecuación en la forma $k(y - A)$ al factorizar el 3:

$$\frac{dy}{dt} = 3(y - 100).$$

La solución general de esta ecuación diferencial es $y = 100 + Ce^{3t}$.

(d) Comenzamos por factorizar el coeficiente de W:

$$\frac{dW}{dt} = 500 - 0.1W = -0.1\left(W - \frac{500}{0.1}\right) = -0.1(W - 5{,}000).$$

La solución general de esta ecuación diferencial es $W = 5{,}000 + Ce^{-0.1t}$.

Ejemplo 2 Al inicio de esta sección, se presentó la siguiente ecuación diferencial para la cantidad de warfarina en el cuerpo:

$$\frac{dQ}{dt} = 0.5 - 0.02Q.$$

Escriba la solución general de esta ecuación diferencial. Encuentre las soluciones particulares para $Q_0 = 20$, $Q_0 = 25$, y $Q_0 = 30$.

Solución Primero escribimos la ecuación diferencial en la forma $dQ/dt = k(Q - A)$ al factorizar -0.02:

$$\frac{dQ}{dt} = 0.5 - 0.02Q = -0.02(Q - 25).$$

La solución general de esta ecuación diferencial es

$$Q = 25 + Ce^{-0.02t}.$$

Para encontrar la solución particular cuando $Q_0 = 20$, utilizamos la condición inicial para despejar C:

$$20 = 25 + C(e^0)$$
$$C = -5.$$

La solución particular cuando $Q_0 = 20$ es $Q = 25 - 5e^{-0.02t}$.

Cuando $Q_0 = 25$, tenemos que $C = 0$ y la solución particular es la recta horizontal $Q = 25$. Cuando $Q_0 = 30$, tenemos que $C = 5$ y la solución particular es $Q = 25 + 5e^{-0.02t}$. Estas tres soluciones fueron las que vimos anteriormente en la figura 10.32.

Ejemplo 3 El ingreso de una compañía se da a una razón continua anual de 5% de su valor neto. Al mismo tiempo, las obligaciones de nómina de la compañía se pagan a una razón constante de 200 millones de dólares al año. Se vio en la sección 10.1 que la ecuación diferencial del valor neto, W (en millones de dólares), de esta compañía en el año t está dada por

Razón de cambio de W = razón de entrada − razón de salida

$$\frac{dW}{dt} = 0.05W - 200.$$

(a) Resuelva la ecuación diferencial, suponiendo un valor neto inicial de W_0 millones de dólares.

(b) Trace una gráfica de la solución para $W_0 = 3{,}000$, 4,000 y 5,000. ¿En cuál de estos valores W_0 la compañía iría a la bancarrota? ¿En qué año?

Solución **(a)** Factorice 0.05 para obtener

$$\frac{dW}{dt} = 0.05(W - 4{,}000).$$

La solución general es

$$W = 4{,}000 + Ce^{0.05t}.$$

Para determinar C empleamos la condición inicial $W = W_0$ cuando $t = 0$.

$$W_0 = 4{,}000 + Ce^0$$
$$W_0 - 4{,}000 = C$$

Al sustituir este valor de C en $W = 4{,}000 + Ce^{0.05t}$ obtenemos

$$W = 4{,}000 + (W_0 - 4{,}000)e^{0.05t}.$$

(b) Si $W_0 = 4{,}000$, entonces $W = 4{,}000$, la solución de equilibrio.

Si $W_0 = 5{,}000$, entonces $W = 4{,}000 + 1{,}000e^{0.05t}$.

Si $W_0 = 3{,}000$, entonces $W = 4{,}000 - 1{,}000e^{0.05t}$. Las gráficas de estas funciones están en la figura 10.33. Observe que si el valor inicial W_0 se aproxima, pero no es igual a $4,000 millones, entonces W se aleja. Vemos que si $W_0 = 3{,}000$, el valor de W tiende a 0, y la compañía va a la bancarrota. Al despejar t en $W = 0$ tenemos $t \approx 27.7$, por tanto, la compañía va a la bancarrota en su vigesimoctavo año.

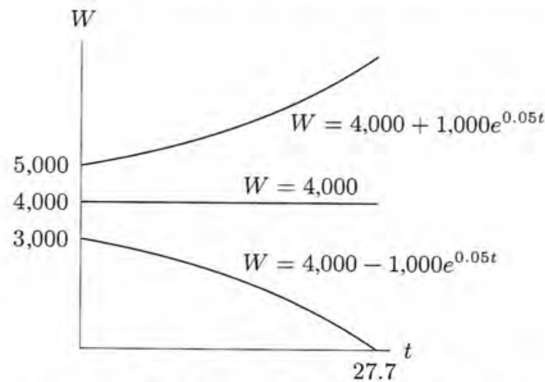


Figura 10.33. Soluciones a $\frac{dW}{dt} = 0.05W - 200$

Soluciones de equilibrio

La figura 10.32 muestra la cantidad de warfarina en el cuerpo para diferentes cantidades iniciales. Todas estas curvas son soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = 0.5 - 0.02Q = -0.02(Q - 25),$$

y todas las soluciones tienen la forma

$$Q = 25 + Ce^{-0.02t}$$

para alguna C. Advierta que $Q \to 25$ conforme $t \to \infty$ para todas las soluciones porque $e^{-0.02t} \to 0$ cuando $t \to \infty$. Es decir, a largo plazo, la cantidad tiende a la *solución de equilibrio* $Q = 25$ sin importar cuál sea la cantidad inicial.

Observe que la solución de equilibrio la podemos encontrar directamente a partir de la ecuación diferencial al resolver $dQ/dt = 0$:

$$\frac{dQ}{dt} = -0.02(Q - 25) = 0,$$

lo cual da $Q = 25$. Debido a que Q siempre se aproxima cada vez más al valor de equilibrio de 25 a medida que $t \to \infty$, denominamos a $Q = 25$ equilibrio *estable* de Q.

En la figura 10.33 se muestra una situación diferente con las soluciones de la ecuación diferencial $dW/dt = 0.05W - 200$. Encontramos el equilibrio al observar las curvas solución o establecer que $dW/dt = 0$:

$$\frac{dW}{dt} = 0.05W - 200 = 0.05(W - 4{,}000) = 0,$$

lo que da como resultado $W = 4{,}000$ como la solución de equilibrio. A esta solución de equilibrio se le denomina *inestable* porque si W comienza siendo aproximadamente, pero no igual, a 4,000, el valor neto W se aleja de 4,000 a medida que $t \to \infty$.

- Una **solución de equilibrio** es constante para todos los valores de la variable independiente. La gráfica es una recta horizontal. Las soluciones de equilibrio se pueden identificar al igualar a cero la derivada de la función.
- Una solución de equilibrio es **estable** si un pequeño cambio en las condiciones iniciales da una solución que tiende hacia el equilibrio, a medida que la variable independiente tiende al infinito positivo.
- Una solución de equilibrio es **inestable** si un pequeño cambio en las condiciones iniciales da una curva solución que se desvía del equilibrio, a medida que la variable independiente tiende al infinito positivo.

En general, una ecuación diferencial puede tener más de una solución de equilibrio o no tener solución de equilibrio alguna.

Ejemplo 4 Encuentre la solución de equilibrio de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Determine si la solución de equilibrio es estable o inestable.

(a) $\frac{dH}{dt} = -2(H - 20)$ **(b)** $\frac{dB}{dt} = 2(B - 10)$

Solución **(a)** Para encontrar las soluciones de equilibrio, se establece $dH/dt = 0$:

$$\frac{dH}{dt} = -2(H - 20) = 0,$$

lo que da como resultado $H = 20$ como la solución de equilibrio. La solución general de esta ecuación diferencial es $H = 20 + Ce^{-2t}$. Las curvas solución para $H_0 = 10$, $H_0 = 20$, y $H_0 = 30$ se muestran en la figura 10.34. Observamos que la solución de equilibrio es estable.

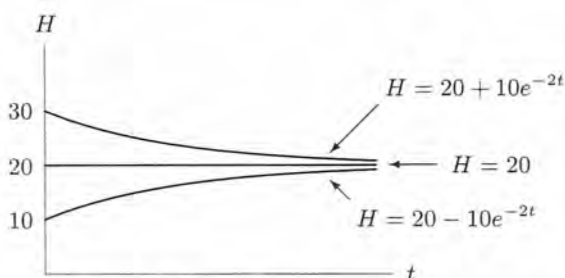


Figura 10.34. $H = 20$ es un equilibrio estable.

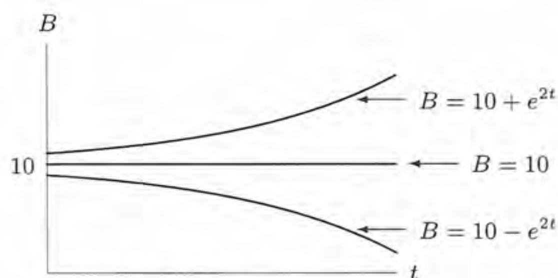


Figura 10.35. $B = 10$ es un equilibrio inestable.

(b) Para encontrar las soluciones de equilibrio, se establece $dB/dt = 0$:

$$\frac{dB}{dt} = 2(B - 10) = 0,$$

lo que da como resultado $B = 10$ como la solución de equilibrio. La solución general de esta ecuación diferencial es $B = 10 + Ce^{2t}$. Las curvas solución para $B_0 = 9$, $B_0 = 10$, y $B_0 = 11$ se muestran en la figura 10.35. Observamos que la solución de equilibrio es inestable.

Ley de Newton de calentamiento y enfriamiento

Newton propuso que la temperatura de un objeto caliente disminuye a una razón proporcional a la diferencia entre su temperatura y la de su entorno. Análogamente, un objeto frío se calienta a una razón proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su entorno.

Por ejemplo, una taza de café caliente puesta sobre una mesa se enfría a una razón proporcional a la diferencia de temperatura entre el café y el aire circundante. A medida que el café se enfría, disminuye la razón a la cual se enfría porque también disminuye la diferencia de temperatura entre el café y el aire. A la larga, la razón de enfriamiento tiende a cero y la temperatura del café se aproxima a la temperatura ambiente. La figura 10.36 muestra la temperatura de dos tazas de café respecto al tiempo, una que comienza con una temperatura más alta que la otra, pero ambas tendiendo a la temperatura ambiente a la larga.

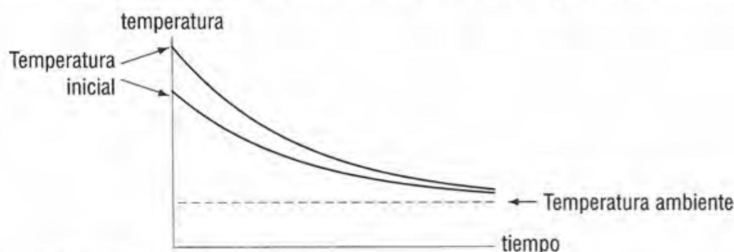


Figura 10.36. Temperatura del café respecto al tiempo.

Sea H la temperatura en el tiempo t de una taza de café en una habitación que está a 70 °F. La ley de Newton establece que la razón de cambio de H es proporcional a la diferencia de temperatura entre el café y la habitación:

Razón del cambio de la temperatura = Constante · Diferencia de temperatura

La razón de cambio de la temperatura es dH/dt. La diferencia de temperatura entre el café y la habitación es $(H - 70)$, de modo que

$$\frac{dH}{dt} = \text{Constante} \cdot (H - 70).$$

¿Qué indica el signo de la constante? Si el café empieza más caliente que a 70° (esto es, $H - 70 > 0$), entonces disminuye la temperatura del café (es decir, $dH/dt < 0$) y por tanto la constante debe ser negativa:

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 70) \qquad k > 0.$$

¿Qué podemos aprender de esta ecuación diferencial? Suponga que tomamos $k = 1$. El campo direccional para esta ecuación diferencial, en la figura 10.37, muestra varias curvas solución. Observe que, como era de esperarse, la temperatura del café se aproxima a la temperatura de la habitación. La solución general de esta ecuación diferencial es

$$H = 70 + Ce^{-t},$$

donde C es una constante arbitraria.

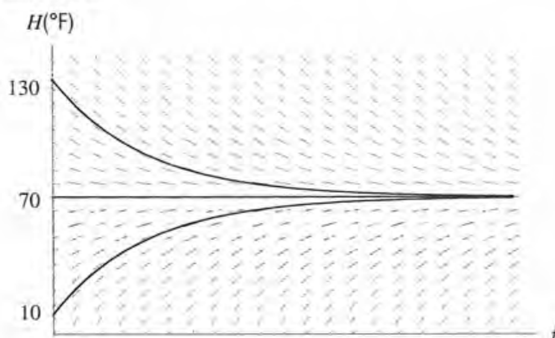


Figura 10.37. Campo direccional para $\frac{dH}{dt} = -(H - 70)$.

Ejemplo 5 Se encontró el cuerpo de una víctima de crimen a mediodía en una habitación que tiene una temperatura de 20 °C. A mediodía la temperatura del cuerpo era de 35 °C; dos horas después la temperatura del cuerpo era de 33 °C.

(a) Encuentre la temperatura, H, del cuerpo como función de t, el tiempo en horas desde que el cuerpo fue encontrado.

(b) Trace una gráfica de H respecto a t. ¿Qué pasa con la temperatura cuando transcurre mucho tiempo?

(c) En el momento del crimen, el cuerpo de la víctima tenía la temperatura normal, 37 °C. ¿Cuándo ocurrió el asesinato?

Solución **(a)** La Ley de Newton de enfriamiento dice que

Razón de cambio de temperatura = Constante · Diferencia de temperatura

Como la diferencia de temperatura es $H - 20$, tenemos para cierta constante k

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 20).$$

La solución general es

$$H = 20 + Ce^{-kt}.$$

Para determinar C, usamos el hecho de que $H = 35$ en $t = 0$:

$$35 = 20 + C \cdot e^0$$
$$35 = 20 + C$$

Por tanto, $C = 15$ y tenemos

$$H = 20 + 15e^{-kt}.$$

Para hallar k, utilizamos el hecho de que $H = 33$ cuando $t = 2$:

$$33 = 20 + 15e^{-k(2)}.$$

Aislamos la exponencial y despejamos k:

$$13 = 15e^{-2k}$$
$$\frac{13}{15} = e^{-2k}$$
$$\ln\left(\frac{13}{15}\right) = -0.143 = -2k$$
$$k = \frac{0.143}{2} = 0.072.$$

En consecuencia, la temperatura, H, del cuerpo como función del tiempo, t, está dada por

$$H = 20 + 15e^{-0.072t}.$$

(b) La gráfica de $H = 20 + 15e^{-0.072t}$ tiene una ordenada en el origen de $H = 35$, la temperatura inicial. La temperatura desciende exponencialmente con una asíntota horizontal de $H = 20$ (véase la figura 10.38). "Cuando transcurre mucho tiempo" significa "a medida que $t \to \infty$". La gráfica muestra que H $\to$ 20 como $t \to \infty$.

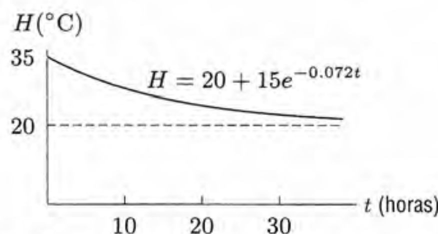


Figura 10.38. Temperatura de un cuerpo sin vida.

(c) Deseamos saber cuándo era de 37 ºC la temperatura. Sustituimos $H = 37$ y despejamos t:

$$37 = 20 + 15e^{-0.072t}$$
$$\frac{17}{15} = e^{-0.072t}.$$

Tomando logaritmo natural en ambos lados resulta

$$\ln\left(\frac{17}{15}\right) = 0.125 = -0.072t$$

de modo que

$$t = -\frac{0.125}{0.072} = -1.74 \text{ horas}$$

El crimen ocurrió 1.74 horas antes de mediodía, es decir, alrededor de las 10:15 a.m.

Problemas para la sección 10.5

Encuentre las soluciones particulares a los problemas 1 al 8.

1. $\frac{dH}{dt} = 3(H - 75), \quad H = 0 \text{ cuando } t = 0$
2. $\frac{dy}{dt} = 0.5(y - 200), \quad y = 50 \text{ cuando } t = 0$
3. $\frac{dP}{dt} = P + 4, \quad P = 100 \text{ cuando } t = 0$
4. $\frac{dB}{dt} = 4B - 100, \quad B = 20 \text{ cuando } t = 0$
5. $\frac{dQ}{dt} = 0.3Q - 120, \quad Q = 50 \text{ cuando } t = 0$
6. $\frac{dm}{dt} = 0.1m + 200, \quad m(0) = 1{,}000$
7. $\frac{dB}{dt} + 2B = 50, \quad B(1) = 100$
8. $\frac{dB}{dt} + 0.1B - 10 = 0 \qquad B(2) = 3$
9. Compruebe que $y = A + Ce^{kt}$ es una solución a la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dt} = k(y - A).$$
10. El dinero de una cuenta gana intereses a una razón continua de 8% al año y constantemente se hacen retiros a razón de \$5,000 al año. Al inicio, la cuenta tiene \$50,000. Escriba una ecuación diferencial para la cantidad de dinero en la cuenta, B, en t años. Resuelva la ecuación diferencial. ¿Alguna vez la cuenta se queda sin dinero? Si es así, ¿cuándo sucede?
11. Una cuenta bancaria gana 7% de interés anual compuesto continuamente. Usted deposita \$10,000 en la cuenta, y retira dinero continuamente a razón de \$1,000 por año.
    - **(a)** Escriba una ecuación diferencial para el balance, B, en la cuenta después de t años.
    - **(b)** ¿Cuál es la solución de equilibrio de la ecuación diferencial? (Ésta es la cantidad que debe depositarse en el presente para que el balance siga siendo el mismo con el transcurso de los años.)
    - **(c)** Encuentre la solución a la ecuación diferencial
    - **(d)** ¿Cuánto hay en la cuenta después de cinco años?
    - **(e)** Trace una gráfica de la solución. ¿Qué pasa con el balance en el largo plazo?
12. A un paciente se le aplica teofilina por vía intravenosa a razón de 43.2 mg/hora para aliviar un severo ataque de asma. La razón a la cual la sustancia sale del cuerpo del paciente es proporcional a la cantidad presente, con una constante de proporcionalidad de 0.082. Suponga que el cuerpo del paciente no contiene inicialmente nada de la medicina.
    - **(a)** Describa en manera verbal cómo espera que la cantidad de teofilina en el paciente varíe con el tiempo.
    - **(b)** Escriba una ecuación diferencial satisfecha por la cantidad de teofilina en el cuerpo, $Q(t)$.
    - **(c)** Resuelva la ecuación diferencial y trace una gráfica de la solución. ¿Qué sucede con la concentración a largo plazo?
13. Las hojas secas se acumulan en el suelo de un bosque a razón de 3 gramos por centímetro cuadrado por año. Al mismo tiempo, las hojas se descomponen a una razón continua de 75% al año. Escriba una ecuación diferencial para la cantidad total de hojas secas (por centímetro cuadrado) en el tiempo t. Trace una gráfica de la solución para demostrar que la cantidad de hojas secas tiende hacia un nivel de equilibrio. ¿Cuál es ese nivel de equilibrio?
14. Un fumador empedernido fuma cinco cigarrillos por hora; de cada uno, el torrente sanguíneo de la persona absorbe 0.4 mg de nicotina. La nicotina se elimina del cuerpo a una razón proporcional a la cantidad presente, con constante de proporcionalidad de -0.346, si t se mide en horas.
    - **(a)** Escriba una ecuación diferencial para el nivel de nicotina en el cuerpo, N, en mg, como función del tiempo, t, en horas.
    - **(b)** Resuelva las ecuaciones diferenciales del inciso (a). Suponga que inicialmente no hay nicotina en la sangre.
    - **(c)** La persona despierta a las 7:00 a.m. y comienza a fumar. ¿Cuánta nicotina hay en la sangre cuando la persona se va a dormir a las 11:00 p.m. (16 horas después)?
15. Una teoría de la rapidez con la que un empleado aprende una nueva tarea establece que cuanto más conozca de dicha tarea el empleado, más lento aprenderá. Supongamos que la razón a la que una persona aprende es igual al porcentaje de la tarea que aún no se aprende. Si y es el porcentaje aprendido al tiempo t, el porcentaje que aún no aprende en ese tiempo es $100 - y$, por lo que podemos modelar esta situación con la ecuación diferencial.
$$\frac{dy}{dt} = 100 - y.$$
    - **(a)** Encuentre la solución general a esta ecuación diferencial.
    - **(b)** Trace varias soluciones.
    - **(c)** Encuentre la solución particular si el empleado comienza el aprendizaje en el tiempo $t = 0$ (por tanto, $y = 0$ cuando $t = 0$).
16. En la figura 10.39 se ilustra el campo de pendientes para una ecuación diferencial. Encuentre todas las soluciones de equilibrio e indique si cada una es estable o inestable.

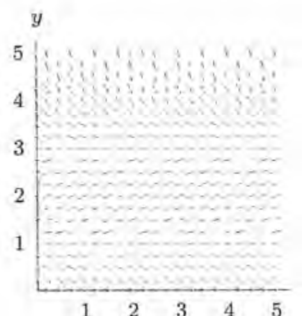


Figura 10.39.

17. **(a)** Encuentre la solución de equilibrio de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 0.5y - 250.$$

(b) Encuentre la solución general para esta ecuación diferencial.

(c) Trace varias soluciones con valores iniciales diferentes.

(d) ¿La solución de equilibrio es estable o inestable?

18. **(a)** ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 0.2(y-3)(y+2)?$$

(b) Utilice una calculadora de gráficas o una computadora para graficar un campo direccional para esta ecuación diferencial. Utilice el campo direccional para determinar si cada solución de equilibrio es estable o inestable.

19. Un camote se pone en un horno a 200 °C y se calienta de acuerdo con la ecuación diferencial

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 200), \qquad \text{para } k \text{ una constante positiva}$$

(a) Si el camote tiene una temperatura de 20 °C cuando se le pone en el horno, resuelva el problema inicial correspondiente.

(b) Encuentre k usando el hecho que después de 30 minutos la temperatura del camote es de 120 °C.

20. Escriba una ecuación diferencial cuya solución sea la temperatura como función del tiempo para una botella de jugo de naranja sacada del refrigerador que está a 40 °F, y se deja en una habitación que está a 65 °F. Resuelva la ecuación y trace una gráfica de la solución.

21. Una cuenta bancaria gana 10% de interés compuesto continuamente, con un saldo inicial de cero. El dinero se deposita en la cuenta a razón continua de $1,000 por año.

(a) Escriba una ecuación diferencial que describa la razón de cambio del saldo $B = f(t)$.

(b) Resuelva la ecuación diferencial.

22. La morfina es una droga para aliviar el dolor. La vida media de la morfina en el cuerpo es de dos horas. Suponga que se administra morfina a un paciente por vía intravenosa a razón de 2.5 mg por hora, y la razón a la que su cuerpo desecha la morfina es proporcional a la cantidad presente.

(a) Demuestre que la constante de proporcionalidad de la razón a la que la morfina sale del cuerpo (en mg/(hora) es $k = -0.347$.

(b) Escriba una ecuación diferencial para la cantidad, Q, de morfina en la sangre después de t horas.

(c) Utilice la ecuación diferencial para encontrar la solución de equilibrio. (Ésta es la cantidad de morfina en el cuerpo a largo plazo, una vez que se ha estabilizado el sistema.)

23. Un detective descubre a las 9:00 a.m. el cuerpo de la víctima de un crimen. La temperatura del cuerpo era 90.3 °F. Una hora después, la temperatura de éste era 89.0 °F. La temperatura de la habitación se mantenía constante a 68 °F.

(a) Supongamos que la temperatura, T, del cuerpo obedece a la Ley de Newton de enfriamiento; escriba una ecuación diferencial para T.

(b) Resuelva la ecuación diferencial para estimar el momento en que ocurrió el asesinato.

24. Suponga que a la 1:00 p.m. de una tarde de invierno hay una falla eléctrica en una casa en Wisconsin, y la calefacción no funciona sin electricidad. Cuando se interrumpió el servicio eléctrico, la temperatura era de 68 °F. A las 10:00 p.m., es de 57 °F en la casa y en el exterior es de 10 °F.

(a) Suponiendo que la temperatura, T, de la casa obedece la Ley de Newton de enfriamiento, escriba la ecuación diferencial satisfecha por T.

(b) Resuelva la ecuación diferencial para estimar la temperatura en la casa cuando una persona se levanta a las 7:00 a. m. de la mañana siguiente. ¿Debe preocuparse porque se congelen las tuberías del agua de la casa?

(c) ¿Qué suposición debe hacerse en el inciso (a) acerca de la temperatura del exterior? Dada esta suposición (posiblemente incorrecta), ¿cambiaría su estimación hacia arriba o hacia abajo? ¿Por qué?

25. Como usted sabe, cuando finaliza un curso los estudiantes comienzan a olvidar el material que aprendieron. Un modelo (llamado modelo de Ebbinghaus) supone que la razón a la que el estudiante olvida el material es proporcional a la diferencia entre el material que actualmente recuerda y alguna constante positiva, a.

(a) Sea $y = f(t)$ la fracción del material original recordado t semanas después de terminado un curso. Determine una ecuación diferencial para y. Su ecuación contendrá dos constantes; la constante a es menor que y para toda t.

(b) Resuelva la ecuación diferencial.

(c) Describa el significado práctico (en términos de la cantidad recordada) de las constantes de la solución $y = f(t)$.

10.6 MODELOS DE LA INTERACCIÓN DE DOS POBLACIONES

Hasta ahora hemos empleado una ecuación diferencial para modelar el crecimiento de una sola cantidad. Ahora consideraremos el crecimiento de dos poblaciones que se afectan mutuamente, una situación que requiere de un sistema de dos ecuaciones diferenciales. Entre los ejemplos están dos especies que compiten por alimento, una especie que caza a otra, o dos especies que se ayudan entre sí (simbiosis).

Un modelo depredador-presa: petirrojos y gusanos

Modelamos un sistema depredador-presa mediante lo que se denominan ecuaciones de Lotka-Volterra. Veamos un caso simplificado e idealizado en el cual los petirrojos son los depredadores y los gusanos son la presa.[3] Supongamos que hay r miles de petirrojos y w millones de gusanos. Si no hubiera petirrojos, los gusanos se multiplicarían exponencialmente según la ecuación

$$\frac{dw}{dt} = aw \qquad \text{donde } a \text{ es una constante positiva.}$$

Si no hubiera gusanos, los petirrojos no tendrían alimento y, por tanto, su población disminuiría según la ecuación[4]

$$\frac{dr}{dt} = -br \qquad \text{donde } b \text{ es una constante positiva.}$$

Ahora imagine el efecto de las dos poblaciones entre sí. Claramente, la presencia de los petirrojos es mala para los gusanos, de modo que

$$\frac{dw}{dt} = aw - \quad \text{Efecto de los petirrojos sobre los gusanos.}$$

Por otra parte, los petirrojos viven mejor cuando hay gusanos, por tanto

$$\frac{dr}{dt} = -br + \text{ Efecto de los gusanos sobre los petirrojos.}$$

¿Cómo se afectan entre sí exactamente las dos poblaciones? Supongamos que el efecto de una población sobre la otra es proporcional al número de "encuentros". (Un encuentro es cuando un petirrojo se come un gusano.) Es probable que el número de encuentros sea proporcional al producto de las poblaciones porque si una población se mantiene fija, el número de encuentros debe ser directamente proporcional a la otra población. Por tanto, suponemos que

$$\frac{dw}{dt} = aw - cwr \qquad \text{y} \qquad \frac{dr}{dt} = -br + kwr,$$

donde c y k son constantes positivas.

Para analizar este sistema de ecuaciones, veamos el ejemplo específico con $a = b = c = k = 1$:

$$\frac{dw}{dt} = w - wr \qquad \text{y} \qquad \frac{dr}{dt} = -r + wr.$$

El plano de fase

Para examinar el crecimiento de las poblaciones, deseamos gráficas de r y w respecto a t. Sin embargo, es más fácil obtener primero una gráfica de r respecto a w. Si hacemos una gráfica del punto (w, r) que represente el número de gusanos y petirrojos en cualquier momento, entonces, conforme la población cambia, el punto se mueve. El plano wr en el cual el punto se mueve se denomina *plano de fase (o plano fase)* y la trayectoria del punto es la *trayectoria de fase*.

Para hallar la trayectoria de fase, necesitamos una ecuación diferencial que relacione directamente a w y r. Tenemos dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{dw}{dt} = w - wr \qquad \text{y} \qquad \frac{dr}{dt} = -r + wr.$$

Si consideramos a r como función de w, y a w como función de t, por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dw} \cdot \frac{dw}{dt}.$$

---

[3]Basado en el trabajo de Thomas A. McMahon.

[4]Esta suposición pronostica, de manera no realista, que la población de petirrojos disminuirá exponencialmente, en vez de desaparecer en un tiempo finito.

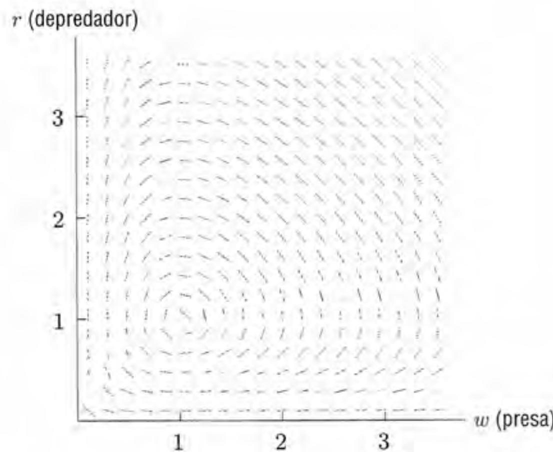


Figura 10.40. Campo direccional para $\frac{dr}{dw} = \frac{-r + wr}{w - wr}$.

Esto nos indica que

$$\frac{dr}{dw} = \frac{dr/dt}{dw/dt},$$

por tanto, tenemos

$$\frac{dr}{dw} = \frac{-r + wr}{w - wr}.$$

La figura 10.40 muestra el campo direccional de esta ecuación diferencial en el plano de fase.

El campo direccional y los puntos de equilibrio

Podemos tener una idea del aspecto que tienen las soluciones de esta ecuación a partir del campo direccional. En el punto (1, 1) no hay pendiente trazada porque *dr/dw* es indefinida puesto que la razón de cambio de ambas poblaciones respecto al tiempo es cero:

$$\frac{dw}{dt} = 1 - 1 \cdot 1 = 0, \qquad \text{y} \qquad \frac{dr}{dt} = -1 + 1 \cdot 1 = 0.$$

En términos de gusanos y petirrojos esto significa que si en algún momento $w = 1$ y $r = 1$ (es decir, hay un millón de gusanos y mil petirrojos), entonces w y r permanecen constantes siempre. Por tanto, el punto $w = 1$, $r = 1$ es una solución de equilibrio. El origen también es un punto de equilibrio, ya que si $w = 0$ y $r = 0$, entonces w y r permanecen constantes. El campo direccional sugiere que no hay otros puntos de equilibrio. Comprobamos esto al resolver

$$\frac{dw}{dt} = w - wr = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{dr}{dt} = -r + rw = 0,$$

que produce sólo $w = 0$, $r = 0$ y $w = 1$, $r = 1$ como soluciones.

Trayectorias en el plano de fase wr

Examinemos las trayectorias en el plano de fase. Un punto en una curva representa un par de poblaciones (w, r) que existen en el mismo tiempo t (aunque t no se muestra en la gráfica). Poco tiempo después, el par de poblaciones está representado por un punto cercano. Conforme pasa el tiempo, el punto traza una trayectoria. Puede demostrarse que la trayectoria es una curva cerrada. Véase la figura 10.41.

¿En qué dirección se mueve el punto en la trayectoria? Observe el par de ecuaciones diferenciales y verá que nos indican cómo cambian w y r con el tiempo. Por ejemplo, imagine que estamos en el punto P_0 de la figura 10.42, donde $w = 2.2$ y $r = 1$; entonces

$$\frac{dr}{dt} = -r + wr = -1 + (2.2)(1) = 1.2 > 0.$$

Por tanto, r es creciente, y en consecuencia el punto se mueve en la dirección que muestra la flecha de la figura 10.42.

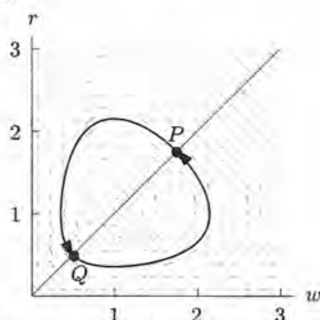


Figura 10.41. La curva solución es cerrada.

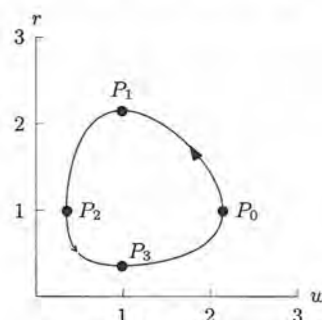


Figura 10.42. Una trayectoria.

Ejemplo 1 Suponga que en el tiempo $t = 0$, hay 2.2 millones de gusanos y 1,000 petirrojos. Describa cómo cambian las poblaciones de petirrojos y gusanos con el tiempo.

Solución La trayectoria que pasa por el punto P_0 donde $w = 2.2$ y $r = 1$ se muestra en el campo direccional de la figura 10.41 y por sí misma en la figura 10.42.

Inicialmente hay muchos gusanos, por lo que la población de petirrojos está muy bien. La población de petirrojos es creciente y la población de gusanos decreciente hasta que hay unos 2,200 petirrojos y un millón de gusanos (punto P_1 en la figura 10.42). En este momento hay muy pocos gusanos para sostener la población de petirrojos; ésta comienza a decrecer y la población de gusanos también. La población de petirrojos baja de manera considerable hasta que hay 1,000 petirrojos y 0.4 millones de gusanos (punto P_2 de la figura 10.42). Con tan pocos petirrojos, la población de gusanos comienza a recuperarse, pero la población de petirrojos todavía sigue decreciendo. La población de gusanos aumenta hasta que hay 400 petirrojos y un millón de gusanos (P_3 en la figura 10.42). Ahora hay muchos gusanos para la pequeña población de petirrojos, de modo que ambas poblaciones crecen. Las poblaciones regresan a sus valores iniciales (ya que la trayectoria forma una curva cerrada) y el ciclo comienza nuevamente.

El problema 13 de la página 409 muestra cómo calcular aproximadamente las coordenadas de los puntos en la curva.

Las poblaciones como funciones de tiempo

La forma de una trayectoria indica cómo varían las poblaciones con el tiempo. Usamos esta información para trazar una gráfica de cada población respecto al tiempo, como en la figura 10.43. El hecho de que la trayectoria sea una curva cerrada significa que ambas poblaciones oscilan periódicamente. Ambas poblaciones tienen el mismo periodo, y los gusanos (la presa) están a su máximo, a un cuarto de ciclo antes que la de petirrojos.

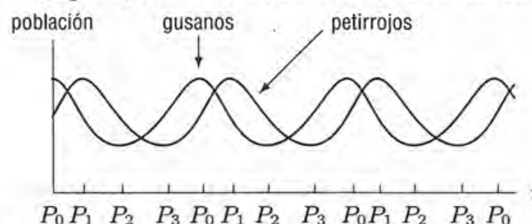


Figura 10.43. Poblaciones de petirrojos (en miles) y gusanos (en millones) en el tiempo.

Linces y liebres

Un sistema depredador-presa para el cual hay datos a largo plazo es el lince y la liebre canadienses. Ambos animales eran de interés para los cazadores de pieles, y los registros de la Hudson Bay Company (Compañía de la Bahía de Hudson) muestran información referente a ambas poblaciones durante la mayor parte del siglo XX. Estos registros muestran que ambas poblaciones fluctuaban, de modo muy regular, con un periodo de aproximadamente 10 años. Éste es el comportamiento pronosticado por las ecuaciones de Lotka-Volterra.

Otras formas de interacción de especies

Los métodos de esta sección se pueden emplear para modelar otros tipos de interacciones en dos especies, como es el caso de la competencia y la simbiosis.

Ejemplo 2 Describa las interacciones en dos poblaciones x y y modeladas por los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

(a) $\dfrac{dx}{dt} = 0.2x - 0.5xy$, $\dfrac{dy}{dt} = 0.6y - 0.8xy$

(b) $\dfrac{dx}{dt} = -2x + 5xy$, $\dfrac{dy}{dt} = -y + 0.2xy$

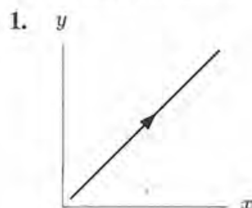
(c) $\dfrac{dx}{dt} = 0.5x$, $\dfrac{dy}{dt} = -1.6y + 2xy$

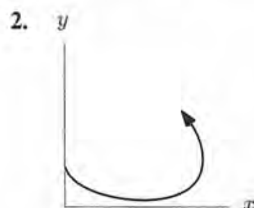
(d) $\dfrac{dx}{dt} = 0.3x - 1.2xy$, $\dfrac{dy}{dt} = -0.7y + 2.5xy$

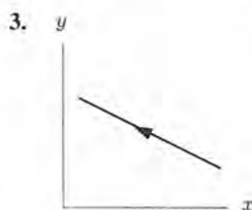
Solución
(a) Si ignoramos los términos de interacción con xy, tenemos $dx/dt = 0.2x$ y $dy/dt = 0.6y$, de modo que ambas poblaciones crecen exponencialmente. Como los términos de interacción son negativos, cada especie inhibe el crecimiento de la otra, por ejemplo cuando venados y alces compiten por alimento.
(b) Si ignoramos los términos de interacción, las poblaciones de ambas especies disminuyen exponencialmente. Sin embargo, los términos de interacción son positivos, lo cual significa que cada especie se beneficia de la otra, de modo que la relación es simbiótica. Un ejemplo es la polinización de las plantas por los insectos.
(c) Si no tomamos en cuenta la interacción, x crece, pero y decrece. El término de la interacción significa que y se beneficia de x, como cuando los pájaros que anidan se benefician de los árboles.
(d) Sin la interacción, x crece, pero y decrece. Los términos de la interacción muestran que y afecta a x mientras que x se beneficia de y. Éste es un modelo depredador-presa donde y es el depredador y x es la presa.

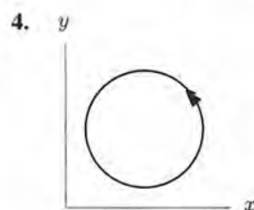
Problemas para la sección 10.6

Para los problemas 1 al 4, suponga que x y y son las poblaciones de dos especies diferentes. Describa verbalmente cómo cambia cada población con el tiempo.

1.


2.


3.


4.


Para los problemas 5 al 14, sea w el número de gusanos (en millones) y r el número de petirrojos (en miles) que viven en una isla. Suponga que w y r satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales, las cuales corresponden al campo direccional de la figura 10.44.

$$\frac{dw}{dt} = w - wr$$
$$\frac{dr}{dt} = -r + wr.$$

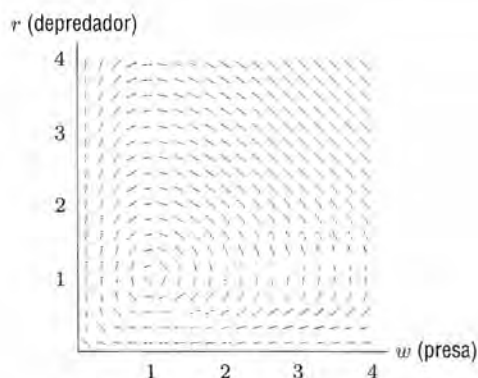


Figura 10.44. $\frac{dr}{dw} = \frac{r(w-1)}{w(1-r)}$.

5. Explique por qué estas ecuaciones diferenciales son un modelo razonable de la interacción en las dos poblaciones. ¿Por qué se han elegido los signos de esta forma?
6. Resuelva estas ecuaciones diferenciales en los dos casos especiales cuando no haya petirrojos y cuando no haya gusanos que vivan en la isla.
7. Describa y explique la simetría que observa en el campo direccional. ¿Qué consecuencias tiene esta simetría para las curvas solución?
8. Suponga que $w = 2$ y $r = 2$ cuando $t = 0$. Al inicio, ¿aumentan o disminuyen los petirrojos y los gusanos? ¿Qué sucede a largo plazo?

9. Para el caso analizado en el problema 8, estime los valores máximo y mínimo de la población de petirrojos. ¿Cuántos gusanos hay en el tiempo en el momento en que la población de petirrojos alcanza su máximo?

10. En un mismo sistema de coordenadas, trace una gráfica de w y r (las poblaciones de gusanos y petirrojos) respecto al tiempo. Utilice los valores iniciales de 1.5 para w y 1 para r. Usted puede hacer esto sin utilizar unidades para t.

11. A las personas de una isla les gustan tanto los petirrojos que deciden importar 200 de estas aves desde Inglaterra, para aumentar la población inicial a $r = 2.2$ cuando $t = 0$. ¿Esto tiene sentido? ¿Por qué si o por qué no?

12. Suponga que $w = 3$ y $r = 1$ cuando $t = 0$. Al inicio, ¿aumenta o disminuye el número de petirrojos y gusanos? ¿Qué pasa a largo plazo?

13. En $t = 0$ hay 2.2 millones de gusanos y 1,000 petirrojos.

(a) Utilice las ecuaciones diferenciales para calcular las derivadas dw/dt y dr/dt en $t = 0$.

(b) Utilice las condiciones iniciales y su respuesta al inciso (a) para calcular el número de petirrojos y gusanos en $t = 0.1$.

(c) Usando el método de los incisos (a) y (b), calcule el número de petirrojos y gusanos en $t = 0.2$ y 0.3.

14. **(a)** Suponga que hay tres millones de gusanos y 2,000 petirrojos. Localice el punto que corresponde a esta situación sobre el campo direccional dado en la figura 10.44. Trace la trayectoria que pasa por este punto.

(b) ¿En qué dirección se mueve el punto a lo largo de esta trayectoria? Ponga una flecha sobre la trayectoria y justifique su respuesta usando las ecuaciones diferenciales para dr/dt y dw/dt dadas en esta sección.

(c) ¿Cuál es el tamaño máximo alcanzado por la población de petirrojos? ¿Cuál es el tamaño de la población de gusanos cuando la población de petirrojos alcanza su máximo?

(d) ¿Cuál es el tamaño máximo alcanzado por la población de gusanos? ¿Cuál es el tamaño de la población de petirrojos cuando la población de gusanos alcanza su máximo?

15. Repita el problema 14 si inicialmente hay 0.5 millones de gusanos y 3,000 petirrojos.

Construya un sistema de ecuaciones diferenciales para modelar las situaciones de los problemas del 16 al 18. Usted puede suponer que todas las constantes de proporcionalidad son 1.

16. Dos negocios están en competencia entre sí. Ambos estarían bien sin el otro, pero cada uno afecta al otro. Los valores de los dos negocios se dan con x y y.

17. La variable x representa el tamaño de una población de pulgas, y la variable y representa el de una población de perros. Las pulgas necesitan a los perros para sobrevivir. Sin embargo, la población de perros no se ve afectada por las pulgas.

18. Las concentraciones de dos productos químicos se denotan por x y y, respectivamente. Por separado, cada una se desintegra a una razón proporcional a su concentración. Cuando se ponen juntas, se combinan para formar una tercera sustancia. Al crearse ésta, las concentraciones de las dos poblaciones iniciales disminuyen.

En los problemas del 19 al 21, indique las razones de crecimiento de dos poblaciones, x y y, medidas en miles.

(a) Describa verbalmente qué le ocurre a la población de cada especie en ausencia de la otra.

(b) Describa verbalmente cómo interactúan. Dé razones de por qué las poblaciones podrían comportarse como lo describen las ecuaciones. Indique qué especies pueden interactuar de esa forma.

19. $$\frac{dx}{dt} = 0.01x - 0.05xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.08xy$$

20. $$\frac{dx}{dt} = 0.01x - 0.05xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.2y - 0.08xy$$

21. $$\frac{dx}{dt} = 0.2x$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.4xy - 0.1y$$

22. Para cada sistema de ecuaciones diferenciales del ejemplo 2, determine si x aumenta o disminuye, y si y crece o decrece cuando $x = 2$ y $y = 2$.

23. Para cada sistema de ecuaciones del ejemplo 2, escriba una ecuación diferencial que comprenda dy/dx. Utilice una computadora o calculadora para trazar el campo direccional para $x, y > 0$. Después trace la trayectoria que pasa por el punto $x = 3$, $y = 1$.

10.7 MODELO PARA LA PROPAGACIÓN DE UNA ENFERMEDAD

Las ecuaciones diferenciales se pueden usar para pronosticar cuándo el brote de una enfermedad se hace tan severo que recibe el nombre de *epidemia*,[5] y para determinar qué nivel de vacunación se necesita para prevenir una epidemia. Consideremos un ejemplo específico.

[5]No siempre es claro cuándo se debe considerar epidemia a una enfermedad. La profesión médica generalmente clasifica una enfermedad como epidemia cuando la frecuencia es más alta de lo esperado en forma normal, lo que deja abierta la pregunta de qué es lo que se espera de manera normal. Por ejemplo, véase *Epidemiology in Medicine* por C. H. Hennekens y J. Buring; Little, Brown, Boston, 1987.

Gripe en un internado inglés

En enero de 1978, 763 estudiantes regresaron a un internado para hombres después de sus vacaciones de invierno. Una semana después, un muchacho contrajo gripe, seguido inmediatamente de otros dos. Al final del mes, casi la mitad de los jóvenes estaban enfermos. La mayoría de los alumnos de la escuela había sido afectada para cuando la epidemia acabó a mediados de febrero.[6]

Tener capacidad de pronosticar cuántas personas se enfermarán y cuándo, es un paso importante para el control de una epidemia. Ésta es una de las responsabilidades del Centro de Vigilancia de Enfermedades Contagiosas de Gran Bretaña, y del Centro para Control y Prevención de Enfermedades de Estados Unidos.

El modelo S-I-R

Para el ejemplo de gripe en el internado, aplicamos uno de los modelos de uso más común para una epidemia, llamado *S-I-R*. Imaginemos que la población de la escuela se divide en tres grupos:

S = el número de *susceptibles*, las personas que aún no están enfermas, pero que pueden enfermarse.

I = el número de *infectados*, las personas que ya están enfermas.

R = el número de *recuperados*, o *removidos*, que ya han estado enfermos y ya no pueden infectar a otros ni ser infectados nuevamente.

En este modelo, el número de susceptibles disminuye con el tiempo, a medida que se infectan las personas. Supongamos que la razón a la que las personas se infectan es proporcional al número de contactos entre personas susceptibles e infectadas. Esperamos que el número de contactos entre los dos grupos sea proporcional a S como a I. (Si S se duplica, esperamos que ocurra lo mismo con el número de contactos; del mismo modo, si I se duplica, esperamos que el número de contactos también lo haga.) Por tanto, suponemos que el número de contactos es proporcional al producto, SI. En otras palabras, suponemos que para alguna constante $a > 0$,

$$\frac{dS}{dt} = -\left(\begin{array}{c}\text{Razón a la que los}\\ \text{susceptibles se enferman}\end{array}\right) = -aSI.$$

(El signo negativo se emplea porque S es decreciente.)

El número de infectados está cambiando en dos formas: las personas que acaban de enfermar se suman al grupo de infectados y otros se remueven. Las personas que acaban de enfermar son exactamente aquellas que salen del grupo susceptible y se acumulan a razón de aSI (con un signo positivo esta vez). Las personas salen del grupo de infectados porque se recuperan (o mueren), o porque físicamente son sacados del resto del grupo y no pueden infectar a otros. Supongamos que las personas se sacan a una razón proporcional al número de enfermos, o sea bI, donde b es una constante positiva. Entonces,

$$\frac{dI}{dt} = \begin{array}{c}\text{Razón a la que los susceptibles}\\ \text{se enferman}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Razón a la que los infectados}\\ \text{son removidos}\end{array} = aSI - bI.$$

Supongamos que los que se han recuperado de la enfermedad ya no son susceptibles, así que el grupo de recuperados aumenta a razón de bI, por lo cual

$$\frac{dR}{dt} = bI.$$

Estamos suponiendo que contraer la enfermedad confiere inmunidad a la persona en cuestión, es decir, ella no se puede volver a enfermar de gripe. (Esto es cierto para cierta especie de gripe, por lo menos a corto plazo.)

[6]Datos del Centro de Vigilancia de Enfermedades Contagiosas de Gran Bretaña; citado en "Influenza in a Boarding School", en *British Medical Journal*, 4 de marzo de 1978, y por J. D. Murray en *Mathematical Biology*, Springer Verlag, Nueva York, 1990.

Podemos utilizar el hecho de que el total de población $S + I + R$ no está cambiando. (La población total, el número total de muchachos en la escuela, no cambió durante la epidemia; véase el problema 2 de la página 413.) Entonces, una vez que conocemos S e I, podemos calcular R. Por tanto restringiremos nuestra atención a dos ecuaciones

$$\frac{dS}{dt} = -aSI$$
$$\frac{dI}{dt} = aSI - bI.$$

Las constantes a y b

La constante a mide qué tan infecciosa es la enfermedad, esto es, con qué rapidez se trasmite de los infectados a los susceptibles. En el caso de la gripe, sabemos por estadísticas médicas que la epidemia comenzó con un muchacho enfermo, y que otros dos se enfermaron un día después. Entonces, cuando $I = 1$ y $S = 762$, tenemos $dS/dt \approx -2$, lo cual permite aproximar[7] a:

$$a = -\frac{dS/dt}{SI} = \frac{2}{(762)(1)} = 0.0026.$$

La constante b representa la razón a la que las personas infectadas salen de la población de infectados. En este caso de la gripe, los jóvenes eran generalmente llevados a la enfermería uno o dos días después de enfermarse. Suponiendo que la mitad de la población infectada se saca cada día, tomamos $b \approx 0.5$. Por tanto, nuestras ecuaciones son

$$\frac{dS}{dt} = -0.0026SI$$
$$\frac{dI}{dt} = 0.0026SI - 0.5I.$$

El plano de fase

Al igual que en la sección 10.6, buscamos en las trayectorias del plano de fase. Considerando I como función de S, y a S como una función de t, usamos la regla de la cadena para obtener

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dS} \cdot \frac{dS}{dt},$$

por lo que

$$\frac{dI}{dS} = \frac{dI/dt}{dS/dt}.$$

Al sustituir dI/dt y dS/dt, tenemos

$$\frac{dI}{dS} = \frac{0.0026SI - 0.5I}{-0.0026SI}.$$

Si se supone que I no es cero, esta ecuación se simplifica a aproximadamente

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{192}{S}.$$

El campo direccional de esta ecuación diferencial se muestra en la figura 10.45. En la figura 10.46 se ilustra la trayectoria con condición inicial $S_0 = 762$, $I_0 = 1$. El tiempo está representado por la flecha que muestra la dirección en la que un punto se mueve en la trayectoria. La enfermedad comienza en el punto $S_0 = 762$, $I_0 = 1$.

[7]Los valores de a y b se aproximan a los que obtuvo J. D. Murray en *Mathematical Biology*, Springer Verlag, Nueva York, 1990.

Al principio, más personas se infectan y menos son susceptibles, es decir, S decrece e I aumenta. Posteriormente, I decrece a medida que S continúa disminuyendo.

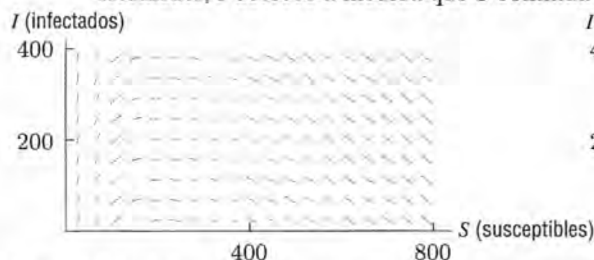


Figura 10.45. Campo direccional para $dI/dS = -1 + 192/S$.

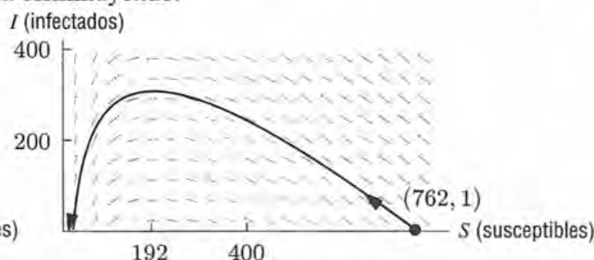


Figura 10.46. Trayectoria de $S_0 = 762$, $I_0 = 1$.

¿Qué nos indica el plano de fase SI?

Para saber cómo avanza la enfermedad, vemos la forma de la curva de la figura 10.46. El valor de I aumenta al principio, luego decrece a cero. Este valor máximo de I ocurre en $S \approx 200$. Podemos determinar exactamente cuándo se presenta el valor máximo al resolver

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{192}{S} = 0,$$

lo que da como resultado

$$S = 192.$$

Advierta que el valor máximo para I siempre ocurre al mismo valor de S, a saber, $S = 192$. La gráfica muestra que si una trayectoria empieza con $S_0 > 192$, entonces I aumenta primero y luego decrece a cero. Por otra parte, si $S_0 < 192$, no obtenemos el valor máximo como en la forma anterior ya que I decrece inmediatamente.

> Para este ejemplo, el valor $S_0 = 192$ se denomina *valor umbral*. Si S_0 está alrededor o abajo de 192, no hay epidemia. Si S_0 es mucho mayor de 192, se presenta una epidemia.[8]

El diagrama de fase aclara que el máximo valor de I es alrededor de 300, que es el número máximo de infectados en cualquier tiempo. Además, el punto en el cual la trayectoria cruza el eje S representa el tiempo en el que ha pasado la epidemia (porque $I = 0$). Entonces, la abscisa en el origen S muestra cuántos jóvenes no contrajeron gripe y, en consecuencia, cuántos se enfermaron.

¿Cuántas personas deben ser vacunadas?

Ante un brote de gripe o de sarampión, como sucedió en varias universidades de Estados Unidos en la década de 1980, muchas instituciones estructuraron un programa de vacunación. ¿Cuántos estudiantes deben ser vacunados para controlar una epidemia? Para contestar esta pregunta, podemos considerar la vacunación como la salida de personas de la categoría S (sin que I aumente), lo cual significa mover el punto inicial de la trayectoria a la izquierda, de forma paralela al eje S. Para evitar una epidemia, el valor inicial S_0 debe ser alrededor o abajo del valor de umbral. Por tanto, la epidemia del internado se habría evitado si todos los estudiantes, con excepción de 192, hubieran sido vacunados.

Gráficas de S e I respecto a t

En la trayectoria en la figura 10.46, el número de personas susceptibles decrece durante la epidemia. Esto tiene sentido porque las personas enferman y se recuperan y, por tanto, ya no son susceptibles a la infección. La trayectoria también muestra que el número de personas infectadas aumenta y luego disminuye. En la figura 10.47 se ilustran gráficas de S e I respecto al tiempo, t.

Para obtener una escala sobre el eje del tiempo, necesitaríamos usar métodos numéricos. Resulta que el número de infectados llegó a su máximo alrededor de seis días después y luego descendió. La epidemia siguió su curso en unos 20 días.

[8] Aquí se utiliza la definición de J. D. Murray de una epidemia, como un brote en el cual el número de infectados aumenta desde el valor inicial, I_0. Véase *Mathematical Biology*, Springer Verlag, Nueva York, 1990.

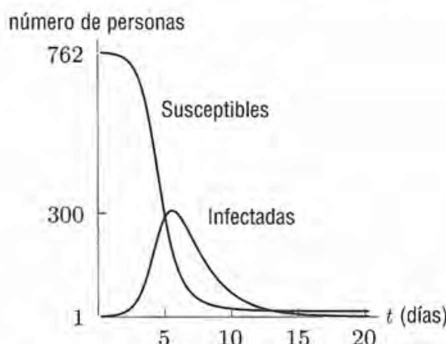


Figura 10.47. Avance de la gripe con el tiempo.

Problemas para la sección 10.7

1. Sea I el número de personas infectadas y S el número de personas susceptibles en un brote de una enfermedad. Explique por qué es razonable modelar la interacción en estos dos grupos mediante las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dS}{dt} = -aSI$$

$$\frac{dI}{dt} = aSI - bI \quad \text{donde } a, b \text{ son constantes positivas.}$$

¿Por qué se han escogido los signos en esta forma? ¿Por qué la constante a es igual en ambas ecuaciones?

2. Demuestre que si S, I y R satisfacen las ecuaciones diferenciales del problema 1, la población total, $S + I + R$, es una constante.

3. Explique cómo puede usted afirmar, a partir de la gráfica de la trayectoria que se muestra en la figura 10.46 de la página 412, que la mayoría de las personas en el internado inglés enfermó finalmente.

4. **(a)** En una escuela de 150 estudiantes, uno de los estudiantes contrae inicialmente la gripe. ¿Cuál es I_0? ¿Qué es S_0?

(b) Utilice estos valores de I_0 y S_0 y la ecuación

$$\frac{dI}{dt} = 0.0026SI - 0.5I$$

para determinar si el número de personas infectadas aumenta o disminuye inicialmente. ¿Qué nos dice esto acerca de la propagación de la enfermedad?

5. Repita el problema 4 para una escuela con 350 estudiantes.

6. **(a)** Dado el campo direccional para dI/dS en la figura 10.45 de la página 411, trace la trayectoria que pasa por el punto $I = 1$ y $S = 400$.

(b) ¿Cuántas personas susceptibles hay cuando el número de infectados está en su máximo?

7. Utilice la figura 10.47 para estimar el número máximo de infectados. ¿Qué representa esto? ¿Cuándo ocurre?

8. Compare las enfermedades modeladas por cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales con el modelo de gripe presentado en esta sección. Relacione cada conjunto de ecuaciones diferenciales con uno de los siguientes enunciados. Escriba un sistema de ecuaciones diferenciales que corresponda a cada uno de las enunciados no relacionados.

(I) $$\frac{dS}{dt} = -0.04SI \qquad \frac{dI}{dt} = 0.04SI - 0.2I$$

(II) $$\frac{dS}{dt} = -0.002SI \qquad \frac{dI}{dt} = 0.002SI - 0.3I$$

(III) $$\frac{dS}{dt} = -0.03SI \qquad \frac{dI}{dt} = 0.03SI$$

(a) Más infecciosa; los infectados se sacan más lentamente.
(b) Más infecciosa; los infectados se sacan más rápidamente.
(c) Menos infecciosa; los infectados se sacan más lentamente.
(d) Menos infecciosa; los infectados se sacan más rápidamente.
(e) Los infectados nunca se sacan.

9. Para las ecuaciones designadas (I) en el problema 8, ¿cuál es el valor umbral de S?

10. Para las ecuaciones designadas (II) en el problema 8, suponga que $S_0 = 100$. ¿Se propaga inicialmente la enfermedad? ¿Qué sucede si $S_0 = 200$?

RESUMEN DEL CAPÍTULO

- **Terminología de ecuaciones diferenciales**
  Familia de soluciones, solución particular, condiciones iniciales, soluciones de equilibrio estables/inestables.
- **Campos de direcciones**
  Visualización de la solución de una ecuación diferencial.
- **Solución analítica de ecuaciones diferenciales**
  Soluciones de $dy/dt = ky$, $dy/dt = k(y - A)$, el modelo logístico.
- **Modelado con ecuaciones diferenciales**
  Crecimiento y decrecimiento, contaminación en un lago, cantidad de medicamento en el cuerpo, ley de Newton de calentamiento y enfriamiento, valor neto de una compañía.
- **Sistemas de ecuaciones diferenciales**
  Interacción de dos especies o negocios, modelo depredador-presa, propagación de una enfermedad.

PROBLEMAS DE REPASO

1. (a) Determine cuál de las siguientes funciones es una solución de la ecuación diferencial.

$$x\frac{dy}{dx} = 3y.$$

(i) $y = Cx^2$ (ii) $y = Cx^3$
(iii) $y = x^3 + C$

(b) Para cualquier función que sea una solución, encuentre C si $y = 40$ cuando $x = 2$.

2. Para cierta cantidad y, suponga que $dy/dt = \sqrt{y}$. Complete el valor de y en la siguiente tabla. Suponga que la razón de crecimiento, dy/dt, es aproximadamente constante en cada intervalo unitario de tiempo y que el valor inicial de y es 100.

t	0	1	2	3	4
y	100				

3. Los campos direccionales para $dy/dx = 1 + x$ y $dy/dx = 1 + y$ se dan en las figuras 10.48 y 10.49.

(a) ¿Cuál campo direccional corresponde a cuál ecuación?

(b) Sobre cada campo direccional, trace la curva solución que pasa por el origen.

(c) Para cada campo direccional, haga una lista de todas las soluciones de equilibrio e indique de cada una si es estable o inestable.

(I)

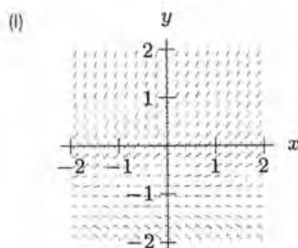


Figura 10.48.

(II)

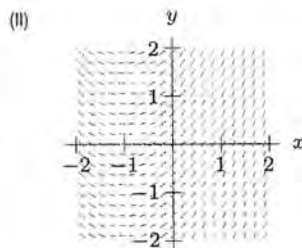


Figura 10.49.

Resuelva las ecuaciones diferenciales de los problemas 4 al 13.

4. $\frac{dP}{dt} = t$

5. $\frac{dy}{dt} = 5y$

6. $\frac{dy}{dt} = 5t$

7. $\frac{dP}{dt} = 0.03P$

8. $\frac{dA}{dt} = -0.07A$

9. $\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt} = 2$

10. $\frac{dP}{dt} = 10 - 2P$

11. $\frac{dy}{dt} = 100 - y$

12. $\frac{dy}{dx} = 0.2y - 8$

13. $\frac{dH}{dt} = 0.5H + 10$

Para los problemas 14 al 17, resuelva las ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas y trace una gráfica de sus soluciones.

14. $\frac{dP}{dt} = 0.08P$, $P = 5{,}000$ cuando $t = 0$

15. $\frac{dy}{dt} = -0.2y$, $y = 25$ cuando $t = 0$

16. $\frac{dP}{dt} = 0.08P - 50$, $P(0) = 10$

17. $\frac{dH}{dt} = 100 - 0.5H$, $H(0) = 40$

18. Trace el campo direccional para la ecuación diferencial del problema 10, y trace tres diferentes curvas de solución en el campo direccional.

19. (a) Encuentre todas las soluciones de equilibrio de la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = 0.5y(y-4)(2+y).$$

(b) Con una calculadora o una computadora, trace un campo direccional para esta ecuación diferencial. Utilícelo para determinar si cada solución de equilibrio es estable o inestable.

20. Se hace un depósito de \$5,000 en una cuenta bancaria que paga 1.5% de interés anual, compuesto continuamente.

(a) Escriba una ecuación diferencial para el saldo, B, en la cuenta como función del tiempo, t, en años.

(b) Resuelva la ecuación diferencial.

(c) ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta en 10 años?

21. Una compañía gana 2% al mes en sus activos, pagados continuamente, y sus gastos se pagan continuamente a razón de \$80,000 por mes.

(a) Escriba una ecuación diferencial para el valor, V, de la compañía como función del tiempo, t, en meses.

(b) ¿Cuál es la solución de equilibrio para la ecuación diferencial? ¿Cuál es la importancia de este valor para la compañía?

(c) Resuelva la ecuación diferencial encontrada en el inciso (a).

(d) Si la compañía tiene activos valuados en \$3 millones en el tiempo $t = 0$, ¿cuánto valdrán sus activos un año después?

22. Suponga que la razón con la que un medicamento sale del torrente sanguíneo y pasa a la orina es proporcional a la cantidad de medicamento en la sangre en ese momento. Si una dosis inicial de Q_0 se inyecta directamente en la sangre, sólo 20% quedará en la sangre después de tres horas.

(a) Escriba y resuelva una ecuación diferencial para la cantidad, Q, del medicamento en la sangre después de t horas.

(b) ¿Cuánto de este medicamento está en el cuerpo de un paciente después de seis horas, si se le aplican inicialmente 100 mg?

23. Un medicamento se administra, vía intravenosa, a una razón constante de r mg/hora y se excreta a una razón proporcional a la cantidad presente, con constante de proporcionalidad $\alpha > 0$.

(a) Resuelva una ecuación diferencial para la cantidad, Q, en mg, del medicamento en el cuerpo en el tiempo t horas. Su respuesta debe contener r y α. Trace una gráfica de Q respecto a t. ¿Cuál es Q_∞, el valor límite de Q a la larga?

(b) ¿Qué efecto tiene duplicar r sobre Q_∞? ¿Qué efecto tiene duplicar r sobre el tiempo para alcanzar la mitad del valor límite, $\frac{1}{2}Q_\infty$?

(c) ¿Qué efecto tiene duplicar α sobre Q_∞? ¿Sobre el tiempo para alcanzar $\frac{1}{2}Q_\infty$?

24. Una cuenta bancaria gana 5% de interés anual compuesto continuamente. Se realizan retiros de la cuenta continuamente a razón de $12,000 por año durante 20 años.

(a) Escriba una ecuación diferencial que describa el saldo $B = f(t)$, donde t es en años.

(b) Resuelva la ecuación diferencial dado un saldo inicial de B_0.

(c) ¿Cuál debe ser el saldo inicial para que la cuenta tenga un saldo de cero después de precisamente 20 años?

25. Suponga que se depositan $1,000 en una cuenta bancaria que gana interés continuamente a razón de i por año, y, además, se hacen retiros de la cuenta a razón de $100 al año. Trace una gráfica de la cantidad de dinero que hay en la cuenta como función del tiempo si la tasa de interés es

(a) 5% **(b)** 10% **(c)** 15%

En cada caso, encuentre primero una expresión para la cantidad de dinero en la cuenta en el tiempo t en años.

26. Una cuenta bancaria gana 10% de interés anual compuesto continuamente. Se deposita dinero en la cuenta en un flujo continuo de dinero a razón de $1,200 por año.

(a) Escriba una ecuación diferencial que describa la razón a la cual cambia el saldo $B = f(t)$.

(b) Resuelva la ecuación diferencial dado un saldo inicial de $B_0 = 0$.

(c) Encuentre el saldo después de cinco años.

27. De acuerdo con un modelo fisiológico sencillo, un atleta adulto necesita 20 calorías al día por libra de peso corporal para mantener su peso. Si él consume más o menos calorías de las necesarias para mantener su peso, éste cambia a una razón proporcional a la diferencia entre el número de calorías consumidas y el número necesario para mantener su peso actual; la constante de proporcionalidad es de 1/3,500 libras por caloría. Suponga que una persona en particular tiene una ingesta calórica constante de I calorías por día. Sea $W(t)$ el peso de la persona en libras en el tiempo t (medido en días).

(a) ¿Cuál ecuación diferencial tiene la solución $W(t)$?

(b) Resuelva esta ecuación diferencial.

(c) Trace una gráfica de $W(t)$ si la persona comienza pesando 160 libras y consume 3,000 calorías diarias.

28. Cierta mercancía se vende inicialmente a un precio de $\$p$ por unidad. Con el tiempo, las fuerzas del mercado hacen que el precio tienda al precio de equilibrio, $\$p^*$, en el cual la oferta se iguala con la demanda. El modelo Evans de ajuste de precios establece que la razón de cambio del precio real de mercado, $\$p$, es proporcional a la diferencia entre el precio real de mercado y el precio de equilibrio.

(a) Escriba una ecuación diferencial para p como función de t.

(b) Resuelva para p.

(c) Trace soluciones para varios precios iniciales diferentes, tanto arriba como abajo del precio de equilibrio.

(d) ¿Qué le sucede a p cuando $t \to \infty$?

29. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales representa la interacción en dos poblaciones, x y y.

$$\frac{dx}{dt} = -3x + 2xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + 5xy$$

(a) Describa cómo interactúan las especies. ¿Qué haría una especie en ausencia de la otra? ¿Son beneficiosas o perjudiciales entre sí?

(b) Si $x = 2$ y $y = 1$, ¿x aumenta o disminuye? ¿y aumenta o disminuye? Justifique sus respuestas.

(c) Escriba una ecuación diferencial en donde aparezca dy/dx.

(d) Utilice calculadora o computadora para trazar el campo direccional correspondiente a la ecuación diferencial del inciso (c).

(e) Trace la trayectoria que comience en el punto $x = 2$, $y = 1$ en su campo direccional, y describa cómo cambian las poblaciones a medida que aumenta el tiempo.

30. Dos compañías, A y B, compiten entre sí. Represente con x el valor neto (en millones de dólares) de la compañía A, y y represente el valor neto (en millones de dólares) de la compañía B. En la figura 10.50 se dan cuatro trayectorias. Para cada trayectoria, describa las condiciones iniciales. Describa lo que ocurre al principio: ¿las compañías ganan o pierden dinero desde el principio? ¿Qué sucede a largo plazo?

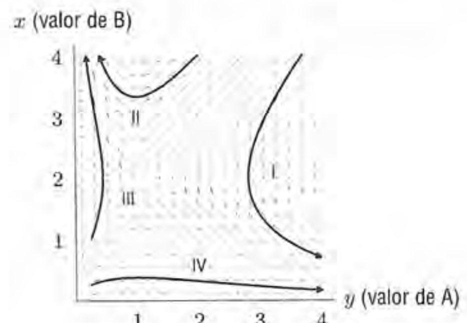


Figura 10.50.

PROYECTOS

1. Cultivo y crecimiento logístico

En este proyecto, veremos los efectos de *cultivar* una población que crece logísticamente. Cultivar podría ser, por ejemplo, la pesca o la explotación forestal. Una pregunta importante es qué nivel de cosecha conduce a una *producción sostenible*. En otras palabras, ¿cuánto se puede cosechar sin agotar la población a la larga?

(a) Cuando no hay pesca, suponga que una población de peces se rige por la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = 2N - 0.01N^2,$$

donde N es el número de peces en el tiempo t en años. Trace una gráfica de dN/dt respecto a N. Marque en su gráfica los valores de equilibrio de N.

Observe en su gráfica que si N está entre 0 y 200, entonces dN/dt es positiva y N aumenta. Si N es mayor de 200, entonces dN/dt es negativa y N disminuye. Compruebe esto trazando un campo direccional para esta ecuación diferencial. Utilice el campo direccional para trazar soluciones que muestran N respecto a t para varios valores iniciales. Describa lo que vea.

(b) Suponga ahora que los pescadores sacan peces a una razón continua de 75 pescados/año. Sea P el número de peces en el tiempo t con cultivo. Explique por qué P satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 2P - 0.01P^2 - 75.$$

(c) Trace dP/dt respecto a P. Encuentre y marque la ordenada y abscisa en el origen.

(d) Trace el campo direccional para la ecuación diferencial en P.

(e) Recuerde que si dP/dt es positiva para algunos valores de P, entonces P aumenta para estos valores, y si dP/dt es negativa para algunos valores de P, entonces P disminuye para esos valores. Sin embargo, el valor de P nunca pasa por un valor de equilibrio. Utilice esta información y la gráfica del inciso (c) para responder las siguientes preguntas:

(i) ¿Cuáles son los valores de equilibrio de P?

(ii) ¿Para qué valores iniciales de P aumenta P? ¿En qué valor se nivela el valor de P?

(iii) ¿Para qué valores iniciales de P disminuye P? (Su respuesta puede depender del valor inicial.)

(f) Utilice el campo direccional del inciso (d) para trazar gráficas de P respecto a t, con los valores iniciales:

(i) $P(0) = 40$ **(ii)** $P(0) = 50$ **(iii)** $P(0) = 60$
(iv) $P(0) = 150$ **(v)** $P(0) = 170$

(g) A partir de las gráficas que usted dibujó, determine cuáles son los valores de equilibrio de las poblaciones y si son o no estables.

(h) Ahora veamos el efecto de niveles diferentes de la pesca en una población de peces. Si la pesca se lleva a cabo a una razón continua de H pescados/año, la población de peces P satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 2P - 0.01P^2 - H.$$

(i) Para cada uno de los valores $H = 75, 100, 200$, trace una gráfica de dP/dt respecto a P.

(ii) ¿Para cuál de los tres valores de H, que usted consideró en el inciso (i), hay una condición inicial tal que la población de peces no se agote finalmente?

(iii) Con base en su respuesta en el inciso (ii), determine para qué valores de H hay un valor inicial de P tal que la población no se agote finalmente.

(iv) Recomiende una política para garantizar la supervivencia a largo plazo de la población de peces.

2. Genética poblacional

La genética poblacional es el estudio de rasgos hereditarios en una población. Un rasgo hereditario específico tiene dos posibilidades: una dominante, tal como los ojos café y una recesiva, como los ojos azules.[9] Denotemos por b el gen responsable del rasgo recesivo, y B denota el gen responsable del rasgo dominante. Cada miembro de la población tiene un par de estos genes, ya sea BB (individuos dominantes), bb (individuos recesivos), o Bb (individuos híbridos). La *frecuencia del gen b* es el número total de genes b en la población dividido entre el número total de todos los genes (b y B) que controlan este rasgo. La frecuencia del gen es esencialmente constante cuando no hay mutaciones o influencias externas en la población. En este proyecto, consideremos el efecto de mutaciones sobre la frecuencia de genes.

Denotemos por q la frecuencia de genes del gen b. Entonces q está entre 0 y 1 (puesto que es una fracción del todo) y, como b y B son los únicos genes que influyen sobre este rasgo, la frecuencia de genes del gen B es $1 - q$. Sea t el tiempo medido en generaciones. Suponga que cada generación, una fracción de k_1 de los genes b mutan para convertirse en genes B, y una fracción k_2 de los genes B mutan para transformarse en genes b.

(a) Explique por qué la frecuencia del gen q satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{dq}{dt} = -k_1 q + k_2(1-q).$$

(a) Si $k_1 = 0.0001$ y $k_2 = 0.0004$, simplifique la ecuación diferencial en q y resuélvala. Suponga que el valor inicial es q_0. Trace las soluciones con $q_0 = 0.1$ y $q_0 = 0.9$. ¿Cuál es el valor de equilibrio de q? Explique cómo puede usted afirmar que la frecuencia de genes se aproxima cada vez más al valor de equilibrio a medida que pasan las generaciones. Explique cómo puede saber que el valor de equilibrio está determinado completamente por las razones relativas de mutación.

(a) Repita el inciso (b) si $k_1 = 0.00003$ y $k_2 = 0.00001$.

[9]Adaptado de C. C. Li, *Population Genetics*, University of Chicago Press, Chicago, 1995.

Capítulo 11

SERIES GEOMÉTRICAS

En este capítulo veremos las *series geométricas* y sus aplicaciones. Una serie geométrica es una suma en la cual cada término es un múltiplo constante del término anterior. Analizaremos sumas de series geométricas con un número de términos finito y con un número de términos infinito.

En la sección 11.1 presentamos las series geométricas. En la sección 11.2 analizamos las aplicaciones de las series geométricas en los negocios y la economía, por ejemplo las anualidades y el efecto multiplicador. En la sección 11.3 vemos aplicaciones en las ciencias de la vida, por ejemplo la repetición de dosis de medicamento.

11.1 SERIES GEOMÉTRICAS

Repetición de dosis de un medicamento

La malaria es una infección parasitaria transmitida por las mordidas del mosquito, principalmente en las regiones tropicales del mundo. La enfermedad ha existido desde tiempos remotos y en la actualidad se presentan cientos de millones de casos al año, con millones de muertes. Alrededor de 1630, los jesuitas de Perú introdujeron la corteza del árbol de quina en el Occidente como primer tratamiento para la malaria. La quinina es el ingrediente activo de la corteza, y en el presente todavía se utiliza.

Supongamos que a una persona se le da una dosis de quinina de 50 mg diariamente a la misma hora para prevenir la malaria. Después de la primera dosis, esa persona tiene 50 mg de quinina en el cuerpo. ¿Qué pasa después de la segunda dosis? Cada día, el cuerpo de la persona metaboliza parte de la quinina, de tal forma que, después de un día, permanece el 23% de la cantidad original. Después de la segunda dosis, la cantidad de quinina en el cuerpo es la cantidad de la segunda dosis (50 mg) más lo que resta de la primera dosis ($50 \cdot 0.23 = 11.5$ mg) de un total de 61.5 mg.

Sea Q_n la cantidad, en mg, de quinina en el cuerpo inmediatamente después de la *n-ésima* dosis. Entonces

Q_1 = Primera dosis = 50.

Q_2 = Segunda dosis + restos de la primera dosis = 50 + 50(0.23) = 61.5.

Q_3 = Tercera dosis + restos de las dosis anteriores = 50 + 61.5(0.23) = 64.145.

Observe que podemos desglosar la expresión para Q_3 y mostrar las contribuciones de la primera y la segunda dosis por separado:

$$Q_3 = 50 + 61.5(0.23) = 50 + (50 + 50(0.23))(0.23)$$
$$Q_3 = 50 + 50(0.23) + 50(0.23)^2,$$

por tanto, tenemos

Q_3 = tercera dosis + restos de la segunda dosis + restos de la primera dosis.

La forma desglosada de Q_3 nos permite deducir las fórmulas de los siguientes valores de Q_n:

$$Q_4 = 50 + 50(0.23) + 50(0.23)^2 + 50(0.23)^3 = 64.753.$$
$$Q_5 = 50 + 50(0.23) + 50(0.23)^2 + 50(0.23)^3 + 50(0.23)^4 = 64.893.$$
$$Q_6 = 50 + 50(0.23) + 50(0.23)^2 + 50(0.23)^3 + 50(0.23)^4 + 50(0.23)^5 = 64.925.$$
$$\vdots$$
$$Q_{10} = 50 + 50(0.23) + 50(0.23)^2 + \cdots + 50(0.23)^8 + 50(0.23)^9 = 64.935.$$

Al comparar los valores de Q_6 y Q_{10} observamos que la cantidad parece estabilizarse alrededor de 64.9 mg. Véase la figura 11.1. Advierta que aunque hemos calculado Q_6 y Q_{10} con diversas cifras decimales, no hay diferencia práctica entre los valores que están muy cercanos.

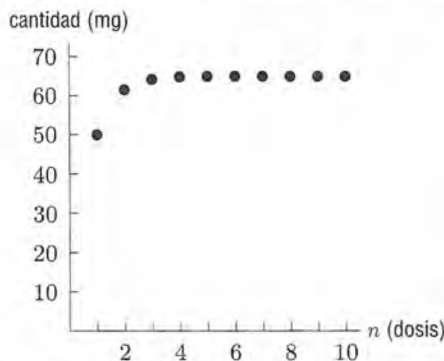


Figura 11.1. La cantidad de quinina se estabiliza.

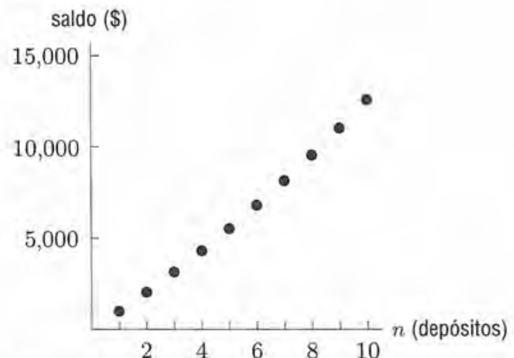


Figura 11.2. El saldo bancario crece sin límite (o cota).

Depósitos constantes en una cuenta de ahorros

Las personas que ahorran dinero con frecuencia depositan de modo regular en su cuenta una cantidad fija. Suponga que cada año se depositan $1,000 en una cuenta de ahorros que gana 5% de interés al año compuesto continuamente. Sea B_n el balance, en dólares, en la cuenta inmediatamente después de *n-ésimo* depósito. Entonces

B_1 = Primer depósito = 1,000.
B_2 = Segundo depósito + cantidad del primer depósito = 1,000 + 1,000(1.05) = 2,050.
B_3 = Tercer depósito + cantidad de los depósitos anteriores = 1,000 + 2,050(1.05) = 3,152.5.

Igual que antes, desglosamos B_3 para mostrar las contribuciones del primer y segundo depósitos por separado:

$$B_3 = 1{,}000 + 2{,}050(1.05) = 1{,}000 + (1{,}000 + 1{,}000(1.05))(1.05)$$
$$B_3 = 1{,}000 + 1{,}000(1.05) + 1{,}000(1.05)^2$$
B_3 = Tercer depósito + cantidad del segundo depósito + cantidad del tercer depósito.

La fórmula desglosada de B_3 hace posible deducir las fórmulas para B_6 y B_{10}. Al evaluar obtenemos:

$$B_6 = 1{,}000 + 1{,}000(1.05) + 1{,}000(1.05)^2 + 1{,}000(1.05)^3 + 1{,}000(1.05)^4 + 1{,}000(1.05)^5 = 6{,}801.91.$$
$$B_{10} = 1{,}000 + 1{,}000(1.05) + 1{,}000(1.05)^2 + \cdots + 1{,}000(1.05)^8 + 1{,}000(1.05)^9 = 12{,}577.89.$$

Observe que el saldo está creciendo sin límite. Véase la figura 11.2.

Serie geométrica finita

En los dos ejemplos anteriores vimos sumas de la forma $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^8 + ar^9$. A dicha suma se le denomina *serie geométrica finita*. Una serie geométrica es una suma en la que cada término es un múltiplo constante del anterior. El primer término es a, y el multiplicador constante, o razón común, de los términos sucesivos es r.

> Una **serie geométrica finita** con n términos tiene (para n un entero positivo) la forma
> $$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}.$$

Suma de una serie geométrica finita

Para el ejemplo de la quinina, supongamos que deseamos encontrar Q_{40}, la cantidad en el cuerpo después de 40 dosis:

$$Q_{40} = 50 + 50(0.23) + 50(0.23)^2 + \cdots + 50(0.23)^{38} + 50(0.23)^{39}.$$

Para calcular a Q_{40} aparentemente tenemos que sumar 40 términos, pero por fortuna hay una manera más sencilla de hacer esto.

Sea S_n la suma de los primeros n términos de la serie, es decir, hasta el término ar^{n-1}:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}.$$

Al multiplicar ambos lados por r tenemos

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Ahora reste rS_n de S_n, lo que cancela todos los términos excepto dos; da como resultado

$$S_n - rS_n = a - ar^n,$$

por tanto

$$(1 - r)S_n = a(1 - r^n).$$

Asumiendo $r \neq 1$, podemos despejar S_n. El resultado se denomina una *forma cerrada* de S_n.

La **suma de una serie geométrica finita** está dada por

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad \text{suponiendo que } r \neq 1.$$

Observe que el valor de n en la fórmula es el número de términos en la suma S_n.

Ejemplo 1 En el ejemplo de la quinina, calcule e interprete Q_{40} y Q_{100}.

Solución Anteriormente vimos que

$$Q_{40} = 50 + 50(0.23) + 50(0.23)^2 + \cdots + 50(0.23)^{39}.$$

Ésta es una serie geométrica finita con $a = 50$ y $r = 0.23$. Si usamos la fórmula para la suma con $n = 40$, tenemos

$$Q_{40} = \frac{50(1-(0.23)^{40})}{1-0.23} = 64.935.$$

La cantidad de quinina justo después de la 40va dosis es de 64.935 mg.

Análogamente, cuando utilizamos $n = 100$ tenemos

$$Q_{100} = \frac{50(1-(0.23)^{100})}{1-0.23} = 64.935.$$

Inmediatamente después de la 100va dosis, la cantidad de quinina aún es de 64.935 mg. Redondeada a tres cifras decimales la cantidad parece haberse estabilizado.

Ejemplo 2 En el ejemplo del depósito bancario, calcule e interprete B_{40} y B_{100}.

Solución Tenemos

$$B_{40} = 1{,}000 + 1{,}000(1.05) + 1{,}000(1.05)^2 + \cdots + 1{,}000(1.05)^{39}.$$

Ésta es una serie geométrica finita con $a = 1{,}000$ y $r = 1.05$. La fórmula para la suma con $n = 10$ da

$$B_{40} = \frac{1{,}000(1-(1.05)^{40})}{1-1.05} = 120{,}799.77.$$

El saldo de la cuenta justo después del 40vo depósito es de \$120,799.77.

De igual manera, si empleamos $n = 100$, tenemos

$$B_{100} = \frac{1{,}000(1-(1.05)^{100})}{1-1.05} = 2{,}610{,}025.16.$$

Inmediatamente después del 100° depósito, el saldo de la cuenta es de \$2,610,025.16. El interés compuesto ha aumentado la inversión de \$100,000 a más de \$2 millones.

Series geométricas infinitas

Supongamos que una serie geométrica finita consta de n términos. ¿Qué pasa cuando $n \to \infty$? Tenemos una serie geométrica infinita que continúa indefinidamente.

Una **serie geométrica infinita** tiene la forma

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n + \cdots.$$

Los "..." al final de la serie indican que la serie continúa indefinidamente, es decir, ésta es infinita.

Suma de una serie geométrica infinita

Dada una serie geométrica infinita

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots,$$

a la suma de los primeros n términos la denominamos *suma parcial*, denotada por S_n. Para calcular S_n usamos la fórmula

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

¿Qué le sucede a S_n cuando $n \to \infty$? Depende del valor de r. Si $|r| < 1$, es decir, $-1 < r < 1$, entonces $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, de tal forma que cuando $n \to \infty$,

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \to \frac{a(1 - 0)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}.$$

Por tanto, dado $|r| < 1$, cuando $n \to \infty$, las sumas parciales S_n se aproximan al límite $a/(1 - r)$. Cuando esto ocurre, se define la suma de la serie infinita por este límite y decimos que la serie *converge* con $a/(1 - r)$.

> Para $|r| < 1$, la **suma de la serie geométrica infinita** está dada por
>
> $$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n + \cdots = \frac{a}{1 - r}.$$

Si, por otra parte, $|r| > 1$, entonces r^n y las sumas parciales no tienen límite cuando $n \to \infty$ (si $a \neq 0$). En este caso, decimos que la serie *diverge*. Si $r > 1$, los términos en la serie son cada vez mayores en magnitud y las sumas parciales divergen a $+\infty$ si $a > 0$, o a $-\infty$ si $a < 0$. Si $r < -1$, los términos crecen en magnitud, las sumas parciales fluctúan a medida que $n \to \infty$, y la serie diverge.

¿Qué pasa si $r = 1$? La serie es

$$a + a + a + a + \cdots,$$

por tanto, si $a \neq 0$, las sumas parciales crecen sin límite y la serie no converge. Si $r = -1$, la serie es

$$a - a + a - a + a - \cdots,$$

y, si $a \neq 0$, las sumas parciales oscilan entre a y 0, y la serie no converge.

Ejemplo 3 Para cada una de las siguientes series infinitas, determine las primeras tres sumas parciales y la suma (si es que existe).

(a) $10 + 10(0.75) + 10(0.75)^2 + \cdots$

(b) $250 + 250(1.2) + 250(1.2)^2 + \cdots$

Solución **(a)** Ésta es una serie geométrica infinita con $a = 10$ y $r = 0.75$. Las primeras tres sumas parciales son:

$$S_1 = 10.$$
$$S_2 = 10 + 10(0.75) = 10 + 7.5 = 17.5.$$
$$S_3 = 10 + 10(0.75) + 10(0.75)^2 = 10 + 7.5 + 5.625 = 23.125.$$

Puesto que $|r| < 1$, la serie converge y la suma es

$$S = \frac{a}{1 - r} = \frac{10}{1 - 0.75} = 40.$$

Si hallamos sumas parciales para n cada vez mayores, éstas se aproximan cada vez más a 40 (véase el problema 18).

(b) Ésta es una serie geométrica infinita con $a = 250$ y $r = 1.2$. Las primeras tres sumas parciales son:

$$S_1 = 250.$$
$$S_2 = 250 + 250(1.2) = 250 + 300 = 550.$$
$$S_3 = 250 + 250(1.2) + 250(1.2)^2 = 250 + 300 + 360 = 910.$$

Como $r > 1$, la serie diverge y las sumas parciales crecen sin límite (véase el problema 19).

Ejemplo 4 Si una persona toma dosis de quinina de 50 mg diariamente por tiempo indefinido, encuentre, a largo plazo, la cantidad de quinina en el cuerpo de dicha persona justo después de que toma una dosis y justo antes de que se la tome.

Solución Como la quinina se suministra por tiempo indefinido, con base en el ejemplo 1 sabemos que la cantidad a largo plazo de quinina en el cuerpo, justo después de una dosis, está dada por

$$Q = 50 + 50(0.23) + 50(0.23)^2 + \cdots.$$

Ésta es una serie geométrica infinita con $a = 50$ y $r = 0.23$. Como $-1 < r < 1$, la serie converge a una suma finita dada por

$$Q = \frac{a}{1-r} = \frac{50}{1-0.23} = 64.935.$$

La cantidad a largo plazo de quinina en el cuerpo justo después de una dosis es de 64.935 mg. La cantidad se estabiliza hacia este valor en la figura 11.1. De hecho, después de diez dosis la cantidad ya coincide con el valor de largo plazo redondeado a tres cifras decimales, puesto que $Q_{10} = 64.935$.

¿Cuál es la cantidad, a largo plazo, de quinina justo después de que se suministra una dosis? Como una dosis consta de 50 mg, la cantidad de quinina en el cuerpo exactamente antes de una dosis es $64.935 - 50 = 14.935$ mg. Por tanto, a largo plazo el nivel de quinina fluctúa entre 15 mg y 65 mg.

Ejemplo 5 Suponga que depositamos $1,000 al año por tiempo indefinido en la cuenta bancaria del ejemplo 2. ¿El saldo se estabiliza en una cantidad fija? Explique.

Solución Debido a que los depósitos se realizan durante un tiempo indefinido, la cantidad en la cuenta después de hacer un depósito está representada por la suma

$$B = 1{,}000 + 1{,}000(1.05) + 1{,}000(1.05)^2 + \cdots.$$

Ésta es una serie geométrica infinita con $a = 1{,}000$ y $r = 1.05$. Como r es mayor que 1, la serie diverge. Esto tiene sentido, porque si sigue depositando $1,000 en la cuenta, el saldo crecerá sin límite, incluso si usted no gana intereses. Esto relaciona la figura 11.2 con el ejemplo 2.

Problemas para la sección 11.1

1. Encuentre la suma de la serie de dos maneras: sumando los términos y utilizando la fórmula de series geométricas.

$$50 + 50(0.9) + 50(0.9)^2 + 50(0.9)^3$$

En los problemas 2 al 13, encuentre la suma, si es que existe.

2. $500 + 500(0.6) + 500(0.6)^2 + \cdots + 500(0.6)^{15}$
3. $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$
4. $20 + 20(1.4) + 20(1.4)^2 + \cdots + 20(1.4)^8$
5. $30 + 30(0.85) + 30(0.85)^2 + 30(0.85)^3 + \cdots$
6. $1{,}000 + 1{,}000(1.08) + 1{,}000(1.08)^2 + 1{,}000(1.08)^3 + \cdots$
7. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^8}$
8. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$
9. $200 + 100 + 50 + 25 + 12.5 + \cdots$
10. $1{,}000 + 1{,}500 + 2{,}250 + 3{,}375 + 5{,}062.5 + \cdots$
11. $25 + 25(0.2) + 25(0.2)^2 + 25(0.2)^3 + \cdots$
12. $-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$
13. $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{3}{2^{10}}$
14. Cada año una familia deposita $5,000 en una cuenta que gana un interés anual de 8.12% compuesto anualmente. ¿Cuánto dinero hay en la cuenta justo después del 20vo depósito?

15. Cada mes se depositan $500 en una cuenta que gana un interés mensual de 0.5% compuesto mensualmente.

(a) ¿Cuánto dinero hay en la cuenta justo después del 6[to] depósito? ¿Justo antes de que se realice el 6[to] depósito?

(b) ¿Cuánto dinero hay en la cuenta justo después del 12[vo] depósito? ¿Justo antes de que se realice el 12[vo] depósito?

16. Cada mañana, se le aplica a un paciente una inyección de 25 mg de un medicamento antiinflamatorio, y 40% del medicamento permanece en el cuerpo después de 24 horas. Determine la cantidad que hay en el cuerpo:

(a) Justo antes de la 3ª inyección.

(b) Inmediatamente después de la 6ª inyección.

(c) A largo plazo, justo después de una inyección.

17. Se suministra diariamente una dosis de 100 mg de un medicamento. Después de 24 horas, el 82% de la dosis del día anterior permanece en el cuerpo. ¿Qué cantidad de medicamento habrá en el cuerpo a largo plazo, justo después y justo antes de que éste sea administrado?

18. En el ejemplo 3(a) encontramos las sumas parciales de la serie geométrica con $a = 10$ y $r = 0.75$ y demostramos que la suma de esta serie era 40. Determine las sumas parciales S_n para $n = 5, 10, 15, 20$. A medida que n se hace cada vez más grande, ¿las sumas parciales parecen aproximarse a 40?

19. En el ejemplo 3(b) encontramos las sumas parciales de la serie geométrica con $a = 250$ y $r = 1.2$. Determine las sumas parciales S_n para $n = 5, 10, 15, 20$. A medida que n se hace cada vez más grande, ¿las sumas parciales parecen crecer sin límite, como es de esperarse, si $r > 1$?

20. En el ejemplo 4 vimos que si se suministra una dosis de 50 mg de quinina cada 24 horas, la cantidad de quinina que hay en el cuerpo a largo plazo es de unos 65 mg justo después de una dosis, y de unos 15 mg justo antes de suministrar una dosis. La concentración de quinina en el cuerpo se mide en mg por kilogramo de peso corporal. Para que sea efectiva, la concentración promedio de quinina en el cuerpo debe ser por lo menos de 0.4 mg/kg. Las concentraciones superiores a 3.0 mg/kg no son seguras.

(a) Estime la cantidad promedio de quinina que habrá en el cuerpo a la larga, si promediamos las cantidades a largo plazo justo después de suministrar una dosis, y justo antes de que esto suceda.

(b) Encuentre la concentración promedio para una persona de 70 kilogramos. ¿Este tratamiento es seguro y efectivo para ella?

(c) ¿En qué rango de pesos este tratamiento produciría a largo plazo una concentración promedio que sea

(i) muy baja? (ii) no segura?

11.2 APLICACIONES A NEGOCIOS Y A LA ECONOMÍA

Anualidades

Una *anualidad* es una secuencia de pagos o depósitos de la misma cantidad que se realizan en intervalos regulares durante tiempo indefinido, o en un periodo específico de tiempo. Se puede utilizar la suma de una serie geométrica para calcular el valor total de una anualidad.

Ejemplo 1 Una anualidad gana $5,000 al año en una cuenta que produce un interés anual de 7% compuesto anualmente. ¿Cuál es el saldo de la cuenta justo después del 10[mo] depósito?

Solución El 10[mo] depósito contribuye con $5,000 al saldo. El depósito anterior había ganado intereses durante un año, por lo que contribuye con $5,000(1.07). El depósito del año anterior generó intereses durante dos años, por tanto, contribuye con $\$5{,}000(1.07)^2$. Al continuar, observamos que

$$\text{Balance después del } 10^{\text{mo}} \text{ depósito} = 5{,}000 + 5{,}000(1.07) + 5{,}000(1.07)^2 + \cdots + 5{,}000(1.07)^9.$$

Esta suma es una serie geométrica infinita con $a = 5{,}000$ y $r = 1.07$. Utilizamos la fórmula para la suma con $n = 10$.

$$\text{Balance después del } 10^{\text{mo}} \text{ depósito} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{5{,}000(1-(1.07)^{10})}{1-1.07} = 69{,}082.24.$$

El balance de la cuenta justo después del 10° depósito es de $69,082.24.

Valor presente de una anualidad

El *valor presente de una anualidad* es la cantidad de dinero que se debe depositar ahora para tener una serie de pagos fijos en el futuro. ¿Cómo podemos calcular este valor presente? Iniciamos considerando

un solo pago. Suponga que se hará un pago de $1,000 en tres años desde una cuenta que gana una tasa de 8% de interés al año compuesta anualmente. El valor presente es la cantidad P, tal que

$$1{,}000 = P(1.08)^3,$$

por lo que tenemos

$$\text{Valor presente} = P = 1{,}000(1.08)^{-3}.$$

Para determinar el valor presente de cuatro pagos de $1,000, uno de los cuales se realiza ahora, otro en un año, uno más en dos años y el último en tres años, se suman sus valores presentes. Con el mismo interés de 8% tenemos

$$\text{Valor presente de los cuatro pagos} = 1{,}000 + 1{,}000(1.08)^{-1} + 1{,}000(1.08)^{-2} + 1{,}000(1.08)^{-3}.$$

Este patrón permite calcular el valor presente de cualquier anualidad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Una cuenta gana 8% de interés al año compuesto anualmente. A partir de ahora, se hacen 20 pagos de $10,000 cada uno y una vez al año cada pago. ¿Cuánto hay que depositar en la cuenta ahora para cubrir estos pagos? Es decir, ¿cuál es el valor presente de esta anualidad?

Solución El valor presente del pago que se hace inmediatamente es de $10,000. El valor presente del pago del siguiente año es $\$10{,}000(1.08)^{-1}$. Como el 20vo pago se realiza en 19 años, el valor presente del 20vo pago es de $\$10{,}000(1.08)^{-19}$. El valor presente, P, de la anualidad total, en dólares, es la suma de

$$P = 10{,}000 + 10{,}000(1.08)^{-1} + 10{,}000(1.08)^{-2} + \cdots + 10{,}000(1.08)^{-19}.$$

Al reescribir $(1.08)^{-2} = ((1.08)^{-1})^2$ y $(1.08)^{-3} = ((1.08)^{-1})^3$ y así sucesivamente, se muestra que P es la suma de la serie geométrica finita

$$P = 10{,}000 + 10{,}000(1.08)^{-1} + 10{,}000((1.08)^{-1})^2 + \cdots + 10{,}000((1.08)^{-1})^{19}.$$

Utilizamos la fórmula de la suma con $a = 10{,}000$ y $r = (1.08)^{-1}$ y $n = 20$, lo que da como resultado

$$\text{Valor presente} = P = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{10{,}000(1-((1.08)^{-1})^{20})}{1-(1.08)^{-1}} = 106{,}035.99.$$

Por tanto, hay que depositar $106,035.99 ahora para cubrir los pagos de esta anualidad. Observe que la anualidad genera un total de $20 \cdot \$10{,}000 = \$200{,}000$, por lo que el valor presente es considerablemente menor a la cantidad que se pagará.

Ejemplo 3 La anualidad en el ejemplo 2 ahora genera pagos anuales de $10,000 por tiempo indefinido (es decir, para siempre), en lugar de sólo 20 veces. ¿Cuál es el valor presente de esta anualidad?

Solución Como los pagos se realizan por tiempo indefinido, el valor presente está dado por la suma infinita:

$$\text{Valor presente} = 10{,}000 + 10{,}000(1.08)^{-1} + 10{,}000((1.08)^{-1})^2 + 10{,}000((1.08)^{-1})^3 + \cdots.$$

Ésta es una serie geométrica infinita con $a = 10{,}000$ y $r = (1.08)^{-1} = 0.925926$. Como $-1 < r < 1$, esta serie converge a una suma finita. Tenemos

$$\text{Valor presente} = \frac{a}{1-r} = \frac{10{,}000}{1-(1.08)^{-1}} = 135{,}000.$$

El valor presente de esta anualidad en perpetuidad es de $135,000. Advierta que la cantidad necesaria para realizar los pagos por siempre sólo es de aproximadamente $29,000, más de la cantidad necesaria para hacer 20 pagos anuales. Éste es el poder del interés compuesto.

El efecto multiplicador

Un gobierno decide ofrecer una rebaja en los impuestos para estimular la economía. ¿Cuál es el efecto total de la rebaja en el gasto? Como la parte de la rebaja que gasta una persona en particular se convierte en el ingreso de otra persona, y la proporción que ésta gasta se transforma entonces en el ingreso de otra persona más, y así sucesivamente, el efecto total de la rebaja en la economía es mucho mayor que el tamaño mismo de la rebaja. A esto se le conoce como *efecto multiplicador*.

Ejemplo 4 Un gobierno aplica rebajas de impuestos que suman un total de 3 mil millones de dólares. Cada uno de los que recibe el dinero gasta el 75% y ahorra el 25% restante. Calcule el gasto adicional total que resulta de esta rebaja de impuestos.

Solución El gasto adicional se refiere a todo el dinero adicional que gastan los consumidores como resultado de esta rebaja de impuestos. Los receptores de los 3 mil millones de dólares gastan 75% de lo que reciben, para un total de 2.25 mil millones de dólares. (Observe que la cantidad gastada inicialmente es de 3(0.75) = 2.25 mil millones de dólares, no 3 mil millones de dólares.) Los que reciben estos 2.25 mil millones de dólares gastan el 75%, o sea 2.25(0.75) = 1.6875 mil millones de dólares. Los receptores de este dinero gastan el 75%, y así indefinidamente. Por tanto,

$$\text{Gasto adicional total} = 2.25 + 2.25(0.75) + 2.25(0.75)^2 + 2.25(0.75)^3 + \cdots \text{ billones de dólares.}$$

Ésta es una serie geométrica infinita con $a = 2.25$ y $r = 0.75$. Como $-1 < r < 1$, esta serie finita converge a una suma finita. Tenemos

$$\text{Gasto adicional total} = \frac{a}{1-r} = \frac{2.25}{1-0.75} = 9 \text{ miles de millones de dólares.}$$

Por tanto, con base en estas suposiciones, una rebaja de 3 mil millones de dólares en los impuestos genera 9 mil millones de dólares de gasto adicional.

Estabilización del mercado

Suponga que un fabricante produce un número fijo de artículos al año, y que cada año un porcentaje fijo de esos artículos (sin importar su fecha de fabricación) falla o está en desuso. El número total de artículos que están en uso a la larga, después que se lleva a cabo la producción anual, se denomina *punto de estabilización del mercado*.

Ejemplo 5 La casa de moneda de Estados Unidos produce unos 13 mil millones de monedas de un centavo al año, y aproximadamente el 10% son retiradas de la circulación cada año.[1] ¿Aproximadamente cuántos centavos están en circulación?

Solución Supongamos que la casa de moneda produce 13 mil millones de centavos al año. Cada año hay 13 mil millones de centavos más 13(0.9) mil millones de centavos que quedan del año anterior (puesto que sólo el 10% se retiró de la circulación). Hay $13(0.9)^2$ mil millones de centavos que quedaron de los dos años anteriores, y así sucesivamente. Si N es el número de centavos en circulación, en miles de millones, entonces

$$N = 13 + 13(0.9) + 13(0.9)^2 + \cdots.$$

Ésta es una serie geométrica infinita con $a = 13$ y $r = 0.9$. Como $-1 < r < 1$, las series convergen, y su suma se da por

$$N = \frac{a}{1-r} = \frac{13}{1-0.9} = 130.$$

Por tanto, actualmente hay unos 130 mil millones de centavos en circulación. El mercado se ha estabilizado en 130 mil millones de centavos.

---

[1]Tomado de www.pennies.org/pennyfacts.html

Problemas para la sección 11.2

1. Supongamos que se depositan anualmente $1,000 en una cuenta bancaria que genera 8.5% de interés al año compuesto anualmente. ¿Cuál es el saldo de la cuenta justo después del 20vo depósito? ¿Qué parte del saldo proviene de los depósitos anuales y qué parte proviene del interés?
2. Se realizan depósitos anuales de $2,000 en una cuenta que gana un interés de 6% al año compuesto continuamente. ¿Cuál es el saldo de la cuenta después y antes de que se haga el 5to depósito?
3. Una anualidad que genera 0.5% al mes compuesta anualmente, hará 36 pagos mensuales de $1,000 a partir de ahora. ¿Cuál es el valor presente de esta anualidad?
4. Un donador hace una donación para financiar una beca escolar anual de $10,000. La donación genera 6% de interés al año compuesto anualmente. Determine la cantidad que hay que depositar ahora si la donación financiará un premio cada año, a partir de este momento y a futuro.
   - **(a)** Hasta que se entreguen 20 becas.
   - **(b)** Para siempre.
5. Una anualidad paga anualmente $50,000 a partir de ahora, de una cuenta que genera un interés de 7.2% al año compuesto anualmente. Encuentre el valor presente de la anualidad si ésta se realiza en
   - **(a)** Diez pagos.
   - **(b)** Pagos a perpetuidad.
6. Se harán 20 pagos anuales de $5,000 cada uno, con el primer pago en un año a partir del momento presente, de una cuenta que genera un interés de 10% al año compuesto anualmente. ¿Cuánto hay que depositar ahora para cubrir los pagos?
7. Se hace un depósito de $100,000 en una cuenta que gana un interés de 8% al año compuesto anualmente. Se retirarán de la cuenta pagos anuales de $10,000 a partir de ahora. ¿Cuántos pagos se pueden hacer antes de que el dinero de la cuenta se agote?
8. Para estimular la economía el gobierno aplica una rebaja de impuestos que suma en total 5 mil millones de dólares. Encuentre el gasto adicional total que resulta de esta rebaja de impuestos si cada uno de los que recibe el dinero gasta el
   - **(a)** 80% de éste.
   - **(b)** 90% de éste.
9. Un gobierno otorga una rebaja de impuestos de N dólares para estimular la economía. Cada uno de los que recibe el dinero gasta una fracción fija, k, del dinero recibido, con $0 < k < 1$.
   - **(a)** Encuentre una fórmula (en términos de N y k) para el gasto total adicional que da como resultado la rebaja de impuestos.
   - **(b)** Si $k = 0.85$, ¿cuál es el gasto adicional total como múltiplo del tamaño, N, de la rebaja de impuestos?
10. Localice el punto de estabilización del mercado de un producto si se fabrican 10,000 nuevos artículos cada año, y el 25% del número total de artículos que están en uso dejan de funcionar cada año.
11. Supongamos que un empresario le paga a usted 1 centavo el primer día que trabaja, y a partir de entonces le duplica diariamente el salario. Determine sus ganancias totales después de que usted trabaja los siete días de la semana durante
    - **(a)** Una semana
    - **(b)** Dos semanas
    - **(c)** Tres semanas
    - **(d)** Cuatro semanas
12. Una empleada acepta un trabajo con un salario inicial de $30,000 y un aumento de 4% anual por el costo de la vida, durante los siguientes 10 años. ¿Cuál es el salario de la empleada al inicio del 11vo año y cuáles son sus ganancias totales durante los primeros 10 años?
13. La Oficina de Grabado e Imprenta produce unos 18 millones de billetes al día; los bancos de la Reserva Federal retiran de la circulación los billetes viejos. Actualmente están en circulación unos 4 mil millones de billetes de un dólar. Supongamos que cada día se saca de la circulación un porcentaje fijo de los billetes de $1; utilice una serie geométrica para estimar este porcentaje.[2]
14. Cada año una compañía vende 1,000 artículos; sin embargo, el 20% del total en uso falla.
    - **(a)** Encuentre el punto de estabilización del mercado para este producto.
    - **(b)** Al aproximarse muy lentamente al punto de estabilización, el número de artículos en uso quizá no se acerque a este valor debido a que las condiciones del mercado cambian primero. Elabore una tabla para el número, S_n, de unidades en uso justo después de que termina la producción anual, con $n = 5, 10, 15, 20$, para ver qué tan rápido se aproxima este mercado al punto de estabilización.

11.3 APLICACIONES A LAS CIENCIAS DE LA VIDA

Dosis repetidas de medicamento

A un paciente se le administran dosis un número discreto de veces de una sustancia en intervalos de tiempo regulares. Puesto que su cuerpo metaboliza parte de cada dosis y la elimina durante cada intervalo de tiempo, vimos en la sección 11.1 que la cantidad de medicamento en el cuerpo se estabiliza hacia un *estado estacionario*. En el estado estacionario, la cantidad de medicamento en el cuerpo varía entre un nivel máximo, inmediatamente después de tomar una dosis, y un nivel mínimo, justo antes de tomar la dosis. En el estado estacionario, la cantidad eliminada en un intervalo de dosificación es igual a la cantidad de una dosis (véase el problema 12).

[2] www.factmonster.com/ipka/A0774850.html y www.ustreas.gov/usss/index.htm?money-damaged.htm

Ejemplo 1 Supongamos que una persona con una infección en el oído toma una tableta de 200 mg de ampicilina cada cuatro horas. Aproximadamente 12% del medicamento permanece en el cuerpo al final de las cuatro horas. ¿Cuál es la cantidad de ampicilina en el cuerpo

(a) inmediatamente después de tomar la tercera tableta? **(b)** justo después de tomar la sexta tableta?
(c) en el nivel del estado estacionario, justo después y justo antes de tomar una tableta?

Solución Sea Q_n la cantidad de ampicilina, en mg, en el cuerpo inmediatamente después de tomar la *n-ésima* tableta. Tenemos

$$Q_n = 200 + 200(0.12) + 200(0.12)^2 + \cdots + 200(0.12)^{n-1}.$$

Empleamos la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita con $a = 200$ y $r = 0.12$.

(a) Cuando usamos $n = 3$, tenemos

$$Q_3 = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{200(1-(0.12)^3)}{1-0.12} = 226.88 \text{ mg}.$$

(b) Si usamos $n = 6$, tenemos

$$Q_6 = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{200(1-(0.12)^6)}{1-0.12} = 227.2720 \text{ mg}.$$

(c) El nivel del estado estacionario, la cantidad Q en mg, justo después de tomar una tableta, es la suma de la serie geométrica infinita.

$$Q = 200 + 200(0.12) + 200(0.12)^2 + 200(0.12)^3 + \cdots.$$

Como $r = 0.12$, y $-1 < r < 1$, la serie converge a una suma finita:

$$\text{Nivel estacionario justo después de una dosis} = Q = \frac{a}{1-r} = \frac{200}{1-0.12} = 227.2727 \text{ mg}.$$

En la respuesta al inciso (b), vemos que la cantidad de ampicilina en el cuerpo está casi en el nivel del estado estacionario después de tomar sólo seis tabletas.

En el estado estacionario, la cantidad de ampicilina que hay en el cuerpo justo antes de una dosis es exactamente una dosis menos que la cantidad justo después de la dosis, por tanto,

$$\begin{aligned}\text{Nivel del estado estacionario antes de una dosis} &= \text{nivel del estado estacionario} \\ &\quad\ \text{después de una dosis} - \text{tamaño de una dosis} \\ &= 227.2727 - 200 \\ &= 27.2727 \text{ mg}.\end{aligned}$$

El problema 3 muestra cómo podemos utilizar esta relación para calcular Q, el nivel de ampicilina a la larga.

Ejemplo 2 El ácido valproico es un medicamento que se usa para controlar la epilepsia, y tiene una vida media de 15 horas. Si se toman D mg de ácido valproico cada 12 horas, ¿cuál es el nivel del estado estacionario del medicamento inmediatamente después de tomar una tableta?

Solución Después de una sola dosis D, la cantidad, Q, de ácido valproico en el cuerpo decrece exponencialmente, por lo que $Q = Db^t$, donde t es el tiempo en horas. Como la vida media es de 15 horas, despejamos b en la ecuación

$$\begin{aligned}0.5D &= Db^{15} \\ 0.5 &= b^{15} \\ b &= (0.5)^{1/15}.\end{aligned}$$

Como las dosis se administran cada 12 horas, deseamos saber qué fracción del medicamento permanece después de 12 horas. Si utilizamos $t = 12$, tenemos

$$\text{Fracción que permanece después de 12 horas} = b^{12} = ((0.5)^{1/15})^{12} = (0.5)^{12/15} = (0.5)^{0.8}.$$

Supongamos que a un paciente se le suministra una dosis de D mg de ácido valproico cada 12 horas, el nivel del estado estacionario justo después de tomar una tableta está dado por

$$\text{Nivel del estado estacionario} = D + D(0.5)^{0.8} + D\left((0.5)^{0.8}\right)^2 + \cdots$$

Ésta es una serie geométrica infinita con $r = (0.5)^{0.8} = 0.57435$. Como $-1 < r < 1$, la serie converge y la suma es

$$\text{Nivel del estado estacionario} = \frac{D}{1-(0.5)^{0.8}} = 2.35D.$$

Por tanto, el nivel del estado estacionario inmediato después de tomar una dosis es aproximadamente 2.35 veces la cantidad de la dosis.

Acumulación de toxinas en el cuerpo

Las toxinas o venenos que hay en los herbicidas o en los pesticidas pueden ingresar en la cadena alimenticia y acumularse en el cuerpo de las personas a través de los alimentos que comen. Se puede utilizar una serie geométrica para calcular la acumulación total de un veneno en el cuerpo.

Ejemplo 3 Supongamos que diariamente una persona ingiere cinco microgramos de una toxina, que su cuerpo elimina a una razón continua de 2% al día. A la larga, ¿cuánta toxina habrá acumulado en el cuerpo dicha persona al final de cada día?

Solución Como el cuerpo elimina las toxinas a una razón continua de 2% al día, la cantidad de 5 microgramos del día anterior ha disminuido a $5e^{-0.02}$, los 5 microgramos ingeridos dos días antes ha decrecido a $5e^{-0.02(2)} = 5(e^{-0.02})^2$, y así sucesivamente. A la larga, al final de cada día tenemos

$$\text{Acumulación total de toxinas} = 5 + 5(e^{-0.02}) + 5(e^{-0.02})^2 + 5(e^{-0.02})^3 + \cdots.$$

Ésta es una serie geométrica infinita con $a = 5$ y $r = e^{-0.02} = 0.9802$. Como $-1 < r < 1$, la serie converge y su suma es

$$\text{Acumulación total de la toxina} = \frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-e^{-0.02}} = 252.5 \text{ microgramos}$$

Con el paso del tiempo, se habrán acumulado 252.5 microgramos de la toxina en el cuerpo al final de cada día.

Agotamiento de los recursos naturales

Se pueden utilizar las series geométricas para estimar cuánto tiempo durará un recurso natural finito (como por ejemplo el petróleo, suponiendo que los niveles de consumo actuales aumentan a una razón porcentual constante.

Ejemplo 4 Al final del año 2000, las reservas mundiales de petróleo eran de un millón de millones de barriles. Durante el 2000, se consumieron cerca de 27 mil millones de barriles de petróleo. Durante la década pasada, el consumo de petróleo aumentó aproximadamente 1% al año.[3] Suponiendo que en el futuro el consumo de petróleo aumente a esta razón, ¿cuánto tiempo durarán las reservas?

[3]www.bp.com/centres/energy/world_stat_rev/oil/reserves.asp. Un billón son mil millones.

Solución Con base en estas suposiciones, el petróleo que se consumió en el 2001, en miles de millones de barriles, se estima que fue de 27(1.01). En el 2002, se espera que se consuman $27(1.01)^2$ mil millones de barriles, $27(1.01)^3$ el siguiente año y así sucesivamente. Por tanto, Q_n, la cantidad total de petróleo utilizado en n años, en miles millones de barriles, es

$$Q_n = 27(1.01) + 27(1.01)^2 + 27(1.01)^3 + \cdots + 27(1.01)^n.$$

Ésta es una serie geométrica finita con n términos, donde $a = 27(1.01)$ y $r = 1.01$. La fórmula para la suma produce

$$Q_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = 27(1.01)\left(\frac{1-(1.01)^n}{1-1.01}\right) = 2{,}727((1.01)^n - 1).$$

Como las reservas totales son de un millón de millones de barriles, queremos hallar el valor de n para el cual Q_n llega a 1,000. Podemos estimar n en forma numérica o gráfica, o podemos determinarla analíticamente:

$$\begin{aligned} 2{,}727((1.01)^n - 1) &= 1{,}000 \\ (1.01)^n - 1 &= \frac{1{,}000}{2{,}727} = 0.3667 \\ (1.01)^n &= 1.3667. \end{aligned}$$

Si tomamos logaritmos y usamos $\ln(A^p) = p \ln A$, tenemos

$$\begin{aligned} n\ln(1.01) &= \ln(1.3677) \\ n = \frac{\ln(1.3677)}{\ln(1.01)} &= 31.4 \text{ años.} \end{aligned}$$

Entonces, si los patrones actuales de consumo se mantienen, la oferta mundial de petróleo se agotará justo en 30 años. Sin embargo, si los patrones de consumo cambian, el tiempo, hasta que las reservas se agoten, puede ser muy distinto. El problema 17 se refiere a los pronósticos utilizando un aumento anual de 2.5% y un decremento anual de 0.5%, las cifras máximas y mínimas de la década anterior.

Series geométricas y ecuaciones diferenciales

En esta sección hemos usado las fórmulas de las series geométricas para modelar los niveles de medicamento; en el capítulo 10 empleamos las ecuaciones diferenciales para modelar los niveles de medicamento. Ahora surge la pregunta: ¿cuándo debemos utilizar una serie geométrica, y cuándo debemos usar una ecuación diferencial? La respuesta depende de si el medicamento se suministra en dosis *discretas* (por ejemplo, una tableta cada mañana) o *continuamente* (por ejemplo, vía intravenosa).

Ejemplo 5 Un paciente recibe 25 mg de un medicamento cada día, y su cuerpo lo metaboliza y elimina a razón continua de 10% al día. Encuentre la cantidad de medicamento en el cuerpo del paciente a la larga:

(a) Por medio de una serie geométrica, suponiendo que se aplican 25 mg del medicamento en una sola inyección cada mañana. (Determine la cantidad antes y después de aplicar la inyección.)

(b) Mediante una ecuación diferencial, suponiendo que se administra la dosis de 25 mg del medicamento por vía intravenosa a lo largo del día.

Solución **(a)** Se aplica diariamente una inyección de 25 mg. Como el organismo metaboliza el medicamento a razón continua de 10% al día, la cantidad que permanece en el cuerpo un día después es de $25e^{-0.1}$ mg. La cantidad que queda después de dos días es $25(e^{-0.1})^2$ mg. La cantidad a la larga está dada por

$$\begin{matrix}\text{Nivel del estado estacionario} \\ \text{después de la inyección}\end{matrix} = 25 + 25(e^{-0.1}) + 25(e^{-0.1})^2 + 25(e^{-0.1})^3 + \cdots.$$

Usamos la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita con $a = 25$ y $r = e^{-0.1}$:

$$\text{Nivel del estado estacionario después de la inyección} = \frac{a}{1-r} = \frac{25}{1-e^{-0.1}} = 262.7 \text{ mg}.$$

Como cada inyección es de 25 mg

$$\text{Nivel del estado estacionario antes de la inyección} = 262.7 - 25 = 237.7 \text{ mg}.$$

(b) El medicamento entra al cuerpo a razón continua de 25 mg por día y es eliminado a razón continua de 0.1 veces el nivel que hay en el cuerpo. Si Q representa la cantidad de medicamento en el cuerpo después de t días, entonces la cantidad Q satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = 25 - 0.1Q.$$

Como vimos en el capítulo 10, la cantidad de medicamento en el cuerpo a largo plazo es la solución de equilibrio de la ecuación diferencial. La solución de equilibrio se presenta cuando Q no está cambiando, esto es, cuando $dQ/dt = 0$. Tenemos

$$\frac{dQ}{dt} = 25 - 0.1Q = 0$$
$$Q = 250 \text{ mg}.$$

La cantidad de medicamento en el cuerpo a largo plazo, cuando se suministra continuamente, es de 250 mg. Observe que dicha cantidad está entre los niveles superior e inferior del medicamento cuando es administrada en dosis discretas.

Problemas para la sección 11.3

1. Cada mañana un paciente recibe una inyección de 50 mg de un medicamento. Al final de un periodo de 24 horas, el 60% del medicamento permanece en el cuerpo. ¿Qué cantidad del medicamento está en el cuerpo

(a) justo después de la tercera inyección?
(b) inmediatamente después de la séptima inyección?
(c) justo después de recibir una inyección, en el estado estacionario?

2. Una persona que padece dolor crónico toma una tableta de 30 mg de morfina cada cuatro horas. La vida media de la morfina es de dos horas.

(a) ¿Cuánta morfina hay en el cuerpo justo antes y después de tomar la sexta tableta?
(b) Encuentre los niveles de morfina del estado estacionario en el cuerpo justo antes y después de tomar una tableta.

3. Este problema muestra otra forma de deducir el nivel de ampicilina a la larga (véase la página 429). A largo plazo, la ampicilina se estabiliza en Q mg inmediatamente después de tomar cada tableta. Cuatro horas después, justo antes de la siguiente dosis, habrá menos ampicilina en el cuerpo. Sin embargo, si se ha alcanzado la estabilidad, la cantidad de ampicilina que ha sido eliminada es exactamente de 200 mg, porque al tomar una tableta más se eleva de nuevo el nivel hasta Q mg. Utilice esta información para hallar Q.

4. A una paciente se le suministra una sola dosis de 120 mg a la misma hora todos los días. En un día, elimina 30% del medicamento.

(a) Utilice una serie geométrica infinita para encontrar el nivel del estado estacionario del medicamento en el cuerpo inmediatamente después de una dosis.
(b) Demuestre que en el nivel del estado estacionario, la cantidad eliminada en un día es igual a la dosis diaria.

5. Un paciente toma una dosis de fluoxetina antidepresiva a la misma hora todos los días. La vida media de la fluoxetina es de tres días.

(a) ¿Qué fracción de una dosis permanece en el cuerpo después de un periodo de 24 horas?
(b) ¿Cuál es el nivel de fluoxetina en el cuerpo justo después de tomar la séptima dosis?
(c) ¿Cuál es el nivel de fluoxetina del estado estacionario en el cuerpo inmediatamente después de tomar una dosis?

6. La vida media de la warfarina, un anticoagulante, es de 37 horas. A un paciente se le aplica una inyección de 5 mg de warfarina a la misma hora diariamente durante 10 días.

(a) ¿Cuánta warfarina tiene en el cuerpo después de la décima inyección?
(b) ¿Cuánta warfarina tiene en el cuerpo un día después de la décima inyección? ¿Diez días después de la décima inyección?

7. **(a)** Supongamos que se suministra un medicamento en intervalos de dosificación equivalentes a su vida media. (Es decir, se suministra la segunda dosis cuando resta la mitad de la primera dosis.) Encuentre el nivel del estado estacionario de la sustancia en el cuerpo, justo después que se administra una dosis, como función de la dosis, D.

(b) Si la cantidad deseable a largo plazo de un medicamento en el cuerpo es de 300 mg, y si las dosis corresponden a la vida media del medicamento, ¿de qué tamaño debe ser cada dosis?

8. **(a)** Un medicamento para la alergia, con una vida media de 18 semanas, se aplica en dosis de 100 mg una vez por semana. Determine el nivel del estado estacionario del medicamento en el cuerpo justo después de una dosis.

(b) El medicamento no es efectivo hasta que la cantidad de sustancia en el cuerpo, justo después de que se administra una dosis, alcanza los 2,000 mg. ¿Cuántas semanas se requieren para que la sustancia sea efectiva?

9. Cada día una persona consume al mediodía en sus alimentos ocho microgramos de una toxina que está en un pesticida, y la toxina decrece a razón continua de 0.5% al día. A la larga, ¿cuánto de esta toxina se acumula en el cuerpo de esa persona? Indique la cantidad a largo plazo que se encuentra en el cuerpo justo antes y después de que la persona ingiere sus alimentos al mediodía.

10. Se utilizan 1,500 kg de un mineral este año y su uso aumenta 4% al año. Se calcula que las reservas totales de dicho mineral son de 120,000 kg. ¿Aproximadamente cuándo se agotarán las reservas?

11. Cuando se fuma cierta marca de cigarrillos ingresan al cuerpo 1.2 mg de nicotina. El organismo elimina la nicotina a razón continua de 34.65% la hora, pero puede ser letal si la cantidad en el cuerpo llega a los 60 mg. Si una persona fuma un cigarrillo con cada una de las siguientes frecuencias, encuentre la cantidad de nicotina del estado estacionario que hay en el cuerpo justo después de fumar un cigarrillo. ¿La nicotina alcanza el nivel letal

(a) cada hora? **(b)** cada media hora?
(c) cada 15 minutos? **(d)** cada seis minutos?
(e) cada tres minutos?

12. Suponga que alguien toma una dosis, D, de un medicamento en intervalos de tiempo regulares, y una fracción, r, permanece tras un tal intervalo de tiempo regular. Demuestre que en el nivel del estado estacionario la cantidad de medicamento excretada entre las dosis es igual al tamaño de una dosis.

13. Al final del año 2000 la reserva total de un mineral era de 350,000 m^3. En el año 2001 se utilizaban aproximadamente 5,000 m^3 de este mineral. Se calcula que cada año el consumo del mineral aumente 8%. Con base en estos cálculos, ¿cuándo se agotarán las reservas del mineral?

Los problemas del 14 al 16 se refieren al tiempo que duran las reservas del mineral que se menciona en el problema 13, si se modifican los patrones de uso. Por ejemplo, a medida que las reservas disminuyen, se pueden desarrollar sustitutos.

14. ¿Cuánto tiempo durarán las reservas si el incremento anual en el uso es de 4%?

15. ¿Cuánto tiempo durarán las reservas si el consumo anual permanece constante en 5,000m^3?

16. ¿Cuánto tiempo durarán las reservas si el consumo decrece 4% al año?

17. Al igual que en el ejemplo 4, suponga que las reservas de petróleo al final del 2000 eran de un millón de millones de barriles y que el consumo en el 2000 fue de 27 mil millones de barriles. Estime cuánto tiempo durarán estas reservas, suponiendo que el consumo

(a) disminuye 0.5% al año.
(b) aumenta 2.5% al año.

18. Al final del 2000 las reservas de gas natural eran de 150.19 trillones de m^3, pero durante dicho año se consumieron aproximadamente 2,045 miles de millones de m^3 de gas natural.[4] Estime cuánto durarán las reservas de gas natural si el consumo aumenta en 2% al año. [**Nota:** un trillón = 10^{12}; mil millones = 10^9.]

19. Durante la década pasada, el consumo de gas natural aumentó entre 0% y 5% al año. Utilizando los datos del problema 18, estime cuánto durarán las reservas naturales de gas, suponiendo que la razón del aumento es

(a) 0% **(b)** 5%

RESUMEN DEL CAPÍTULO

- **Series geométricas**
  Finitas e infinitas.
- **Sumas de series geométricas**
  Sumas parciales, convergencia de series infinitas.
- **Aplicaciones a negocios y a la economía**
  Anualidades, valor presente, efecto multiplicador, estabilización del mercado.
- **Aplicaciones a las ciencias de la vida**
  Dosis repetidas de medicamento, acumulación de toxinas, agotamiento de recursos naturales.

[4] www.bp.com/centres/energy/world_stat_rev/natural_gas/reserves.asp

PROBLEMAS DE REPASO

Para los problemas 1 al 6, encuentre la suma, si es que ésta existe

1. $100 + 100(0.85) + 100(0.85)^2 + \cdots + 100(0.85)^{10}$
2. $20 + 20(1.45) + 20(1.45)^2 + \cdots + 20(1.45)^{14}$
3. $75 + 75(0.22) + 75(0.22)^2 + \cdots$
4. $1{,}000 + 1{,}000(1.05) + 1{,}000(1.05)^2 + \cdots$
5. $31{,}500 + 6{,}300 + 1{,}260 + 252 + \cdots$
6. $500(0.4) + 500(0.4)^2 + 500(0.4)^3 + \cdots$
7. Una persona que inhala el humo de un cigarrillo ingiere 0.4 mg de nicotina. Después de una hora, 71% de la nicotina permanece en el cuerpo. Si dicha persona fuma un cigarrillo cada hora, empezando a las 7:00 a.m., ¿cuánta nicotina tendrá en el cuerpo inmediatamente después del cigarrillo de las 11:00 p.m?
8. La cefalexina es un antibiótico que tiene una vida media en el cuerpo de 0.9 horas; se ingiere en tabletas de 250 mg cada seis horas.
   (a) ¿Qué porcentaje de la cefalexina presente al inicio de un periodo de seis horas permanece en el cuerpo al final de este periodo (suponiendo que no se tomen tabletas durante ese tiempo)?
   (b) Escriba una expresión para Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, donde Q_n mg, es la cantidad de cefalexina en el cuerpo inmediatamente después de tomar la *n-ésima* tableta.
   (c) Exprese Q_3, Q_4 en forma cerrada y evalúelas.
   (d) Escriba una expresión para Q_n en forma cerrada.
   (e) Si el paciente sigue tomando las tabletas, utilice su respuesta del inciso (b) para determinar la cantidad de cefalexina que tendrá en el cuerpo a la larga, justo después de tomar una píldora.
9. La figura 11.3 muestra la cantidad del medicamento atenolol en la sangre como función del tiempo, con la primera dosis en el tiempo $t = 0$. El atenolol se toma en dosis de 50 mg una vez al día para bajar la presión sanguínea.

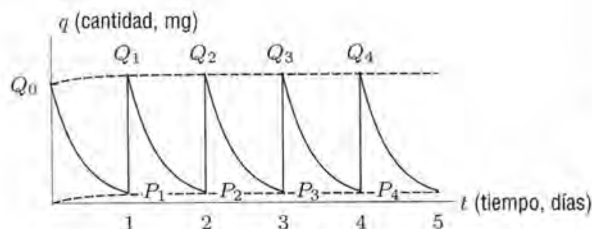


Figura 11.3.

   (a) Si la vida media del atenolol en la sangre es de 6.3 horas, ¿qué porcentaje de atenolol presente al inicio de un periodo de 24 horas sigue estando en la sangre al final de dicho periodo?
   (b) Encuentre las expresiones para las cantidades Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, ..., y Q_n que se muestran en la figura 11.3. Escriba la expresión para Q_n de forma cerrada.
   (c) Determine las expresiones para las cantidades P_1, P_2, P_3, ..., y P_n que se muestran en la figura 11.3. Escriba la expresión para P_n en forma cerrada.
10. Un decimal que se repite siempre puede expresarse como una fracción. Este problema muestra cómo escribir un decimal que se repite como una serie geométrica le permite determinar la fracción. Considere el decimal 0.232323....
    (a) Utilice el hecho de que $0.232323\ldots = 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + \cdots$ para escribir a 0.232323... como serie geométrica.
    (b) Emplee la fórmula para la suma de una serie geométrica para demostrar que $0.232323\ldots = 23/99$.
11. Arrojamos una pelota desde una altura de 10 pies y ésta rebota. Cada rebote es $\frac{3}{4}$ de la altura del rebote anterior. Por tanto, después de que la pelota toca el suelo por primera vez, sube a una altura de $10\left(\frac{3}{4}\right) = 7.5$ pies y después de esto toca el suelo por segunda vez, sube a una altura de $7.5\left(\frac{3}{4}\right) = 10\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 5.625$ pies.
    (a) Encuentre una expresión para la altura a la cual sube la pelota después de que toca el suelo por *n-ésima* vez.
    (b) Determine una expresión para la distancia vertical total que ha recorrido la pelota cuando toca el suelo por primera, segunda, tercera y cuarta veces.
    (c) Encuentre una expresión para la distancia vertical total que ha recorrido la pelota cuando toca el suelo por *n-ésima* vez. Exprese su respuesta en forma cerrada.
12. Este problema muestra cómo crean crédito los bancos y cómo pueden, por tanto, prestar más dinero del que ha sido depositado. Suponga que inicialmente se depositan \$100 en un banco. La experiencia les ha mostrado a los banqueros que en promedio un cuentahabiente sólo retira en cualquier momento el 8% del dinero que ha depositado. En consecuencia, los banqueros se sienten con la libertad de prestar el 92% restante. Por tanto, prestan \$92 de los \$100 originales a los clientes (por ejemplo, para que éstos inicien un negocio). Esos \$92 se convierten en el ingreso de alguien más y, tarde o temprano, serán depositados nuevamente en el banco. Entonces el 92% de los \$92, o \$92(0.92) = \$84.64, son prestados de nuevo y finalmente vuelven a ser depositados. De los \$84.64, el banco presta el 92%, y así sucesivamente.
    (a) Calcule la cantidad total de dinero depositado en el banco como resultado de estas transacciones.
    (b) La cantidad total de dinero depositado dividido entre los depósitos originales se denomina *multiplicador de crédito*. Calcule el multiplicador de crédito para este ejemplo y explique qué le indica este número.
13. El 1° de enero de 1993, Barbra Streisand firmó un contrato con la Corporación Sony por \$2 millones al año durante 10 años. Suponga que el primer pago le fue entregado el día de la firma y que todos los demás pagos los recibió el primer día de cada año. Suponga, también, que todos los pagos fueron depositados en una cuenta bancaria que gana 4% de interés al año compuesto anualmente.
    (a) ¿Cuánto dinero había en la cuenta
        (i) en la noche del 31 de diciembre de 1999?
        (ii) el día en que se llevó a cabo el último pago?

(b) ¿Cuál era el valor presente del contrato en el día que fue firmado?

14. Una manera de valuar una compañía es calcular el valor presente de todas sus ganancias futuras. Suponga que una granja espera vender $1,000 de árboles de Navidad una vez al año durante tiempo indefinido, con la primera venta en el futuro inmediato. ¿Cuál es el valor presente de este negocio de árboles de Navidad? Suponga que la tasa de interés es de 4% al año compuesta continuamente.

15. Antes de la Primera Guerra Mundial el gobierno británico emitió lo que se conoce como *fondos consolidados*, los cuales pagan al propietario o a sus herederos una cantidad fija de dinero por tiempo indefinido. (Los caricaturistas de la época describían a los aristócratas que vivían de dichos pagos como "escabeches en fondos consolidados".) ¿Cuánto debe pagar una persona por fondos consolidados que generan £10 al año durante tiempo indefinido? Suponga que el primer pago se hace un año después de la fecha de compra, y que el interés sigue constante en 4% al año compuesto anualmente. (£ denota las libras, la unidad monetaria británica.)

Los problemas 16 al 18 mencionan los *bonos* emitidos por un gobierno para recaudar dinero. Una persona que compra un bono de $1,000 le da al gobierno $1,000 y a cambio recibe una suma fija de dinero, llamado *vale*, cada seis meses o cada año durante el tiempo de vida del bono. Al momento del último vale, dicha persona también recupera los $1,000, o *capital principal*.

16. ¿Cuál es el valor presente de un bono de $1,000 que genera $50 al año durante 10 años, comenzando en un año a partir de ahora? Suponga que la tasa de interés es de 6% al año compuesta anualmente.

17. ¿Cuál es el valor presente de un bono de $1,000 que genera $50 al año durante 10 años, comenzando en un año a partir de ahora? Suponga que la tasa de interés es de 4% al año compuesta anualmente.

18. (a) ¿Cuál es el valor presente de un bono de $1,000 que genera $50 al año durante 10 años, comenzando en un año a partir de ahora? Suponga que la tasa de interés es de 5% al año compuesta anualmente.
(b) Como $50 es el 5% de $1,000, a este bono, con frecuencia, se le denomina bono del 5%. ¿Qué le indica su respuesta al inciso (a) sobre la relación entre el capital principal y el valor presente de este bono cuando la tasa de interés es de 5%?
(c) Si la tasa de interés es mayor a 5% al año, compuesta anualmente, ¿cuál es mayor: el capital principal o el valor del bono? ¿Por qué cree usted que al bono se le describe entonces como *negociando un descuento*?
(d) Si la tasa de interés es menor a 5% al año, compuesta anualmente, ¿por qué se describe al bono como *negociando un premio*?

PROYECTOS

1. **¿Tiene usted algún ancestro común?**
En este proyecto estimamos cuántos ancestros tiene usted y si tiene algún ancestro común. (Un ancestro común es aquel que aparece en dos de los lados de su árbol genealógico. Por ejemplo, si su bisabuela materna también es su abuela paterna, entonces ella sería un ancestro común.)
(a) Cada persona tiene dos padres biológicos, cuatro abuelos biológicos, ocho bisabuelos biológicos, y así sucesivamente. Escriba una fórmula para el número de ancestros que usted tiene, regresándose n generaciones.
(b) ¿Cuánto tiempo dura una generación? Estime la edad de los padres comunes cuando nace un bebé. Ésta es la duración de tiempo de una generación. ¿Cuántas generaciones hay que incluir si retrocedemos 100 años? ¿500 años? ¿1,000 años? ¿2,000 años?
(c) Utilice sus respuestas de los incisos (a) y (b) para calcular el número de ancestros que usted tiene si retrocede 100 años, 500 años, 1,000 años o 2,000 años.
(d) En los incisos (a) y (c) contó por separado a cada ancestro, por lo que se supone que usted no tiene ancestros comunes. Utilice el hecho de que la población mundial era de aproximadamente 6 mil millones de personas en 1999, y de aproximadamente 200 millones de personas en el año 1 d. C. para determinar si éste es un supuesto razonable. Explique su razonamiento.

2. **El modelo Harrod-Hicks de una economía nacional en expansión**
El modelo de Harrod-Hicks pronostica que si una economía nacional está creciendo, entonces el ingreso nacional en un año se relaciona con el ingreso nacional del año anterior. Si $f(n)$ es el ingreso nacional en el año n, el modelo pronostica, para ciertas constantes k y h con $k > 1$ y $h > 0$, que
$$f(n+1) = kf(n) - h.$$
(a) Sea $C = f(0)$. Escriba $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$ en términos de k, h y C.

(b) Demuestre que

$$f(1) = kC - h,$$
$$f(2) = k^2C - (1 + k)h,$$
$$f(3) = k^3C - (1 + k + k^2)h.$$

Utilice estas fórmulas para deducir una fórmula para $f(n)$.

(c) Utilice la fórmula para la suma de una serie geométrica finita con el fin de reescribir la fórmula para $f(n)$ en forma cerrada.

3. Probabilidad de ganar en deportes

En ciertos deportes, para ganar un juego se requiere una ventaja de dos puntos. Es decir, si el marcador está empatado usted tiene que anotar dos puntos seguidos para ganar.

(a) En ciertos deportes (por ejemplo, el tenis) se anota un punto en cada jugada. Suponga que su probabilidad de anotar el siguiente punto siempre es p. Entonces, la probabilidad de que su oponente anote el siguiente punto siempre es $1 - p$.

(i) ¿Cuál es la probabilidad de que usted gane los siguientes dos puntos?

(ii) ¿Cuál es la probabilidad de que usted y su oponente se dividan los siguientes dos puntos, esto es, que ninguno de ustedes gane ambos puntos?

(iii) ¿Cuál es la probabilidad de que usted divida los siguientes dos puntos con su oponente, pero que gane los dos puntos subsiguientes?

(iv) ¿Cuál es la probabilidad de que usted gane los siguientes dos puntos o los divida con su oponente, y gane dos más después de eso?

(v) Dé una fórmula para la probabilidad w de ganar en un juego empatado.

(vi) Calcule la probabilidad de ganar un juego que se encuentra empatado cuando $p = 0.5$; cuando $p = 0.6$; cuando $p = 0.7$; cuando $p = 0.4$. Comente sus respuestas.

(b) En otros deportes (por ejemplo, el voleibol), usted puede anotar un punto sólo si es su turno, con los turnos alternándose hasta que se anota un punto. Suponga que su probabilidad de anotar un punto cuando es su turno es p, y que la probabilidad de que su oponente anote un punto cuando sea su turno es q.

(i) Encuentre una fórmula para la probabilidad S de que usted sea el primero en anotar el siguiente punto, suponiendo que ahora es su turno.

(ii) Suponga que si usted anota un punto, el siguiente turno es suyo. Con base en las respuestas al inciso (a) y su fórmula para S, calcule la probabilidad de ganar un juego que está empatado (si usted necesita dos puntos seguidos para ganar).

- Suponga que $p = 0.5$ y $q = 0.5$ y que es su turno.
- Suponga que $p = 0.6$ y $q = 0.5$ y que es su turno.

APÉNDICE

Los siguientes proyectos requieren el uso de una hoja de cálculo. Todos se pueden llevar a cabo usando las ideas del capítulo 1. Además, el proyecto 8 (Verhulst: el modelo logístico) y el proyecto 9 (Divulgación de la información: comparación de dos modelos) dan otra perspectiva sobre el material de los capítulos 4 y 10. El proyecto 4 (Comparación de créditos hipotecarios) usa una serie geométrica, pero se puede hacer antes del capítulo 11.

PROYECTOS DE HOJA DE CÁLCULO

1. MALTHUS: LA POBLACIÓN SOBREPASA LA OFERTA DE ALIMENTOS

En este proyecto comparamos el crecimiento exponencial y el lineal. Veremos también el dominio final de las funciones exponenciales sobre las funciones lineales.

Uno de los modelos más famosos del crecimiento poblacional fue el de Thomas Malthus a principios del siglo XIX. Malthus creía que mientras la población humana aumentaba exponencialmente, los medios de subsistencia sólo crecían linealmente. La triste conclusión que Malthus sacó de su observación era que la población mundial inevitablemente sobrepasaría sus medios de subsistencia, dando como resultado una inadecuada oferta de alimentos. (Malthus fue más allá al observar que este escenario sólo se podría evitar con guerras, hambre, epidemias, abstención sexual en todo el mundo, u otras medidas drásticas sobre el crecimiento poblacional.)

La siguiente tabla muestra parte de una hoja de cálculo que ilustra este escenario.[1] La población inicial es de un millón, mientras que hay alimentos para dos millones de personas. La población crece a una tasa anual de 3% y la producción de alimentos aumenta en 100,000 por año. Estas tasas de crecimiento de la población y de los alimentos están en las celdas a la derecha de la hoja de cálculo. La cuarta columna contiene la razón entre los alimentos disponibles por persona en la población. La hoja de cálculo incluye una razón de seguridad, mientras que la razón entre alimentos y población está arriba de la cifra de 1.5, la quinta columna dice "Sí"; siempre que la razón esté abajo de esta cifra, la quinta columna dice "No" (como aparece para el final del siglo XXI).

Vemos que al principio hay abundancia de alimentos, la razón entre alimentos y población es 2, lo que significa que hay el doble de alimentos necesarios para alimentar a la población. Para los primeros años la razón aumenta, pero en cierto punto empieza a bajar y finalmente cae a menos de uno.

Año	Población	Oferta de alimentos	Razón	¿Arriba de la razón de seguridad?	
1999	1,000,000	2,000,000	2.00	Sí	Tasa anual de crecimiento de la población 3%
2000	1,030,000	2,100,000	2.04	Sí	
2001	1,060,900	2,200,000	2.07	Sí	
2002	1,092,727	2,300,000	2.10	Sí	Tasa anual de crecimiento de los alimentos 100,000
2003	1,125,509	2,400,000	2.13	Sí	
2004	1,159,274	2,500,000	2.16	Sí	
2005	1,194,052	2,600,000	2.18	Sí	Razón de seguridad 1.5
2006	1,229,874	2,700,000	2.20	Sí	
2007	1,266,770	2,800,000	2.21	Sí	
2008	1,304,773	2,900,000	2.22	Sí	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
2098	18,658,866	11,900,000	0.64	No	
2099	19,218,632	12,000,000	0.62	No	
2100	19,795,191	12,100,000	0.61	No	

1. Elabore su hoja de cálculo para que se parezca a la mostrada en la tabla, pero extiéndala al año 2100. Prácticamente cada celda debe contener una fórmula, con excepción de las seis celdas que contienen "1999", "1,000,000", "2,000,000", "3.00%", "100,000" y "1.5".

[1]Tomado de Graeme Bird.

2. **(a)** Aproximadamente, ¿en qué año es máxima la razón entre alimentos y población?
   (b) ¿En qué año llega esta razón a 1?

3. Hay por lo menos dos formas de mejorar la situación actual: se puede bajar la tasa de crecimiento de la población, o se puede aumentar la oferta de alimentos.
   (a) ¿Hasta qué punto habría que bajar la tasa de crecimiento de la población para que la razón entre alimentos y población no llegue a 1 hasta el año 2100? (Mantenga creciente la oferta de alimentos a 100,000 por año.)
   (b) ¿Hasta qué punto tendría que aumentar la tasa de crecimiento de alimentos para alcanzar esta misma meta y que la razón no llegue a 1 hasta el año 2100? (Mantenga la tasa de crecimiento de población en su 3% original.)

4. Usando el escenario original, elabore cada una de las siguientes tablas (con renglones y columnas). Extienda las tablas al año 2100, de modo que sea evidente el punto donde la población sobrepasa la oferta de alimentos.
   (a) Muestre población y alimentos, con los años en el eje horizontal.
   (b) Muestre sólo la razón, con los años en el eje horizontal.

2. DEUDA DE UNA TARJETA DE CRÉDITO

Suponga que tiene una tarjeta de crédito en la que debe $2,000, y que la compañía de la tarjeta de crédito cobra una tasa de interés mensual de 1.5%. Suponga también que la compañía requiere un pago mínimo mensual de 2.5 % de su saldo actual. (Este esquema de pago es semejante al que usan muchas compañías de tarjetas de crédito, pero vea la pregunta 8.)

[**Nota:** para las preguntas 1 y 2 no necesitará hoja de cálculo, pero sí una calculadora.]

1. Si la tasa de interés mensual es de 1.5%, ¿cuál es la tasa de interés anual efectivo?
2. Como regla general, el pago mínimo mensual requerido excede al interés acumulado en el mes dado. (Por ejemplo, aquí el pago mensual mínimo de 2.5% excede los cargos de interés mensuales de 1.5%.) Explique por qué éste debe ser el caso. ¿Qué le ocurriría al saldo de la tarjeta si el pago mensual mínimo fuera menor que el interés acumulado?

Ahora supongamos que decide pagar su deuda de tarjeta de crédito de $2,000 haciendo sólo el pago mínimo requerido cada mes. Debemos suponer que no hace más cargos a la tarjeta porque está tratando de pagarla.

3. Como el 2.5% de $2,000 es $50, su primer pago será de $50. Antes de hacer cualquier operación en la hoja de cálculo, calcule cuánto tardará en que su saldo baje de $2,000 a menos de $50, suponiendo que sólo haga el pago mínimo requerido cada mes. Un cálculo aproximado es suficiente, pero debe usar el sentido común y explicar qué razonamiento utilizó.
4. Con el tiempo, sus pagos mensuales, que empezaron en $50, disminuirán. Explique por qué sucede esto. El hecho de que sus pagos mensuales disminuyan, ¿afecta la respuesta a la pregunta 3?
5. Aun cuando sólo debe $2,000 a la compañía de la tarjeta de crédito, terminará pagando mucho más de los $2,000, por los intereses. Haga su mejor estimación (antes de hacer cálculos específicos) de cuánto, aproximadamente, terminará teniendo que pagar a la compañía de la tarjeta de crédito por su deuda inicial de $2,000.

Elabore una hoja de cálculo que muestre el número de meses desde que empezó a pagar su deuda, el saldo actual de la tarjeta, el interés vencido ese mes y el pago mínimo que hará, cada uno en una columna diferente. Cada cantidad será calculada mediante una fórmula.

Ejemplo: para encontrar qué fórmulas necesita, recuerde que su saldo inicial es de $2,000, el interés mensual cobrado es de 1.5%, y el pago mínimo requerido es de 2.5%. Por tanto, al iniciar el mes 1, su saldo es de $2,000, porque todavía no hace pago alguno. Al terminar el mes 1, el interés que debe es de 1.5% del saldo de $2,000, o sea $30. Su pago mínimo es de 2.5% del saldo de $2,000, o sea $50. Entonces,

al iniciar el mes 2, su nuevo saldo será el saldo anterior de $2,000 más los $30 de interés menos el pago de $50, o sea $1,980. Observe que estas cantidades para el mes 2 dependen de las cifras del mes 1; de modo análogo, las cantidades para el mes 3 dependerán de las del mes 2, y así sucesivamente. Siguiendo este procedimiento, debe deducir qué fórmulas necesita en cada columna de su hoja de cálculo.

Una vez elaborada la hoja de cálculo, responda las siguientes preguntas.

6. ¿Qué tan buena fue su estimación en la pregunta 3? Usando la hoja de cálculo, encuentre cuántos meses tardará para bajar su saldo a menos de $50. ¿Fue cercana su respuesta, o está sorprendido de cuánto tarda en realidad?

7. ¿Qué tan buena fue su estimación en la pregunta 5? Usando su hoja de cálculo, deduzca exactamente cuánto dinero debe pagar a la compañía de la tarjeta de crédito para bajar su saldo a menos de $50. ¿Cómo se compara esta cantidad con la deuda original de $2,000?

8. Use su hoja de cálculo para hallar cuánto tardará en bajar su saldo a $0. ¿O no lo puede decir? ¿Llegará alguna vez un punto en que haya pagado exactamente su deuda? [*Sugerencia*: finalmente, los pagos mensuales mínimos, así como los cargos por intereses están fuera de la realidad. ¿Por qué no son realistas? ¿Cómo evita este problema la mayor parte de las compañías de tarjetas de crédito?]

9. Ahora tratemos de experimentar con los números y ver qué ocurre. En cada uno de los siguientes casos, haga los cambios apropiados a su hoja de cálculo. Suponga que tan pronto como su saldo sea menor de $50, lo pagará en una sola exhibición.

(a) Si cada mes pagara sólo $1 más que el pago mínimo requerido, ¿cuánto tardaría en reducir su deuda a menos de $50? ¿Cuánto terminaría pagando a sus acreedores? ¿Cuánto dinero ahorraría si usa este esquema de pago en lugar del de la pregunta 5?

(b) Su primer pago mensual es de $50. Si paga $50 cada mes, en lugar del pago mínimo requerido, cuánto tarda en bajar su deuda a menos de $50? ¿Cuánto dinero ahorraría si usa este esquema de pago en lugar del de la pregunta 5?

(c) Recientemente, muchas compañías de tarjetas de crédito han hecho ofertas similares a la siguiente: si usted transfiere su deuda de tarjeta de crédito de una compañía competidora a la de ellos, le cobran una tasa de interés más baja. Suponga que encuentra una compañía de tarjeta de crédito que desea hacer esta transacción, y que la tasa de interés de ellos es de 1%, y no de 1.5%. Si no se cambian las suposiciones originales, ¿cuánto tardaría en reducir su deuda a menos de $50, y cuánto terminaría pagando en total a sus acreedores? ¿Cuánto dinero ahorraría en comparación a lo que hubiera pagado a su compañía original de tarjetas?

10. Si se compara el esquema que se utiliza en las preguntas 3 a la 5 con cada uno de los esquemas de la pregunta 9, ¿a qué conclusiones se puede llegar acerca de pagar la deuda de una tarjeta de crédito?

3. ELECCIÓN DE UN PRÉSTAMO BANCARIO

Suponga que un banco local ofrece los siguientes paquetes de préstamos. Utilice una hoja de cálculo para decidir qué opción es la mejor. Los paquetes son los siguientes:

- Un préstamo de $2,000, a una tasa anual de 9%, pagadero en 24 pagos mensuales.
- Un préstamo de $2,000, a una tasa anual de 10%, pagadero en 36 pagos mensuales.
- Un préstamo de $2,000, a una tasa anual de 9.25%, pagadero en 52 pagos quincenales.

El interés está compuesto con la misma frecuencia con la que se hacen los pagos. Advierta que el primero y el último prestamos tienen periodos de pago a dos años; el préstamo del medio es a tres años.

1. Use una hoja de cálculo para decidir qué préstamo es más barato en términos de pago total al banco (vea la siguiente sugerencia).

2. Emplee una hoja de cálculo para decidir cuál de los préstamos es más fácil de afrontar en términos de los pagos mensuales más bajos (vea la siguiente sugerencia).

Sugerencia: la parte difícil de las preguntas 1 y 2 es calcular sus pagos mensuales (o quincenales). Hay fórmulas que dan el pago con base en el periodo y la cantidad del préstamo y los intereses cobrados, pero en lugar de usarlas, empleamos una hoja de cálculo. La idea es que haga una estimación razonada en cuanto a cuál debería ser el pago, y luego usar una hoja de cálculo para comprobar su respuesta. Al observar la hoja de cálculo, puede decidir si su estimación fue muy alta o muy baja, y así mejorar su estimación original. Es sorprendente la rapidez con la que se puede convertir en cero el pago mensual, hasta el último centavo, usando este método de estimación y comprobación.

Por ejemplo, considere el primer préstamo, el de \$2,000 al 9%. Elabore una hoja de cálculo con el saldo inicial de \$2,000, el interés para el primer mes, que es $(9\%/12) \cdot \$2{,}000 = \$15$ y calcule el pago mensual. Hay muchas formas de hacer una estimación del pago mensual. Una sería decir que le prestaron \$2,000 al 9%, en dos años, se deberían unos $\$2{,}000(1.09)^2 = \$2{,}376$. (No importa la composición mensual, porque esto es sólo una aproximación.) Para pagar esta cantidad en 24 pagos mensuales iguales se necesitarán $\$2{,}376/24 = \$99$. Por tanto, calculamos un pago mensual de \$100. Con esta estimación, el saldo del segundo mes será

$$(\$2{,}000) + (\$15 \text{ en intereses por el mes } 1) - (\text{Pago de } \$100) = \$1{,}915.$$

Entonces, el interés del mes siguiente será de $(9\%/12) \cdot \$1{,}915$, y el pago del siguiente mes debería ser igual que el pago del primer mes, o sea, \$100. Se continúa este proceso hasta que se hayan hecho los pagos durante 24 meses (dos años). Verá que el saldo final es negativo, lo cual significa que se pagó al banco más de lo que realmente se debía. Esto significa que \$100 es un pago mensual demasiado alto para pagar el préstamo de \$2,000. (Podríamos pronosticar que éste fue el caso cuando hicimos nuestro estimado anterior. ¿Ve por qué?) Entonces, como \$100 es demasiado alto, podría calcular que un pago mensual de \$80 sería correcto. Si lo hace, verá que todavía le deberá al banco algún dinero después de transcurridos los 24 meses. Esto le indica que \$80 es un pago mensual demasiado bajo, y que el pago real debe ser entre \$80 y \$100. Este procedimiento se puede repetir hasta obtener el pago mensual exacto.

4. COMPARACIÓN DE CRÉDITOS HIPOTECARIOS

Para hacer este proyecto, primero hay que ir a cualquier banco y solicitar la hoja de datos más reciente de sus *tasas de préstamos hipotecarios*. Los bancos estarán felices de proporcionársela.

Obtenga tasas para un préstamo de \$100,000 a 30 años, un préstamo a 15 años, un préstamo de pagos quincenales a 30 años y un préstamo a 20 años (si lo hay) (**Nota:** algunos préstamos incluyen *puntos*. Un punto es una cuota adicional pagada al prestador en el momento de obtener el préstamo, igual al 1% de la cantidad prestada. Por lo general, se puede obtener tasas de intereses bajas si se paga un punto o dos. Sólo consideraremos préstamos sin puntos.)

Se puede emplear la siguiente fórmula para determinar su pago, x:

$$x = \frac{Pr^n(r-1)}{r^n - 1},$$

donde P es la cantidad del préstamo, en este caso \$100,000, y n *es* el número de pagos. Para un préstamo a 30 años con pagos mensuales, $n = 360$; para un préstamo de pagos quincenales, $n = 780$ (hay 26 pagos cada año). Finalmente, r es la tasa de interés para el periodo más 1. (Por ejemplo, si la tasa de interés es del 2%, entonces $r = 1.02$.) En la pregunta 4, usted deducirá la fórmula para x usando la siguiente fórmula para hallar la suma de una serie geométrica:[2]

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

[2]Las series geométricas las analizamos con detalle en el capítulo 11.

1. Mediante el uso de la información dada, así como la hoja de datos que obtuvo en el banco, determine qué préstamo (30 años, 30 años con pagos quincenales, 20 años o 15 años) es el mejor si pretende vivir en su casa por lo menos todo el plazo del préstamo. Supondremos que la mejor hipoteca es aquella que termina costando menos en total. (La situación en la vida real puede ser más complicada cuando se consideran cosas como los puntos y los impuestos.) Aunque es posible trabajar este problema sin una hoja de cálculo, se puede elaborar una de todas formas.
2. Los bancos generalmente exigen que los pagos mensuales no excedan de alguna fracción establecida del ingreso mensual del solicitante. Por esta razón, es generalmente más fácil llenar los requisitos para préstamos con pagos mensuales más pequeños. Entonces, puede ser que el "mejor préstamo" (el que se encuentra en la pregunta 1) no sea el "más fácil" para el cual se llenen los requisitos. ¿Cuál de los préstamos de su hoja de datos tiene el pago mensual más bajo? ¿El más alto?
3. Supongamos que, en cinco años, usted piensa vender su casa en $145,000. En este caso, ¿cuál préstamo tomaría? [*Sugerencia*: la meta aquí es maximizar la utilidad. Calcule cuánto más dinero ha pagado al banco después de cinco años, y cuál será la deuda restante en ese tiempo. Cuando venda su casa, cualquier deuda restante será pagada al banco de inmediato, de modo que su utilidad total será: (precio de venta de la casa)–(pago del préstamo al banco)–(cantidad pagada al banco durante los primeros cinco años).]
4. Deduzca la fórmula para el pago mensual, x. [*Sugerencia*: determine una serie geométrica en términos de x y r para obtener el saldo del préstamo después de n meses. El saldo del préstamo será igual a 0 cuando haya pagado el préstamo; utilice este hecho para despejar x. Simplifique la expresión resultante (sumando una serie geométrica) para obtener la fórmula dada para x.]

5. VALOR PRESENTE DE LOS PREMIOS DE LA LOTERÍA

El jueves 24 de febrero de 1993, Bruce Hegarty, de Dennis Port, MA, recibió el primer pago de los $26,680,940 del premio que ganó en la lotería Millones en Masa del gobierno. Al señor Hegarty le hicieron un programa para que recibiera 19 pagos anuales más. Cada cheque escrito por la comisión de lotería es de un vigésimo del premio total, o sea $1,334,047. ¿Por qué la Comisión de la Lotería no paga todo el premio de una vez, en lugar de hacerlo esperar 20 años?

1. Calcule el valor presente del dinero pagado por la Comisión de Lotería, suponiendo tasas anuales de descuento (tasas de interés) de 5%, 10% y 15%. En cada caso, ¿qué porcentaje representa el valor presente del valor nominal del premio, $26,680,940?
2. ¿Qué tasa de descuento arrojaría un valor presente de los pagos por sólo la mitad del valor nominal del premio?
3. Haga una gráfica del valor presente de los pagos respecto a la tasa de descuento, con variación de una tasa de 0% hasta 15%. Describa la gráfica. ¿Qué le dice esto acerca del porqué la Comisión de Lotería no paga el premio en un solo pago?

6. COMPARACIÓN DE INVERSIONES

Considere dos proyectos de inversión. El proyecto A se construye en un año con costo inicial de $10,000. Entonces produce la siguiente corriente decreciente de beneficios en un periodo de cinco años: $5,000, $4,000, $3,000, $2,000 y $1,000. El proyecto B se construye en dos años. Inicialmente los costos son $10,000 en el primer año y $5,000 en el segundo. Entonces produce utilidades anuales de $6,000 durante los siguientes cuatro años. ¿Cuál de estos proyectos de inversión es preferible?

1. Calcule los valores presentes de ambos proyectos, suponiendo una tasa de descuento anual (tasa de interés) de 4%. ¿Cuál proyecto parece preferible? [*Sugerencia*: considere los gastos como negativos y los ingresos como positivos].
2. Calcule los valores presentes de ambos proyectos suponiendo una tasa anual de descuento de 16%. ¿Cuál proyecto parece preferible ahora?

3. Describa en oraciones completas por qué uno de los proyectos de inversión es favorecido por una baja tasa de descuento, mientras que el otro se ve favorecido por una alta tasa de descuento.
4. La tasa de descuento a la que el valor presente de un proyecto se hace cero se conoce como *tasa interna de rendimiento*. ¿Cuál es la tasa interna de rendimiento del proyecto A? ¿Del proyecto B? [*Sugerencia*: elija de manera razonada diferentes tasas de descuento hasta que encuentre la que baje el valor presente a $0]
5. Haga una tabla del valor presente de las dos inversiones respecto a las tasas de descuento que varíen de 0% a 30%. ¿Qué características de esta tabla corresponden a las tasas internas de rendimiento de los dos proyectos?

7. INVERSIÓN PARA EL FUTURO: PAGOS DE COLEGIATURAS

Los padres de dos adolescentes de 13 y 17 años, depositan una suma de dinero en una cuenta que gana interés a razón de 7% al año, compuesto anualmente. El depósito se usará para una serie de ocho pagos anuales de $10,000 cada uno para colegiaturas. Los pagos tomados de la cuenta comenzarán un año después del depósito inicial.

1. Utilice una hoja de cálculo para hacer un modelo de la cuenta de ahorros que los padres abrieron. Al final de cada año, la cuenta gana 7% de interés y habrá entonces un retiro de $10,000. Determine qué deposito inicial proporciona exactamente el dinero suficiente para hacer los ocho pagos anuales de $10,000. Haga esto probando diferentes valores, y viendo qué valor inicial lo dejará sin nada nueve años después.
2. Una vez contestada la pregunta 1, utilice una hoja de cálculo para calcular el valor presente de ocho pagos anuales de $10,000 cada uno, iniciando un año después, a una tasa de descuento de 7%.
3. Compare su respuesta a la pregunta 1 con su respuesta a la pregunta 2. ¿Es esto una coincidencia? Explique.
4. Suponga que los padres tienen sólo $50,000 para depositar en la cuenta de ahorros. ¿Qué tasa de interés anual debe ganar la cuenta si deben hacerse los ocho pagos de $10,000? [*Sugerencia*: calcule el valor presente de los pagos para varias tasas de interés.]

8. VERHULST: EL MODELO LOGÍSTICO

La tasa relativa de crecimiento de una población, P, en un intervalo, Δt, está dada por

$$\text{Tasa relativa de crecimiento} = \frac{1}{P} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta t}.$$

En crecimiento exponencial, la tasa relativa de crecimiento es una constante. Aun cuando el crecimiento exponencial se utiliza a veces para hacer modelos de poblaciones, este modelo pronostica que una población aumentará sin límite, lo cual no es realista. En la década de 1830, el matemático belga P. F. Verhulst sugirió un *modelo logístico* en el que la tasa relativa de crecimiento de una población decrece a 0 linealmente a medida que la población aumenta. El modelo de Verhulst pronostica que el tamaño de la población finalmente se nivela a un valor conocido como *capacidad de carga*.

Para ver cómo funciona el modelo logístico de Verhulst, suponga que un par de conejos se introducen en una pequeña isla donde no hay conejos. Al principio, la población de conejos se duplica cada mes. Esto significa que inicialmente la tasa relativa de crecimiento es de 100% al mes. Sin embargo, finalmente, a medida que la población crece la tasa relativa de crecimiento cae a 0% por mes. Supongamos que la tasa de crecimiento llega a 0 cuando la población llega a 10,000 conejos. (Entonces, 10,000 es lo que llamaríamos la capacidad de carga de conejos de la isla.) Mediante el uso de hojas de cálculo, modelaremos la población de conejos respecto al tiempo.

1. Sea P la población y r la tasa relativa de crecimiento por mes. Verhulst supuso que la tasa relativa de crecimiento decrece linealmente a medida que aumenta la población. Esto significa que r pasa de 100% a 0% a medida que P pasa de 0 conejos hasta 10,000 conejos. Explique por qué la siguiente fórmula para r corresponde a las suposiciones de Verhulst: $r = 0.0001\ (10{,}000 - P)$.

2. Utilice una hoja de cálculo para modelar la población mensual de conejos en la isla durante los primeros dos años (24 meses). Trace una gráfica de la población de conejos respecto al tiempo. Describa el comportamiento de la población de conejos. [*Sugerencia*: inicie con dos conejos y calcule la tasa de crecimiento usando la fórmula de la pregunta 1. Luego, por cada mes, actualice la población de conejos así como la tasa relativa de crecimiento.]
3. Trace una gráfica que compare su modelo logístico de la población de conejos con una población que crece exponencialmente a una tasa relativa de crecimiento constante de 100% al mes. Ambos modelos deben empezar con dos conejos. Describa las similitudes y las diferencias entre las dos tablas. ¿Qué ventajas tiene el modelo logístico sobre el modelo exponencial? (Usted tendrá que ser cuidadoso cuando establezca los parámetros de la gráfica, ya que, de otro modo, todo lo que podrá ver es la población exponencial que sube tan rápido que la logística no será visible en absoluto.)
4. La clave del modelo logístico es que la tasa relativa de crecimiento está decreciendo linealmente a medida que aumenta la población. Sin embargo, esto no significa que la tasa relativa de crecimiento sea decreciente linealmente en el tiempo. Haga una tabla de la tasa relativa de crecimiento respecto al tiempo para los primeros dos años. Describa el comportamiento de la tasa relativa de crecimiento respecto al tiempo.
5. **(a)** Diferentes suposiciones acerca de la creciente población de conejos llevará a curvas logísticas diferentes. En la pregunta 1, supusimos que la tasa relativa de crecimiento era de 100% inicialmente, cayendo a 0% cuando la población llegó a 10,000. Esto lleva a la fórmula $r = 0.0001(10{,}000 - P)$. Ahora suponga que la tasa inicial relativa de crecimiento es de 10% (en lugar de 100%). ¿Cuál es la nueva fórmula que relaciona r con P? (Suponga que la capacidad de carga es todavía de 10,000; por tanto, $r = 10\%$ cuando $P = 0$, y decrece a 0% a medida que P aumenta a 10,000.)
   (b) Usando su nueva fórmula para la tasa relativa de crecimiento, r, veamos cómo diferentes poblaciones iniciales de conejos llevan a diferentes curvas logísticas. Modele los siguientes escenarios para un periodo de cinco años (60 meses): una población inicial de 100 conejos, una población inicial de 5,000 conejos, una población inicial de 12,500 conejos y una población inicial de 17,500 conejos. Ponga todos sus datos en la misma gráfica. ¿Qué ocurre a la población de conejos cuando se inicia arriba de la capacidad de carga de conejos de la isla? ¿Por qué tiene sentido esto?

9. DIVULGACIÓN DE LA INFORMACIÓN: COMPARACIÓN DE DOS MODELOS

La divulgación de información en una población es importante para quienes toman decisiones. Por ejemplo, los ministros de agricultura usan modelos matemáticos para comprender la diseminación de innovaciones técnicas o nuevos tipos de semillas en sus países.

En este proyecto comparamos dos modelos diferentes, uno de ellos logístico, para la divulgación de la información. En ambos casos, supongamos que la población es 10,000 y que inicialmente sólo 100 personas tienen la información. Sea N el número de personas que tienen la información al tiempo t.

Modelo 1: si la información se divulga a través de medios masivos (TV, radio, periódicos), la razón absoluta, $\Delta N/\Delta t$, a la que la información se divulga se supone que es proporcional al número de personas *que no* tienen la información en ese momento. Si t está dado en días, la constante de proporcionalidad es 10%. Por ejemplo, en el primer día el número de personas que no tienen la información es de $10{,}000 - 100 = 9{,}900$. Como 10% de 9,900 es 990, la rapidez de divulgación de la información es de 990 personas por día en el primer día. Esto significa que, en el segundo día, el número de personas que *no* tienen la información es de 8,910 y que la rapidez de divulgación es 10% de 8,910, o sea, 891 personas por día, y así sucesivamente.

Modelo 2: si ahora la información se divulga verbalmente, la tasa absoluta a la que la información se divulga se cree que es proporcional al producto del número de personas que conocen la información y del número de personas que no la conocen. Si t es en días, la constante de proporcionalidad es 0.002%. Por ejemplo, en el primer día, el producto del número de personas que conocen la información y el número de personas que no la conocen es $100 \cdot 9{,}900 = 990{,}000$. Como 0.002% de 990,000 es alrededor

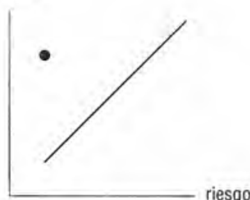
de 20, la razón de divulgación de la información es de 20 personas por día en el primer día. Esto significa que, en el segundo día, el producto del número de personas que conocen y el número de personas que no conocen es $120 \cdot 9{,}880 = 1{,}188{,}600$, dando una razón de divulgación de 0.002% de 1,188,600, o sea, unas 24 personas por día, y así sucesivamente.

1. Mediante el uso de hojas de cálculo, compare cómo se divulga la información en la población usando ambos modelos. Haga una tabla comparando las predicciones del número de personas que en el tiempo tienen la información en ambos modelos. Describa las similitudes y diferencias entre los dos modelos. ¿Por qué se usa el modelo 1 dada la presencia de medios masivos? ¿Por qué se usa el modelo 2 cuando los medios masivos no están presentes?
2. ¿Cuál de los dos modelos es logístico? ¿Cómo puede saberlo? ¿Qué tipo de crecimiento exhibe el otro modelo? ¿Cómo puede decirlo?
3. Por definición, una población exhibe crecimiento logístico si su razón de cambio relativa es una función lineal decreciente de la población actual. Explique por qué el modelo 2 tiene un crecimiento logístico.
4. Las soluciones de nuestras hojas de cálculo son sólo aproximaciones. Analice por qué éste es el caso. [*Sugerencia*: aquí pasa algo más que un error de redondeo.]

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS IMPARES

Sección 1.1

7



9



11 (a) (III)
(b) La temperatura de la papa antes de ponerla en el horno

13 $f(5) = 13$

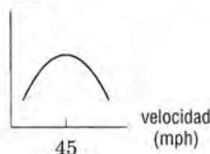
15 $f(5) = 3$

17 $f(5) = 4.1$

19



21



25 (a) 2
(b) 11
(c) 3 y −3
(d) No

Sección 1.2

1 Pendiente: −3/2
Ordenada en el origen: 4

3 Pendiente: 1/2
Ordenada en el origen: 2

5 $y = x$

7 $y = -7 + 3x$

9 (a) (V)
(b) (IV)
(c) (I)
(d) (VI)
(e) (II)
(f) (III)

11 (a) l_2 y l_3; l_2
(b) l_1 y l_3; l_1

13 (a) $P = 30{,}700 + 850t$
(b) 39,200 personas
(c) En 2016

15 (a) Lineal
(b) Lineal
(c) No lineal

17 $y = 14x - 45$

19 (a) 335 millones de toneladas
(b) 7 millones de toneladas/año
(c) $M = 335 + 7t$

21 $Q = -1.24t + 19.72$

23 (b) $P = 100 - 0.5d$
(c) −0.5%/ft
(d) 100%; 200 ft

25 (a) $S = 75.61t + 333.3$
(b) 75.61 millones de CD (discos compactos) por año
333.3 millones de CD en 1991
(c) 1391.84 millones de CD

27 (a) \$0.025/ pies cúbicos
(b) $c = 65 + 0.025w$
c = costo de agua
w = pies cúbicos de agua
(c) 2600 pies cúbicos

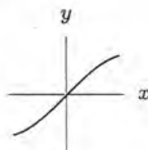
29 (a) Pendiente = 1.8
(b) °F = 1.8(°C) + 32
(c) 68 °F
(d) −40°

Sección 1.3

1 Cóncava hacia arriba

3 Ninguna

5



7 (a) x-intervalo: D a E, H a I
(b) x-intervalo: A a B, E a F
(c) x-intervalo: C a D, G a H
(d) x-intervalo: B a C, F a G

9 (a) Mayor en 1990; \$2,700 miles de millones más que en 1960
(b) miles de millones por año

11 (a) Negativo
(b) Positivo
(c) Negativo
(d) Negativo
(e) Positivo

13 8

15 (a) Negativo
(b) −0.087 mg/hora

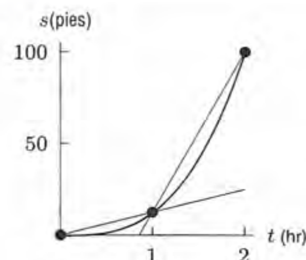
17 \$93.87/año

19 1241 miles de personas/año
789.9 miles de personas/año
1285 miles de personas/año

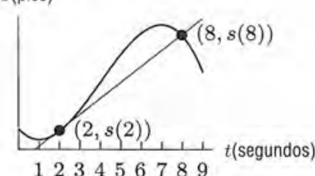
21 (a) 11,423 millones de dólares
(b) 2855.7 millones de dólares/año
(c) 2001

23 (a) 120 juegos/año
(b) 72, 240, 91, 220, 7, 90
(c) 120 juegos/año

25

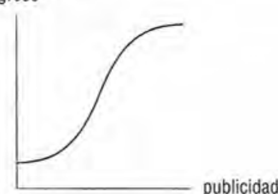


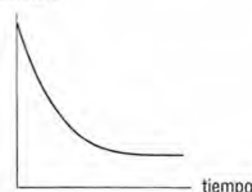
27 (a)



(b) Entre $t = 3$ y $t = 6$
(c) Negativo

29





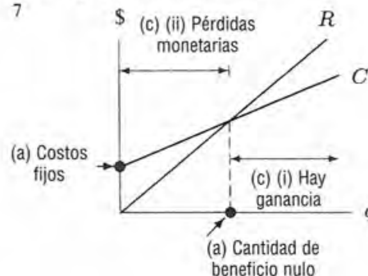
Sección 1.4

1 (a) $R(n) = 7 + 1.5n$
(b) $R(2) = \$10$ y $R(8) = \$19$

3 El costo fijo es de \$5,000
El costo variable de un artículo es de \$4
$C(q) = 4q + 5{,}000$

5 (a) Cuando se fabrican y se venden más de 335 artículos
(b) Aproximadamente \$650

7



9 (a) $C(q) = 6000 + 2q$
$R(q) = 5q$
$\pi(q) = -6000 + 3q$
(b) $q_0 = 2000$

11 (a) $C(q) = 650,000 + 20q$
$R(q) = 70q$
$\pi(q) = 50q - 650,000$
(b) \$20/par, \$70/par, \$50/par
(c) Más de 13,000 pares

13 (a) Primera lista de precios
$C_1(q) = 100 + 0.03q$ dólares
Segunda lista de precios
$C_2(q) = 200 + 0.02q$ dólares
(b) Primera lista de precios
(c) 10,000

15 (a) $V(t) = -2000t + 50,000$
(b)

(c) (0 años, \$50,000) y (25 años, \$0)

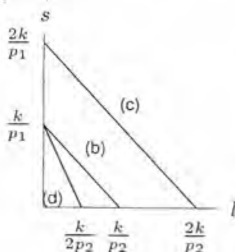
17 (a) $25,000r + 100m = 500,000$
(b) $m = 5000 - 250r$
(c) $r = 20 - \frac{1}{250}m$

19 (a) $q = 820 - 20p$
(b) $p = 41 - 0.05q$

21 (a) Primera: curva de demanda
Segunda: curva de oferta
(b) Aproximadamente 14
(c) Aproximadamente 24
(d) Menor
(e) Cualquier precio menor o igual a \$143
(f) Cualquier precio mayor o igual a \$110

23 (a) $p = \$10$; $q = 3000$
(b) Los proveedores fabrican 3,500 artículos; los consumidores compran 2,500 artículos
(c) Los proveedores fabrican 2,500 artículos; los consumidores compran 3,500 artículos

25 (a) $k = p_1 s + p_2 l$
(s = litros de refresco l = litros de aceite
(b) Intersecciones: $(l, s) = (0, k/p_1)$, $(k/p_2, 0)$



(c) Intersecciones
$(0, 2k/p_1), (2k/p_2, 0)$
(d) Intersecciones
$(0, k/p_1), (k/2p_2, 0)$

27 (a) $p = \$29.41$
$q = 38.23$ unidades
(b) El productor paga \$0.59
El consumidor paga \$0.88
Impuesto total \$1.47

29 (a) Aproximadamente 360 bolas de helado
(b) Aproximadamente 120 bolas de helado

Sección 1.5

1 (a) 100, crecimiento, 7%
(b) 5.3, crecimiento, 5.4%
(c) 3500, decrecimiento, −7%
(d) 12, decrecimiento, −12%

3 (a) $P = 1000 + 50t$
(b) $P = 1000(1.05)^t$

5 (a) $A = 50(0.94)^t$
(b) 11.33 mg
(c)

(d) Aproximadamente de 37 horas

7 (a) II
(b) I
(c) III
(d) V

9 22.6% por año

11 $g(t) = 5.50(0.8)^t$

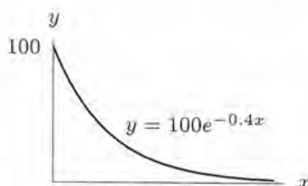
13 $y = 30(0.94)^t$

15 (a) Ninguna
(b) Exponencial:
$s(t) = 30.12(0.6)^t$
(c) Lineal:
$g(u) = -1.5u + 27$

17 74.5%

19 (a) La curva es creciente y cóncava hacia arriba
(b) $S = 50(1.19)^t$
(c) Aproximadamente 19% por año
(d) 679.5 megawatts

21 Decreciente: cóncava hacia arriba



23 $d = 670(1.096)^{h/1,000}$

25 (a) $P(t) = 5.6(1.012)^t$
(b) 0.069 miles de millones de personas/año
(c) 0.086 miles de millones de personas/año

27 (a) 125%
(b) Nueve veces

Sección 1.6

1 $t = (\ln 7)/(\ln 5) \approx 1.209$

3 $t = (\ln 2)/(\ln 1.02) \approx 35.003$

5 $t = (\ln 4)/(\ln 1.5) \approx 3.419$

7 $t = (\ln a)/(\ln b)$

9 $t = \ln 2.5 \approx 0.9163$

11 $t = 2(\ln 5 - \ln 3) \approx 1.0217$

13 $t = (\ln B - \ln P)/r$

15 $t = (\ln 7 - \ln 5)/(\ln 2 - \ln 3) \approx -0.8298$

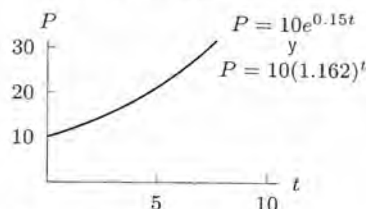
17 5; 7%

19 3.2; 3% (continua)

21 $P = (1.0833)^t$; $Q = (0.741)^t$

23 (a) D
(b) C
(c) B

25 (a) 15%
(b) $P = 10(1.162)^t$
(c) 16.2%
(d) Las gráficas son las mismas porque las funciones son iguales



27 $P = 2(0.6065)^t$: decreciente

29 $P = 7(0.0432)^t$: decreciente

31 $P = 10e^{0.5306t}$

33 $P = 4e^{-0.5978t}$

35 (a) 12%
(b) $P = 25e^{-0.128t}$, 12.8%

37 (a) $P = 3.6(1.034)^t$
(b) $P = 3.6e^{0.0334t}$
(c) Anual = 3.4%
Continuo = 3.3%

39 $P = 6.1e^{0.01252t}$

41 9.53%

Sección 1.7

1 Aproximadamente 10.24 años

3 (a) $A = 10.32e^{-0.057762t}$
(b) Aproximadamente 40.41 días

5 \$14,918.25

7 (a) \$1,534.69
(b) \$1,552.71

9 \$7,866.28

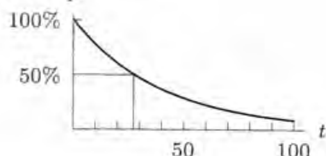
11 $P = 500e^{0.5493t}$,
7794

13 (a) $P(t) = 200(1.05)^t$
(b)

(c) 326
(d) ≈ 15 años

15 A: continua
B: anual
\$20

17 (a) $P(t) = (0.975)^t$
(b)



(c) Aproximadamente 27 años
(d) Aproximadamente 8%

19 Aproximadamente 6.39 años

21 7.925 horas

23 (a) Se gana \$11.84
(b) Se pierde \$9.19

25 (a) (i) Aproximadamente 3.17 miles de millones de dólares
(ii) Aproximadamente 5.62 miles de millones de dólares
(b) 1,803

27 0.0373; 231 millones de toneladas

29 70.4 gramos
26.5 años

31 Aproximadamente 6.58 años

33 (a) Opción 1
(b) Sí, aproximadamente 25%

35 Installmens

37 (a) \$116,224.95
(b) Sí

39 Sí

Sección 1.8

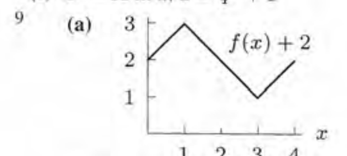
1 (a) $h^2 + 6h + 11$
(b) 11
(c) $h^2 + 6h$

3 (a) $2x^2 + 12x + 18$
(b) $2x^2 + 3$
(c) $8x^4$

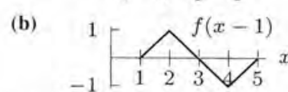
5 (a) $\sqrt{x^3 + 1}$
(b) $x^{3/2} + 1$
(c) $(x^3 + 1)^3 + 1$
(d) $\sqrt{x} + 1$
(e) $\sqrt{x + 1}$

7 (a) $y = u^6$, $u = 5t^2 - 2$
(b) $P = 12e^u$, $u = -0.6t$
(c) $C = 12 \ln u$, $u = q^3 + 1$

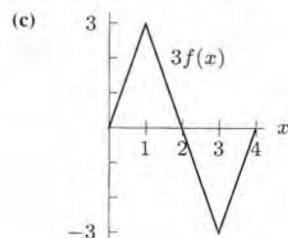
9 (a)



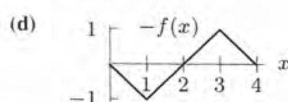
(b)



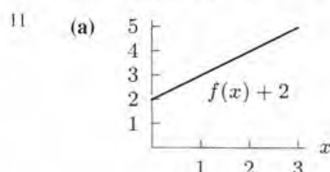
(c)



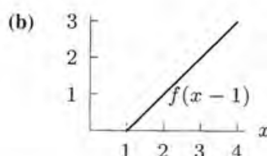
(d)



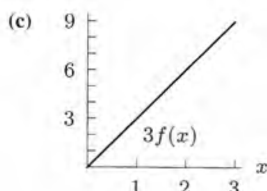
11 (a)



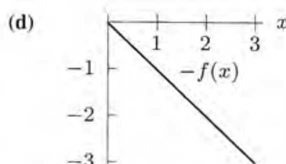
(b)



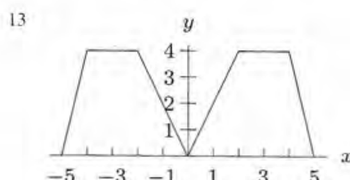
(c)



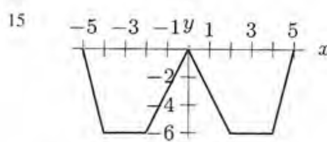
(d)



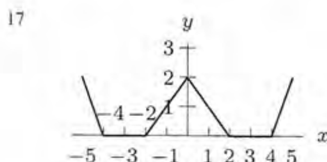
13



15



17



19 (a) 3
(b) 4
(c) 11
(d) 8
(e) 12

21 0.4

23 -0.9

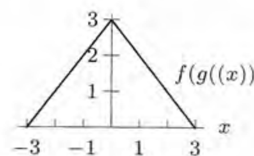
25 (a) $3n^2 + n - 1$
(b) $3n^3 + 3n^2 - 2n - 2$
(c) $n \neq -1$
(d) $3n^2 + 6n + 1$
(e) $3n^2 - 1$

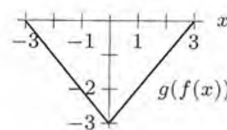
27 $2zh + h^2$

29 $4hz$

31 $f(x) = x + 1$
$g(x) = x^3$

33 $f(g(x))$: 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0
$g(f(x))$: 0, −1, −2, −3, −2, −1, 0





Sección 1.9

1 $y = 3x^{-2}$

3 $y = (3/8)x^{-1}$

5 $y = (5/2)x^{-1/2}$

7 $y = 0.2x^2$

9 $y = 125x^3$

11 $y = (1/5)x$

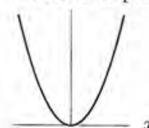
13 $E = kv^3$

15 $F = k/d^2$

17 No

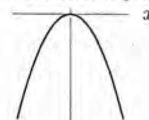
19 $N = k/L^2$; pequeñas

21 (a) Grado 2: coeficiente principal positivo
(b)



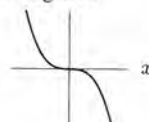
(c) Un punto de inflexión

23 (a) Grado 2: coeficiente principal negativo
(b)



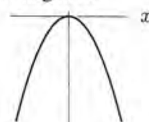
(c) Un punto de inflexión

25 (a) Grado 5: negativo
(b)



(c) Cuatro puntos de inflexión

27 (a) Grado 4: negativo
(b)

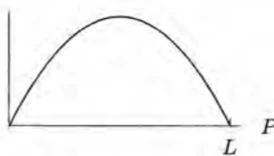


(c) Un punto de giro

29 Sí, $k \approx 0.0087$

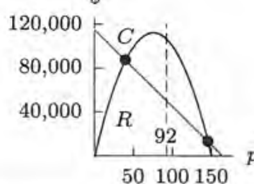
31 (a) $y = (x-2)^3 + 1$
(b) $y = -(x+3)^2 - 2$

33 (a) $R(P) = kP(L-P)$
$(k > 0)$
(b)



35 (I) **(a)** 3 **(b)** Negativo
(II) **(a)** 4 **(b)** Positivo
(III) **(a)** 4 **(b)** Negativo
(IV) **(a)** 5 **(b)** Negativo
(V) **(a)** 5 **(b)** Positivo

37 (a) $C = 115{,}000 - 700p$
$R = 3{,}000p - 20p^2$
(b)

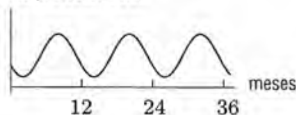


(d) Cuando cobra entre $40 y $145
(e) 5= Aproximadamente $92

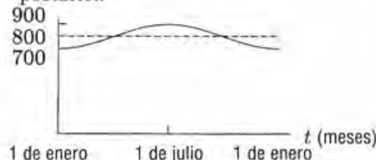
39 No

Sección 1.10

1 Ventas de protector solar

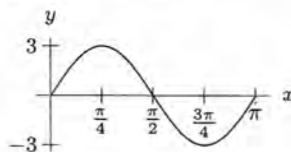


3

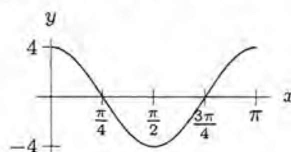


5 Periodo = 25, amplitud = 0.45
$f(15) = 2.0, f(75) = 1.4, f(135) = 2.3$

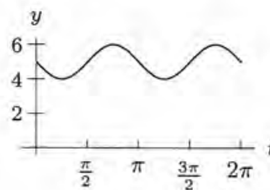
7 Amplitud = 3; Periodo = π



9 Amplitud = 4; Periodo = π



11 Amplitud = 1; Periodo = π



13 Sí; 28 días; día 12; días del 17 al 21

15 0.3 segundos

17 $f(x) = 5\cos(x/3)$

19 $f(x) = -4\,\mathrm{sen}(2x)$

21 $f(x) = -8\cos(x/10)$

23 $f(x) = 5\,\mathrm{sen}\,((\pi/3)x)$

25 $f(x) = 3 + 3\,\mathrm{sen}\,((\pi/4)x)$

27 $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(\pi x/9)$

29 $60 - 20\cos(\pi t/12)$.

31 (a) Profundidad promedio del agua
(b) $A = 7.5$
(c) $B = 0.507$
(d) El momento de una marea muy alta

Repaso del capítulo 1

1 Argentina produjo 14 millones de toneladas métricas de trigo en 1999

3 (a) -2
(b) 10
(c) 3
(d) 3

5 (a) $48,788 millones
(b) $6,098.5 millones por año
(c) Sí; 1989-90, 1995-96

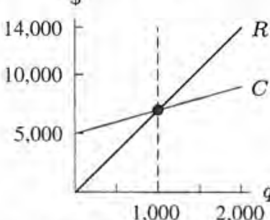
7 $y = -1 + 2x$

9 $y = 2$

11 $F(t)$ Cóncava hacia abajo, $G(t)$: lineal
$H(t)$: Cóncava hacia arriba

13 (a) $80 - 4t$
(b) $80(0.95)^t$

15 (a) Cuando hay más de 100 clientes
(b)



17 $y = -(950/7)x + 950$

19 (b) Cáncer de pulmón: 1.1 (las respuestas pueden variar)
(c) Cáncer de estómago: -0.5 (las respuestas pueden variar)

21 $y = (-3/7)x + 3$

23 $y = 3e^{0.2197t}$
o $y = 3(1.2457)^t$

25 $z = 1 - \cos\theta$

27 $(\log(2/5))/(\log 1.04) = -23.4$

29 $\ln(0.4)/3 = -0.305$

31 Aproximadamente 11.6 años

33 (a) $C = 338.5 + 1.545t$,
1.545 ppm/ año
(b) $C = 338.5(1.0044)^t$,
0.44 %/año

35 96.34 años

37 (a) $(\ln x)^2 + 1$
(b) $\ln(x^2 + 1)$
(c) $x^4 + 2x^2 + 2$

39 Masa sanguínea = 0.05 (Masa corporal)
3.5 kilogramos

41 $y = -(x+3)^2 + 2$

43 (a) $C = 5q + 7{,}000$
$R = 12q$
(b) $q = 1{,}520, \pi(12) = \$3{,}640$
(c) $C = 17{,}000 - 200p$
$R = 2{,}000p - 40p^2$
$\pi(p) = -40p^2 + 2{,}200p - 17{,}000$
(d) A $27.50 por camisa la ganancia es de $13,250

45 Préstamo

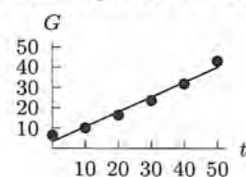
47 $y = 7\,\mathrm{sen}(\pi t/5)$

49 (a) Periodo = 12 meses
Amplitud = 4,500 casos
(b) Aproximadamente 2,000 casos y 2,000 casos

51 (a) El periodo es 12; la amplitud, 4
(b) $g(34) = 11; g(60) = 14$

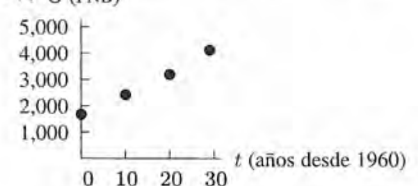
Modelado: ajuste de datos

1 (a)



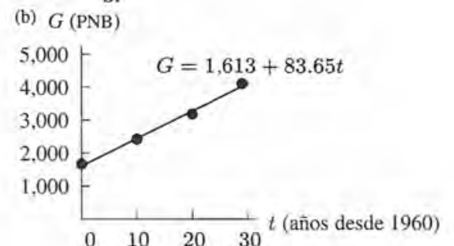
(b) Aumento a razón de $734 miles de millones/año
(c) $43.9 billones, $54.9 billones
Mayor confianza en la predicción de 2005

3 (a)



Sí

(b)

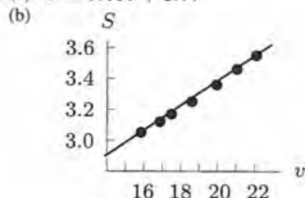


$G = 83.65t + 1{,}613$

(c) Para 1985: 3704
Para 2020: 6632
Más confianza en 1985

5 (a) $S = 0.08v + 1.77$

(b)

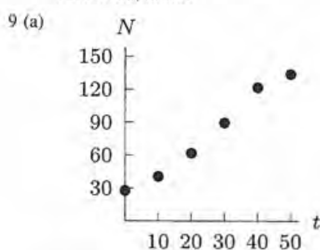


Sí

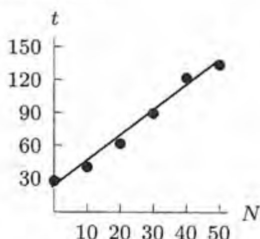
(c) En $v = 18$ pies/segundos, $S = 3.21$
En $v = 10$ pies/segundos, $S = 2.57$
$v = 18$ mejor

7 (a) $0.0026 = 0.26\%$
(b) Para 1900, 272.27
Para 1980, 335.1

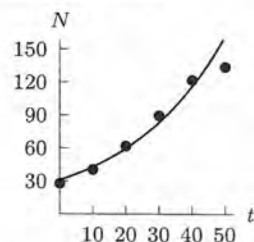
9 (a)



(b) Exponencial
(c) $N = 2.3t + 21.7$,
182.7 millones

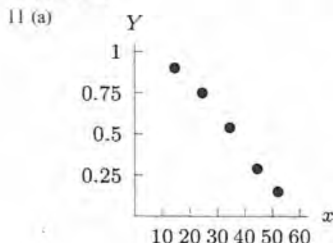


(e) $N = 29.7(1.034)^t$; las respuestas pueden variar 308.5 millones

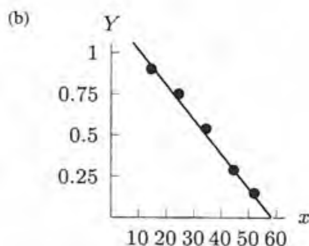


(f) 3.4%

11 (a)

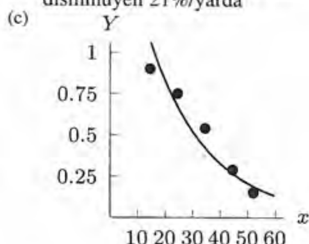


(b)



$Y = -0.021\,x + 1.23$. Los éxitos disminuyen 21%/yarda

(c)

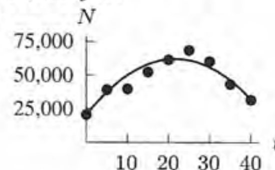


$Y = 2.17(0.954)^x$. Las respuestas pueden variar 20.6%

(d) Lineal

13 Coeficiente principal > 0

15 (a) Regresión cuadrática
(b) $N = -0.0886t^2 + 3.93t + 17.7$, las respuestas pueden variar
(c) 15,135 ojivas
(d)



17 (a) y = (m. hectáreas)



(b) Aumenta: cóncava hacia abajo
(c) $y \approx -1884.66 + 248.92 \ln x$
(d) Aproximadamente 8.6 millones de hectáreas

Modelado: interés compuesto

1 27%

3 (a) $160,356.77
(b) $165,510.22
(c) $165,891.05
(d) $165,989.48
(e) $166,005.85

5 6.18%

7 8.33%

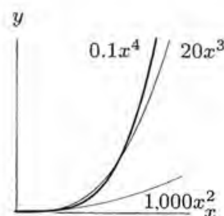
9 (a) 1.0408107
1.0408108
1.0408108
4% compuesto continuamente $\approx 4.08108\%$
(b) $e^{0.04} \approx 1.048108$

11 (a) V, (b) III, (c) IV, (d) I, (e) II

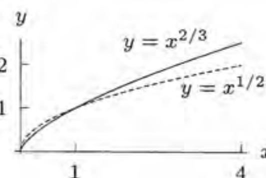
13 (a) 13,900 cruceiros
(b) 24.52%

Teoría: límites al infinito

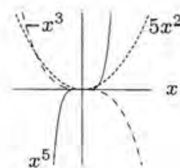
1 Mayores: $0.1x^4$
Menores: $1{,}000x^2$



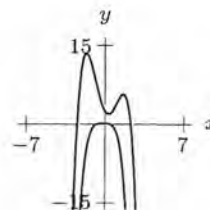
3 $y = x^{2/3}$ es mayor a medida que $x \to \infty$

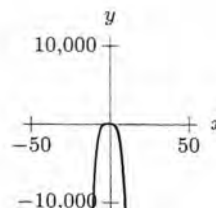


5 Cuando $x \to \infty$, x^5 mayores positivos;
Cuando $x \to -\infty$, $-x^3$ mayores positivos

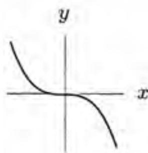


7

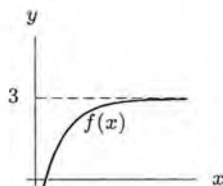




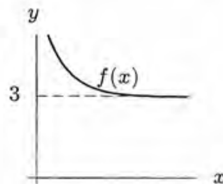
9



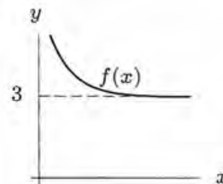
11 (b) (i)



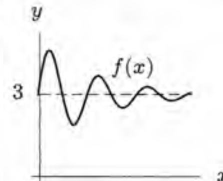
(ii)



(iii)



(iv)



13 0

15 $-\infty, -\infty$

17 $8, -\infty$

19 $3x^5$

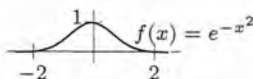
21 $x^{1/2}$

23 $0.5x^4$

25 A: $0.2x^5$,
B: x^4,
C: $5x^3$,
D: $70x^2$

27 A es $100x^2$
B es x^5
C es 3^x

29



(a) Aumenta para $x < 0$
decrece para $x > 0$
(b) Cóncava hacia abajo
(c) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to 0$;
cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$

Sección 2.1

1 (a) 8 pies/segundos
(b) 6 pies/segundos

3

Pendiente	-3	-1	0	$1/2$	1	2
Punto	F	C	E	A	B	D

5 (a) Entre $x = 0$ y $x = 3$
(b) En $x = 1$
(c) Miles de dólares/kilogramo

7 (a) Positiva
(b) Negativa

9 $f'(2) \approx 9.89$

11 (a) 0.499 porcentaje/año
(b) 0.36–0.59 porcentaje/año
(c) Entre 0.1 y 0.37 porcentaje/año
(d) Siempre es creciente

13 $f'(d) = 0$, $f'(b) = 0.5$, $f'(c) = 2$, $f'(a) = -0.5$, $f'(e) = -2$

15 (a) Negativa
(b) $g'(2) \approx -0.1$

17 (a) Negativa
(b) $f'(1960)$

19 (a) $f(4)$
(b) $f(2) - f(1)$
(c) $(f(2) - f(1))/(2 - 1)$
(d) $f'(1)$

21 $(4, 25)$; $(4.2, 25.3)$; $(3.9, 24.85)$

23 (a) Negativa;
Positiva;
Positiva
(b) (i) $-0.34, -0.08$
(ii) $0.15, 0.29$
(iii) $4.88, 9.25$

25 $f'(1) \approx 1.0005$;
$f'(2) \approx 1.6934$;
f es cóncava hacia arriba en $[1, 2]$

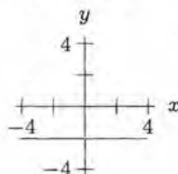
Sección 2.2

1 VIII

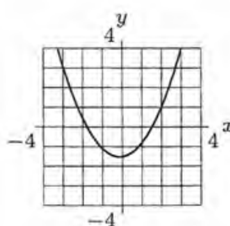
3 II

5 (a) 3
(b) Positiva: $0 < x < 4$
Negativa: $4 < x < 12$

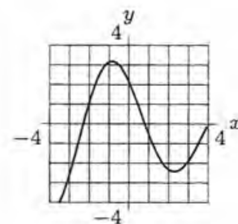
7



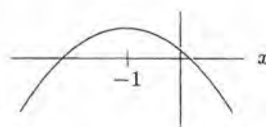
9



11

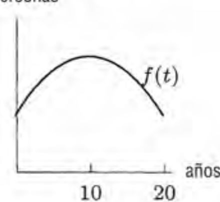


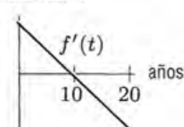
13



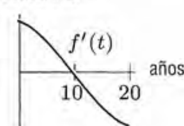
15 $f'(x)$ positiva: $4 \le x \le 8$
$f'(x)$ negativa: $0 \le x \le 3$
$f'(x)$ máxima en $x \approx 8$

17

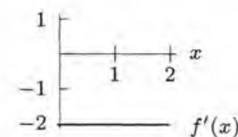




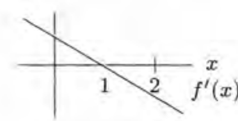
o



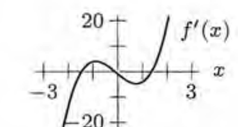
19



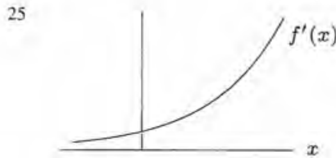
21



23

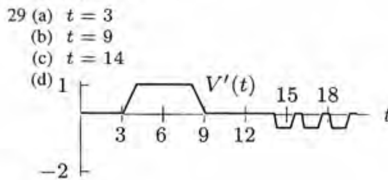


25



27 $f'(2) = 4$
$f'(3) = 9$
$f'(4) = 16$
El patrón parece ser
$f'(x) = x^2$.

29 (a) $t = 3$
(b) $t = 9$
(c) $t = 14$
(d)



31 (a) $x_1 < x < x_3$
(b) $0 < x < x_1$; $x_3 < x < x_5$

Sección 2.3

1 (a) Negativa
(b) Grados/minuto

3 (a) 200 galones cuestan $350
(b) El galón 201 cuesta $1.40

7 25 megavatios/año

9 (a) La dosis para 140 libras es de 120 mg
La dosis aumenta 3mg/libra
(b) 135 mg

11 (a) 20 minutos
0.36 mg,
−0.002 mg/minuto
(b) $f(21) \approx 0.358$
$f(30) \approx 0.34$

13 (a) $f(0) = 80$; $f'(0) = 0.50$
(b) $f(10) = 85$.

15 (a) Consumir 1,800 calorías por día da como resultado un peso de 155 libras; consumir 2,000 calorías por día no ocasiona ganancia o pérdida de peso.
(b) Libras/(calorías/día)

17 (a) Si invertimos los $1,000 a una tasa de 5% producirán $1,649 después de 10 años.
(b) Dólares/%

19 dólares/año; negativo

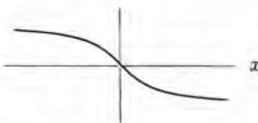
23 (a) $f'(a)$ siempre es positivo
(c) $f'(100) = 2$: más
$f'(100) = 0.5$: menos

Sección 2.4

1 (a) Negativa
(b) Negativa
(c) Positiva

3 B

5



7 $f'(x) > 0$
$f''(x) > 0$

9 $f'(x) < 0$
$f''(x) = 0$

11 $f'(x) > 0$
$f''(x) < 0$

13 (a) Positiva; positiva
(b) 3.23 millones de automóviles por año

15 Derivada
Positiva $0 < t < 0.4, 1.7 < t < 3.4$
Negativa $0.4 < t < 1.7, 3.4 < t < 4$
Segunda derivada
Positiva $1 < t < 2.6$
Negativa $0 < t < 1, 2.6 < t < 4$

17 $w'(t)$: negativa
$w''(t)$: positiva

19 (a) $dP/dt > 0, d^2P/dt^2 > 0$
(b) $dP/dt < 0, d^2P/dt^2 > 0$
(pero dP/dt está cerca de cero)

21 Una segunda derivada positiva indica el éxito de la campaña.
Una segunda derivada negativa indica el fracaso de la campaña.

23 (a) B y E
(b) A y D

25 (a) 1989: $dP/dt \approx -2.77$
1992: $dP/dt \approx -2.03$
1995: $dP/dt \approx -1.50$
1998: $dP/dt \approx -0.57$
(b) Positiva.

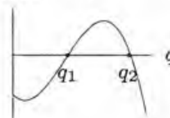
Sección 2.5

1 $C(1{,}001) \approx \$5{,}025$,
$C(999) \approx \$4{,}975$,
$C(1{,}100) \approx \$7{,}500$

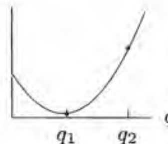
3 (a) $2,408
(b) $2,192

5 En $q = 5$;
En $q = 40$

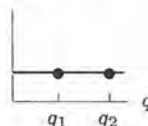
7 Ganancia



Costo marginal



Ingreso marginal



9 (a) Costos fijos
(b) Decrece lentamente, después aumenta

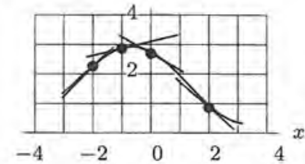
11 $q = 4{,}000$

13 (a) $9
(b) −$3
(c) $C'(78) = R'(78)$

Repaso del capítulo 2

1 (a) Cuatro
(b) Creciente en $x = 0$ y en $x = 2$; decreciente en $x = 4$
(c) $2 \leq x \leq 3$
(d) $x = 2$

3 1.0, 0.3, −0.5, −1

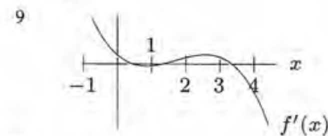


5 $f'(1) \approx 3.3$; el mayor

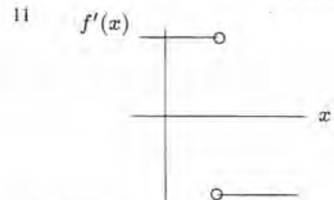
7



9

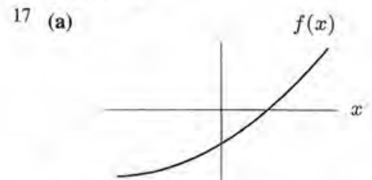


11

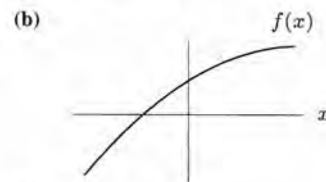


13 $f(21) \approx 65$
$f(19) \approx 71$
$f(25) \approx 53$

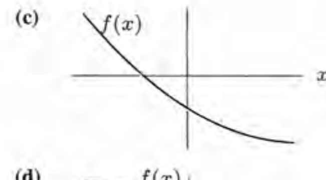
17 (a)



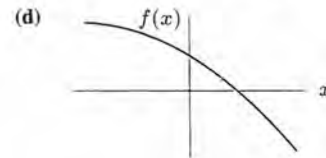
(b)



(c)



(d)



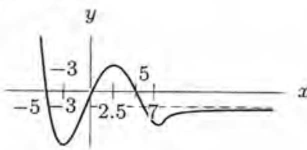
19 357

21 (a) $f(7) = 3$
(b) $f'(7) = 4$

23 $P'(6) = 2{,}050{,}000$ personas/año

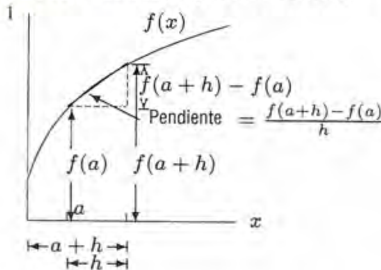
27 (a) Negativa
(b) $^\circ$F/min

31



Teoría: límites, derivadas

1



3 1

5 27

7 2.7

9 Sí

11 No; sí

13 Sí

15 Sí

17 No

19 No es continua

21 No es continua

23 No es continua

Sección 3.1

1 0

3 5

5 $-12x^{-13}$

7 $24t^2$

9 $3q^2$

11 $18x^2 + 8x - 2$

13 $24t^2 - 8t + 12$

15 $-12x^3 - 12x^2 - 6$

17 $2z - \frac{1}{2}z^{-2}$

19 $6t - 6/t^{\frac{3}{2}} + 2/t^3$

21 $2ax + b$

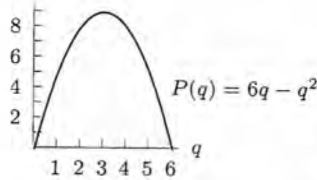
23 $2at - 2b/t^3$

25 $(8\pi rb)/3$

27 RESPUESTA CORTA NO ESCRITA

29 $f'(0) = 7$, $f'(2) = 3$, y $f'(-1) = 18$

31 (a) $P'(1)$: Positiva;
$P'(3)$: Cero;
$P'(4)$: Negativa



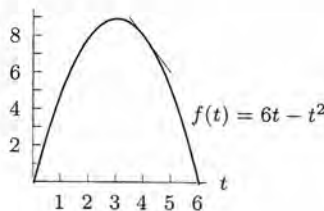
(b) $P'(1) = 4$, $P'(3) = 0$, $P'(4) = -2$

33 Altura = 625 cm.
Cambia (la erosión) a –30 cm/año

35 $f'(t) = 6t^2 - 8t + 3$
$f''(t) = 12t - 8$

37 Después de cuatro meses hay 4,800 mejillones cebra, aumentan a razón de 2,400 por mes.

39 $y = -2t + 16$



41 $100

43 (a) 770 bushels por acre
(b) 40 bushels por acre por libra de fertilizante
(c) Hay que usar más fertilizante

45 (a) $dC/dq = 0.24q^2 + 75$
(b) $C(50) = \$14{,}750$; $C'(50) = \$675$ por unidad

47 $(-1, 7)$ y $(7, -209)$

49 (a) $v(t) = -32t$
$v \leq 0$ porque la altura es decreciente
(b) $t \approx 8.84$ segundos
$v = -282.88$ pies/segundos
$\approx$-192.87 mph

Sección 3.2

1 $2e^x + 2x$

3 $9t^2 + 2e^t$

5 $5 \cdot 5^t \ln 5 + 6 \cdot 6^t \ln 6$

7 $4(\ln 10)10^x - 3x^2$

9 $5(\ln 2)(2^x) - 5$

11 $12.41(\ln 0.94)(0.94)^t$

13 Ae^t

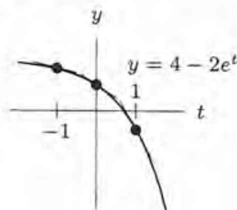
15 $(\ln 10)10^x - 10/x^2$

17 $3/q$

19 $2t + 5/t$

21 $2x + 4 - 3/x$

23 $f'(-1) \approx -0.736$
$f'(0) = -2$
$f'(1) \approx -5.437$



25 Aproximadamente $2,864; $0.60

27 $f(0) = 50$ megawatts,
$f'(0) = 8.70$ megavatios/año
$f(10) = 284.73$ megawatts,
$f'(10) = 49.53$ megavatios/año

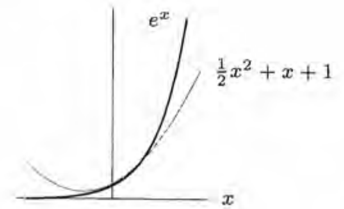
29 $\approx 22.5(1.35)^t$

31 (a) $f'(0) = -1$
(b) $y = -x$

33 (a) $y = x - 1$
(b) 0.1; 1
(c) Sí

35 Crece para $\alpha > 1$,
Decrece para $\alpha < 1$

37 $g(x) = x^2/2 + x + 1$



Sección 3.3

1 $99(x+1)^{98}$

3 $200t(t^2+1)^{99}$

5 $15(5r-6)^2$

7 $3e^{3t}$

9 $-4e^{-4t}$

11 $-30e^{-0.6t}$

13 $-6x + 6e^{3x}$

15 $30e^{5x} - 2xe^{-x^2}$

17 $-6te^{-3t^2}$

19 $5/(5t+1)$

21 $2t/(t^2+1)$

23 $e^x/(e^x+1)$

25 $4/(4t+9)$

27 $100t(t^2+5)^{-0.5}$

29 $2(5+e^x)e^x$

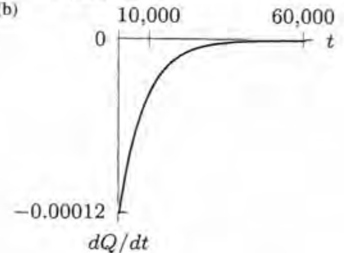
31 $y = -2t + 1$

33 $y = 4451.66x - 3560.81$

35 $C(50) \approx 1365$, $C'(50) \approx 18.27$

37 15.4 ng/ml,
-2.16 ng/ml por hora

39 (a) $-0.000121e^{-0.000121t}$
(b)



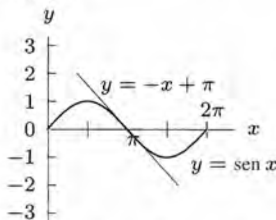
41 (a) $P(1 + r/100)^t \ln(1 + r/100)$
(b) $Pt(1 + r/100)^{t-1}/100$

Sección 3.4

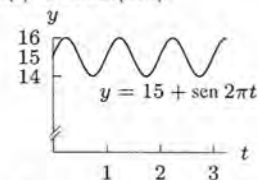
1 $5x^4 + 10x$
3 $e^x(x+1)$
5 $2^x(1 + x\ln 2)$
7 $2t(3t+1)^3 + 9t^2(3t+1)^2$
9 $e^t(t^2 + 2t + 3)$
11 $(t^3 - 4t^2 - 14t + 1)e^t$
13 $-(5/t^2) - (12/t^3)$
15 $-3qe^{-q} + 3e^{-q}$
17 $(e^{-z})/(2\sqrt{z}) - \sqrt{z}e^{-z}$
19 $e^{5-2t}(1-2t)$
21 $(3t^2+5)(t^2-7t+2) + (t^3+5t)(2t-7)$
23 $3/(1+2z)^2$
25 $e^x/(1+e^x)^2$
27 $(z\ln z - 1 - z)/(z(\ln z)^2)$
29 $6ax(ax^2+b)^2$
31 $(ak - bc)/(cx+k)^2$
33 $f'(x) = 12x + 1$ y
$f''(x) = 12$
35 (a) $R(p) = 1{,}000pe^{-0.02p}$
(b) $R'(p) = e^{-0.02p}(1{,}000 - 20p)$
(c) aproximadamente \$8,187; aproximadamente \$655
37 $Q(t) = (1 + \ln 2)t - 2 \approx 1.69t - 2$

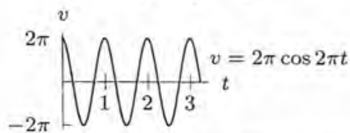
Sección 3.5

1 $5\cos x$
3 $2t - 5\,\mathrm{sen}\,t$
5 $5\cos x - 5$
7 $5\cos(5t)$
9 $AB\cos(Bt)$
11 $3\cos(3x)$
13 $12\cos(2t) - 4\,\mathrm{sen}(4t)$
15 $2x\cos x - x^2\,\mathrm{sen}\,x$
17 $(2t\cos t + t^2\,\mathrm{sen}\,t)/(\cos t)^2$
19 $y = -x + \pi$



21 Decreciente, cóncava hacia arriba
23 (a) $v(t) = 2\pi\cos(2\pi t)$
(b)

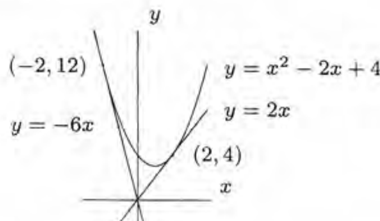




25 $(5\pi/3)kc\cos(\pi t/6)/(k + 10\,\mathrm{sen}(\pi t/6) + 10)^2$

Repaso del capítulo 3

1 $24t^3$
3 $3r^2 + 5$
5 $3x^2 - 6x + 5$
7 $15t^2 - 2t + 20$
9 $2x + \frac{3}{x}$
11 $6z(z^2+5)^2$
13 $2z/(z^2+1)$
15 $-5e^{-0.05p}$
17 $2t + \frac{2}{t}$
19 $5(\mathrm{sen}\,t)^4(\cos t)$
21 $2\cos(2x)$
23 $(50x - 25x^2)/(e^x)$
25 $e^x/(1+e^x)$
27 $10e^x(1+e^x)^9$
29 $(e^x - 2 - e^{-x})/(1 - e^{-x})^2$
31 $xe^x + e^x$
33 $-3x^2\,\mathrm{sen}(x^3)$
35 $(t^2 + 6t + 13)/(t+3)^2$
37 $y = -4 - x$
39 $v(t) = 10e^{\frac{t}{2}}$
41 Ingreso $R(10) \approx 22{,}466$. $R'(10) \approx$ \$449/dólar.
43 México, puesto que $dM/dt > dU/dt$ en $t = 0$
45 (a) 2
(b) 15
(c) 11
(d) $-1/4$
47 (a) Baja, 0.38 m/hr
(b) Sube, 3.76 m/hr
(c) Sube, 0.75 m/hr
(d) Baja, 1.12 m/hr
49 Para $x < 0$ o $2 < x < 3$
51 $y = 2x$ y $y = -6x$



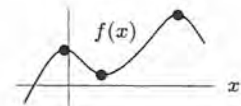
53 Proporcional a r^2
55 (c) $B'(10) \approx -3776.63$
59 $b = 1/40$ y $a = 169.36$

Práctica: derivación

1 $2t + 4t^3$
3 $15x^2 + 14x - 3$
5 $-2/x + 5/(2\sqrt{x})$
7 $10e^{2x} - 2\cdot 3^x(\ln 3)$
9 $2pe^{p^2} + 10p$
11 $2x\sqrt{x^2+1} + x^3/\sqrt{x^2+1}$
13 $16/(2t+1)$
15 $2^x(\ln 2) + 2x$
17 $6(2q+1)^2$
19 bke^{kt}
21 $2x\ln(2x+1) + 2x^2/(2x+1)$
23 $10\cos(2x)$
25 $15\cos(5t)$
27 $2e^x + 3\cos x$
29 $17 + 12x^{-1/2}$
31 $20x^3 - 2/x^3$
33 $1, x \neq -1$
35 $-3\cos(2 - 3x)$
37 $6/(5r+2)^2$
39 $ae^{ax}/(e^{ax} + b)$
41 $5(w^4 - 2w)^4(4w^3 - 2)$
43 $(\cos x - \mathrm{sen}\,x)/(\mathrm{sen}\,x + \cos x)$
45 $6/w^4 + 3/(2\sqrt{w})$
47 $(2t - ct^2)e^{-ct}$
49 $(\cos\theta)e^{\mathrm{sen}\,\theta}$
51 $3x^2/a + 2ax/b - c$
53 $2r(r+1)/(2r+1)^2$
55 $2e^t + 2te^t + 1/(2t^{3/2})$
57 $x^2\ln x$
59 $6x\left(x^2+5\right)^2\left(3x^3-2\right)\cdot\left(6x^3+15x-2\right)$
61 $(2abr - ar^4)/(b + r^3)^2$
63 $20w/(a^2 - w^2)^3$

Sección 4.1

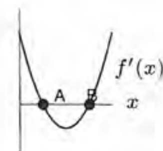
1 Tres



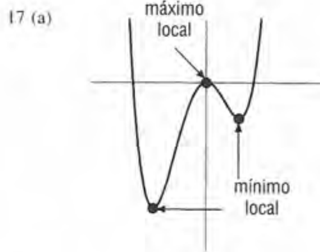
3 Uno



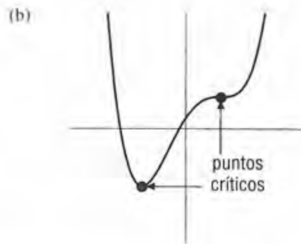
5 Máximo local
7 Máximo, mínimo local o ninguno
Precio relativamente constante alrededor del 1 de julio
9 Máximo local $(-1.4, 6.7)$
Mínimo local $(1.4, -4.7)$
11 Máximo local (-1.2)
Mínimo local $(1, -2)$
Punto crítico (no es máximo ni mínimo): (0,0)
13 Mínimo local $(0.37, -0.37)$
15 A: máximo local
B: mínimo local



17 (a)



(b)



19 $a = 4, b = 1$

21 $a = 3e, b = -3$

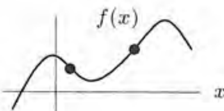
23 (a) $x \approx 2.5$ (o cualquiera $2 < x < 3$)
$x \approx 6.5$ (o cualquiera $6 < x < 7$)
$x \approx 9.5$ (o cualquiera $9 < x < 10$)
(b) $x \approx 2.5$: máximo local;
$x \approx 6.5$: mínimo local;
$x \approx 9.5$: máximo local

25 (a) $f(\theta) = 0$ en $\theta = 0$
(b) $f'(\theta) = 1 - \cos\theta > 0$
para $0 < \theta \leq 1$.
El único cero está en el origen

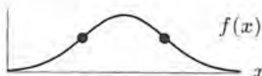
27 Uno

Sección 4.2

1 Dos



3 Dos



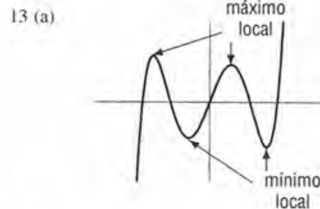
5 $x = -1, 1/2$

7 Puntos críticos:
$x = -3$ (máximo local) y $x = 2$ (mínimo local)
Punto de inflexión: $x = -1/2$.

9 Puntos críticos:
$x = 0$ (máximo local) y $x = \pm 2$ (mínimo local).
Puntos de inflexión: $x = \pm 2/\sqrt{3}$

11 Puntos críticos:
$x = -1$ (máximo local)
$x = 0$ (no es un extremo)
$x = 1$ (mínimo local)
Puntos de inflexión:
$x = 0$ y $x = \pm 1/\sqrt{2}$

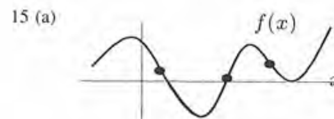
13 (a)



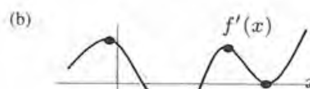
(b) 3



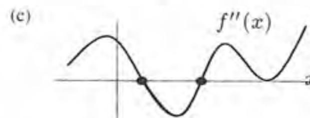
15 (a)



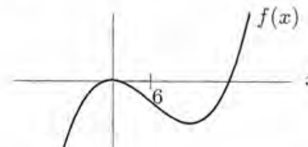
(b)



(c)

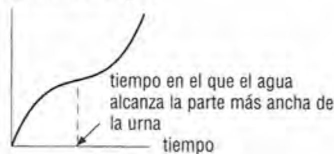


17 $x = 6$

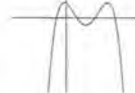


19 (a) 6 pm
(b) Mediodía: otro entre el mediodía y las 6 p. m.

21 Profundidad del agua



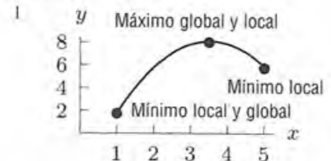
23 (a)



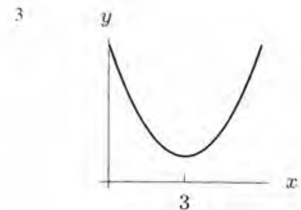
(b) Cuando mucho cuatro ceros
(c) Posiblemente no hay ceros
(d) Dos puntos de inflexión
(e) Grado cuatro
(f) $-(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)$

Sección 4.3

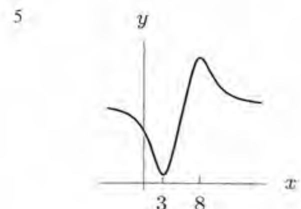
1



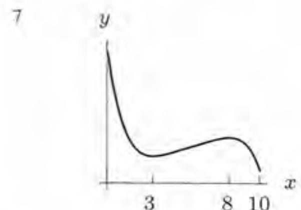
3



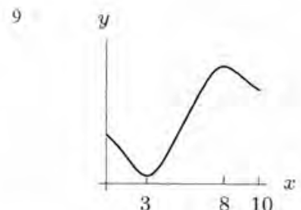
5



7



9



11 (a) $f(0.91)$ es un mínimo global
$f(3.73)$ es un máximo global
(b) $f(-3)$ es un mínimo global
$f(2)$ es un máximo global

13 (a) $f(1)$ mínimo local
$f(0.1)$, $f(2)$ máximo local
(b) $f(0.1)$ máximo global
$f(1)$ mínimo global

15 (a) $D = C$
(b) $D = C/2$

17 2.4 horas

19 306 niños

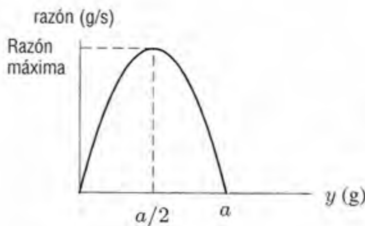
21 (a) 0
(b) 0.69 horas, 5 mg
(c) Tiende a 0

23 (b) $f(v) = v \cdot a(v)$
(c) Cuando $a(v) = f'(v)$

(d) $a(v)$

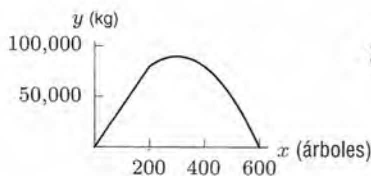
25 (a) $H = 1/b, S = ae^{-1}/b$
(b) a: Aumenta
b: Disminuye

27 (a) $0 \le y \le a$



(b) $y = a/2$

29 (a) $y = \begin{cases} 200x & x \le 200 \\ 600x - x^2 & x > 200 \end{cases}$



(b) 300 árboles/km^2

33 (a) $x = \mu$
(b) Sí; $x = \mu \pm \sigma$

Sección 4.4

1 (a) $q = 2{,}500$
(b) $3 por unidad
(c) $3,000

3 Máximo global de $6,875 en $q = 75$

5 $5.5 < q < 12.5$ positiva;
$0 < q < 5.5$ y $q > 12.5$ negativa;
Máximo en $q \approx 9.5$

7 Arriba de 2,000

9 $R(q) = 45q - 0.01q^2$
Ingreso máximo en $q = 2{,}250$
$p = \$22.50$; Ingreso = $50,625

11 (a) Ordenar a/q
Almacenar bq
(b) $\sqrt{a/b}$

13 $14.

15 $L = [\beta pcK^{\alpha}/w]^{1/(1-\beta)}$

17 (a) No
(b) Sí

Sección 4.5

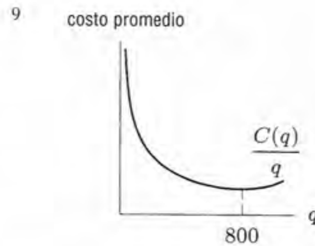
1 (a) (i) $8 por unidad
(ii) $4 por unidad
(b) 30 unidades

3 (a) $12 para los dos
(b) $a(100) = \$37$
$a(1{,}000) = \$14.50$

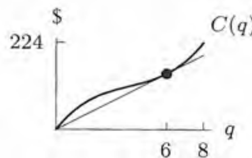
5 (a) Aumentará
(b) no se puede decir

7 (a) Ganará dinero
(b) Al aumentar: crecerá
(c) Que aumente

9



11 (a) $q = 6$



(b) $q = 6$

13 (a) No
(b) Sí

Sección 4.6

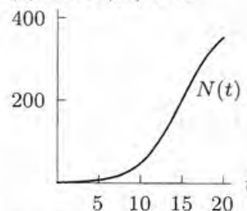
1 (a) Disminución de 6%
(b) Aumento de 6%

7 High

13 (a) $E \approx 0.470$, inelástica
(c) $P = 1.25$ y 1.50

Sección 4.7

3 (a) 1
(b) $N(2) \approx 2$; $N(10) \approx 48$
(c)



(d) Aproximadamente 15 horas:
32 horas
(e) Cuando 200 personas han escuchado el rumor

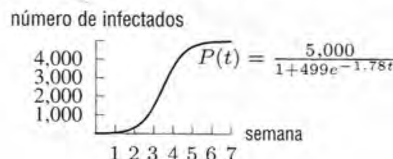
5 (b) 36%
(c) 75%

7 (a)



(b) 60,000

9 (a) 5000
(b) 499
(c) $P(t) = 5{,}000/(1 + 499e^{-1.78t})$



(d) Aproximadamente 3.5 semanas: 2,500

11 (b) $f'(10) < 11$
$f'(20) < 11$

13 (a) C: la más grande
B: la más pequeña
(b) A: la más grande
B: la más pequeña
(c) C: la más segura

17 Efectivo en 85%
letal en 6%

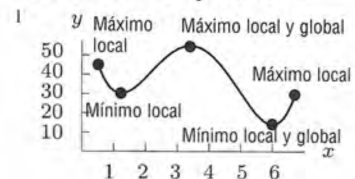
19 (a) $k(1 - 2P/L) \cdot dP/dt$

Sección 4.8

7 (b) Mínimo efectivo ≈ 0.2 Máxima seguridad ≈ 1.0
(c) Mínimo efectivo ≈ 1.2 Máxima seguridad ≈ 2.0

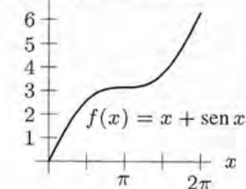
Repaso del capítulo 4

1

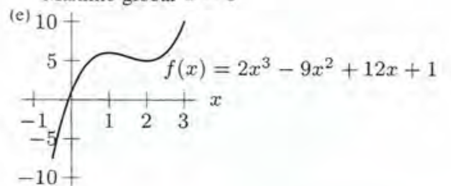


3 44.1 pies

5 (a) $f'(x) = 1 + \cos x$,
$f''(x) = -\operatorname{sen} x$.
(b) $x = \pi$
(c) $x = 0, \pi, 2\pi$
(d) Mínimo global: $x = 0$
Máximo global: $x = 2\pi$
(e)



7 (a) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$,
$f''(x) = 12x - 18$.
(b) $x = 1, 2$
(c) $x = 3/2$
(d) Mínimo local $x = 2$
Máximo local $x = 1$
Mínimo global $x = -0.5$
Máximo global $x = 3$
(e)



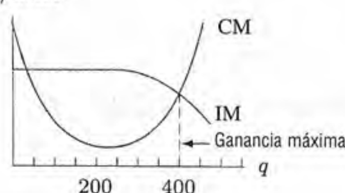
9 (a) Aumenta para $x > 0$
Disminuye para $x < 0$
(b) Mínimo local y global $f(0)$

11 (a) Aumenta para $0 < x < 4$
Disminuye para $x < 0$ y $x > 4$
(b) Máximo local $f(4)$
Mínimo local $f(0)$

13 $q = 1{,}000$ o $q = 4{,}500$

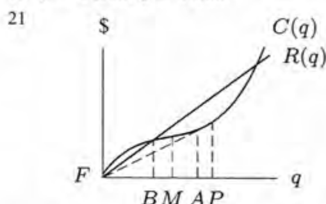
15 Intersecciones $(0, 0), (1.77, 0), (2.51, 0)$
Puntos críticos $(0, 0), (1.25, 1), (2.17, -1), (2.80, 1)$
Puntos de inflexión $(0.81, 0.61), (1.81, -0.13), (2.52, 0.07)$

17 (a) $q = 350$
(b)



19 $p = \$4.50, q = 3{,}600.$

21



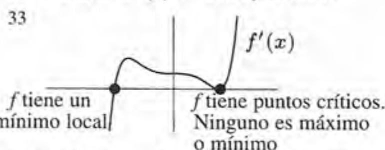
23 (a) $(1/b, (a/b)e^{-1})$ máximo local
(b) $(1/b, (a/b)e^{-1})$ es un máximo global
Las poblaciones grandes pueden tener menos descendientes que las pequeñas

27 (b) Instalar cuatro filtros
(c) No comprar los soportes de los filtros
(d) Instalar cuatro filtros

29 (a) Un polinomio; coeficiente principal negativo; grado 2
(b) Exponencial
(c) Logística
(d) Logarítmica
(e) Un polinomio; coeficiente principal positivo; grado 2
(f) Exponencial
(g) Pulso
(h) Periódica
(i) Un polinomio; coeficiente principal negativo; grado 3

31 $b = 2, a = 5/(2 - 2\ln 2) \approx 8.147$

33



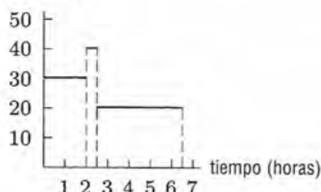
35 (a) Aproximadamente 33.3 minutos: aproximadamente 245 mg/ml
(b) Aproximadamente 191 mg/ml: aproximadamente 198 mg/ml
(c) En tres horas

Sección 5.1

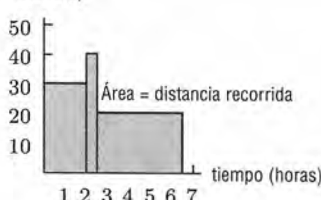
1 352.5 pies

3 (a) 3,575 millones de personas
(b) 2,740 millones de personas; difiere en 165 millones

5 (a)



(b)



7 Entre 140 y 150 metros

9 474 miles de millones de barriles

11 (a) Automóvil A
(b) Automóvil A
(c) Automóvil B

13 (a) Estimación inferior = 5.25 mi
Estimación superior = 5.75 mi
(b) Estimación inferior = 11.5 mi
Estimación superior = 14.5 mi
(c) Cada 30 segundos

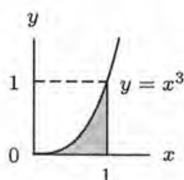
15 (a) 430pies
(b) (ii)

17 220 peces

Sección 5.2

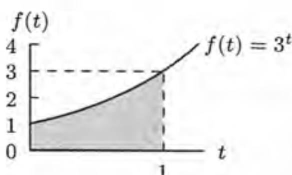
1 (a) 224
(b) 96
(c) 200
(d) 136

3 (a) 0.3



(b) 0.25

5 (a) 1.8



(b) 1.8205

7 $17{,}000, n = 4, \Delta x = 10$

9 Aproximadamente 543

11 Aproximadamente 60

13 Aproximadamente 17

15 41.7

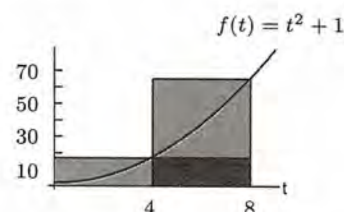
17 1.2

19 4.8

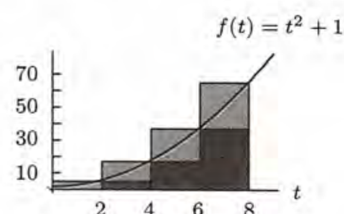
21 1.0

23 $0.825, 0.905, 0.865, n = 20$

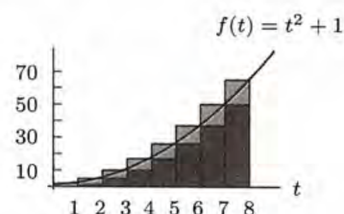
25 (a) 72; 328



(b) 120; 248



(c) 148; 212



Sección 5.3

1 (a) 8.5
(b) 1.7

3 Aproximadamente 192

5 Negativa

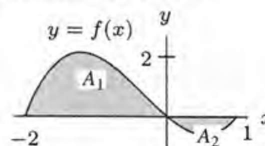
7 Aproximadamente cero

9 (a) Aproximadamente 16.5
(b) Aproximadamente -3.5

11 0.0833

13 Aproximadamente 0.1667

15 (a)



(b) 3.084
(c) 2.250

17 (a) -0.25
(b) 0
(c) 0.5

19 337.5

21 -0.136

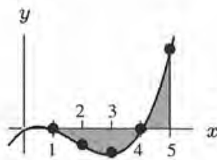
23 IV

25 I

27 (a) Negativa
(b) Positiva
(c) Negativa
(d) Positiva

29 (a) -2
(b) $-A/2$

31 (a)



(b) I_1 es el mayor
I_4 es el menor
I_1 es el único valor positivo

Sección 5.4

1 Millas

3 Dólares

5 Cantidad total $= \int_0^{60} f(t)\, dt$.

7 Aproximadamente 13,500 litros

9 \$2,392.87

11 Seis meses: vendedor *A* más
Primer año: vendedor *B* más
Aproximadamente lo mismo en nueve meses
Vendedor *A*, aproximadamente 170 ventas
Vendedor *B*, aproximadamente 250 ventas

13 (a) La especie *B* para los dos tiempos
(b) La especie *A*

15 741.6 litros

19 El producto *A* tiene un pico mayor
El producto *A* alcanza el pico más rápido
El producto *B* tiene mayor biodisponibilidad global

21 Aproximadamente \$11,600

23 \$300,000

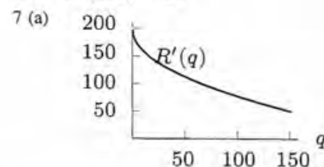
Sección 5.5

1 Dólares; el costo de incrementar la producción de 300 a 900 toneladas

3 (a) \$10,550
(b) \$150
(c) $C'(25) = 10$

5 (a) \$18,650
(b) $C'(400) = 28$

7 (a)



(b) \$12,000
(c) El ingreso marginal es de \$80/unidad
El ingreso total es de \$12,080

9 $F(0) = 0$, $F(0.5) = 1.958$,
$F(1) = 3.667$,
$F(1.5) = 4.875$,
$F(2) = 5.333$,
$F(2.5) = 4.792$

11 Máximo en
$x = 2$ y $F(2) = 5.333$.

Repaso del capítulo 5

1 (a) Aproximadamente 420 kg
(b) 336 y 504 kg

3 -40

5 1.44

7 1.15

9 -0.083

11 1692.5

13 El árbol *B* es más alto después de cinco años.
El árbol *A* es más alto después de 10 años.

15 (a) 7.54 pulgadas después de ocho horas.
(b) 1.41 pulgadas/hora.

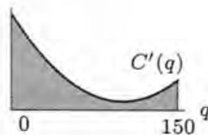
17 V < IV < II < III < I
I, II, III positiva
IV, V negativa

19 \$16,000, \$56,000

21 65 km de casa
3 horas
90 km

23 45.8 °C.

25 (a)



(b) \$22,775
(c) $C'(150) = 18.5$
(d) $C(151) \approx \$22{,}793.50$

27 (a) 346 horas
(b) 449 milirrems

29 (a) $\int_0^T 49(1-(0.8187)^t)\, dt$ (metros)
(b) $T \approx 107$ segundos

31 0.732 galones, 1.032 galones

33 (a) En $t = 17$, 23, 27 segundos
(b) A la derecha $t = 10$ segundos
A la izquierda $t = 40$ segundos
(c) A la derecha $t = 17$ segundos
A la izquierda $t = 44$ segundos
(d) $t = 10$ a 17 segundos,
20 a 23 segundos y
24 a 27 segundos
(e) En $t = 0$ y $t = 35$

Teoría: segundo teorema fundamental

1 x^3

3 xe^x

5 (a) 0
(b) F aumenta
(c) $F(1) \approx 1.4$, $F(2) \approx 4.3$, $F(3) \approx 10.1$

9 9

11 $8c$

Sección 6.1

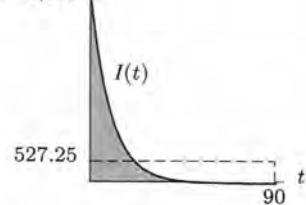
1 1.7

3 2

5 2,202.55

7 8

9 (a) 527.25
(b)



11 \$6,080

13 (a) $Q(10) \approx 2.7$,
$Q(20) \approx 1.8$
(b) 2.21
(c) 2.18

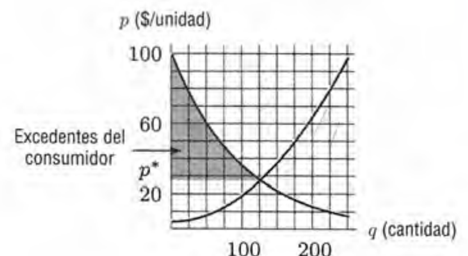
15 Aproximadamente 45

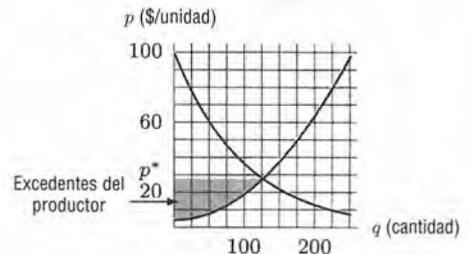
17 (a) III
(b) I
(c) II y IV

19 $(a) < (c) < (b) < (d)$

Sección 6.2

1 (a) El precio de equilibrio es de \$30
La cantidad de equilibrio es de 125 unidades
(b) \$3,500
\$2,000





(c) \$5,500

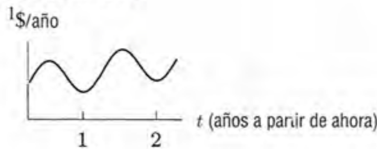
3 (a) $p^* = \$6$, $q^* = 400$
(b) Excedentes del consumidor $\approx$ \$1,100.
Excedentes del productor $\approx$ \$800
(c) Excedentes del consumidor $\approx$ \$1,200.
Excedentes del productor $\approx$ \$200

5 (a) Demanda: tabla 6.1
Oferta: tabla 6.2
(b) $p^* = 25$, $q^* = 400$
(c) Excedentes del consumidor $\approx$ 6,550;
Excedentes del productor $\approx$ 2,850.

7 $85,750,000

Sección 6.3

1



3 $1,147.75

5 (a) $P = \$47,216.32$
$F = \$77,846.55$
(b) $60,000; $17,846.55

7 (a) $5,820 por año
(b) $36,787.94

9 (a) $6,744 millones
(b) $7,343millones

11 $1,766 millones

13 Aproximadamente 1.75 años

15 a 10 años

Sección 6.4

1 Absoluto:
1995–1996: 2.4 m
1999–2000: 3.0 m
Relativo
1995–1996: 29.3%
1999–2000: 16.0%

5 0.01

7 22% de aumento

9 No cambia

11 (a) −0.290
(b) Disminuye 25.1%

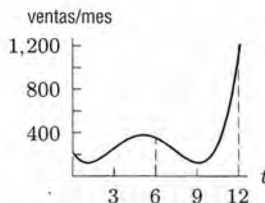
13 Decrece para $5 < t < 10$; crece para $0 \geq t < 5$

15 Decrece para $0 < t < 10$

Repaso del capítulo 6

1 8

3 (a) Segundo semestre



(b) $1,531.20, $1,963.20
(c) $3,494.40
(d) $291.20/ meses

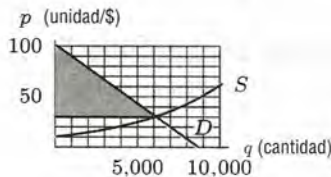
5 (a) 22 °C
(b) 183 °C
(c) Menor

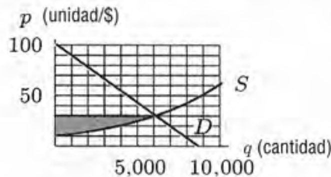
7 (a) 9.9 horas
(b) 14.4 horas
(c) 12.0 horas

9 Aproximadamente 17

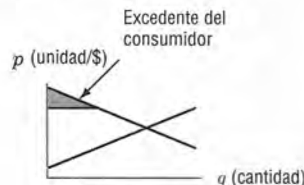
11 (a) $E(t) = 1.4e^{0.07t}$
(b) $0.2(e^7 - 1) \approx 219$
millones de megavatios-hora
(c) 1972
(d) Trazamos la gráfica de $E(t)$ y buscamos que t satisfaga $E(t) = 219$

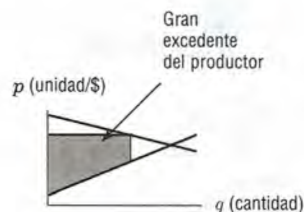
13 (a) $p^* = \$30, q^* = 6{,}000$
(b) Excedente del consumidor = $210,000; Excedente del productor ≈ $70,000

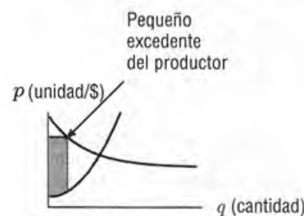




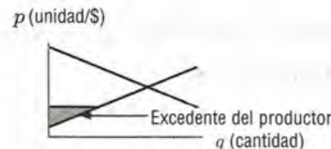
15 (a) No, sí

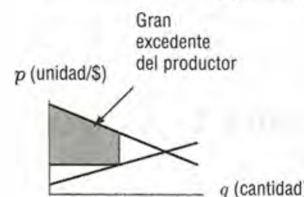


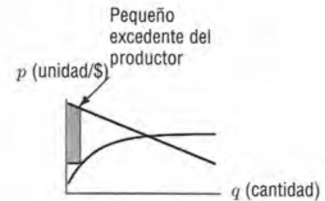




(b) No, sí







17 $P = \$139{,}761.16$
$F = \$464{,}023.39$

19 No; valor presente = $306,279

21 $41,508

23 11%

25 (a) $P = 3.6(1.034)^t$
(b) 0.1224 ml/año
0.1226 ml/año
(c) 3.4%, 3.4%

27 Aumenta aproximadamente 5.13%

29 En 45 años; 2,035

Sección 7.1

1 $5x$

3 $x^3/3$

5 $x^5/5$

7 $5q^3/3$

9 $2z^{3/2}/3$

11 $\ln|z|$

13 $-1/2z^2$

15 $t^3 + (7t^2/2) + t$

17 $\operatorname{sen} t$

19 $F(x) = 3x$
(única posibilidad)

21 $F(x) = x^2/8$
(única posibilidad)

23 $F(x) = 2x + 2x^2 + \frac{5}{3}x^3$
(única posibilidad)

25 $3x^2/2 + C$

27 $4t^2 + 3t + C$

29 $(t^{13}/13) + C$

31 $(x^3/3) + x + C$

33 $5e^z + C$

35 $x^6/6 - 3x^4 + C$

37 $x^3/3 + 2x^2 - 5x + C$

39 $p + \ln|p| + C$

41 $x^2/2 + 2x^{1/2} + C$

43 $-e^{-3t}/3 + C$

45 $-\cos t + C$

47 $25e^{4x} + C$

49 $5 \operatorname{sen} x + 3 \cos x + C$

51 $\operatorname{sen}(4x)/4 + C$

53 $10x - 4\cos(2x) + C$

55 $F(x) = x^3/3 + x + 5$

57 $F(x) = 2e^{3x} + 3$

Sección 7.2

1 $\frac{1}{6}(x^2+1)^6 + C$

3 $\frac{1}{4}(x+10)^4 + C$

5 $2\sqrt{x^2+1} + C$

7 $\frac{1}{18}(y^2+5)^9+C$

9 $\frac{1}{5}y^5+\frac{1}{2}y^4+\frac{1}{3}y^3+C$

11 $\frac{1}{9}(x^2-4)^{9/2}+C$

13 $-2\sqrt{4-x}+C$

15 $\frac{1}{148}(2t-7)^{74}+C$

17 $-\frac{1}{8}(\cos\theta+5)^8+C$

19 $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$

21 $\frac{1}{3}e^{x^3+1}+C$

23 $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4\alpha+C$

25 $\frac{1}{3}e^{3x-4}+C$

27 $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$

29 $\frac{1}{3}(\ln z)^3+C$

31 $\frac{1}{2}\ln(y^2+4)+C$

33 $2e^{\sqrt{y}}+C$

35 $\ln(2+e^x)+C$

37 $\frac{1}{6}\ln(1+3t^2)+C$

39 (a) Sí; $-0.5\cos(x^2)+C$
(b) No
(c) No
(d) Sí; $-1/(2(1+x^2))+C$
(e) No
(f) Sí; $-\ln|2+\cos x|+C$

Sección 7.3

1 10

3 6

5 1/2

7 81/4

9 52

11 8/15

13 ln 2

15 $-8/9\approx-0.889$

17 $5-5e^{-0.2}\approx0.906$

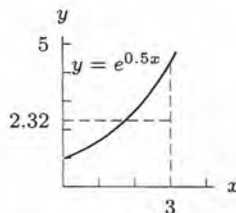
19 $\operatorname{sen}1-\operatorname{sen}(-1)=2\operatorname{sen}1$

21 (a) $(\ln 2)/2$
(b) $(\ln 2)/2$

23 2

25 21

27 2.32

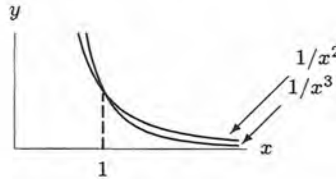


29 $\frac{1}{2}(e^4-1)$

31 $(300)^{1/3}=6.694$

33 (a) 50 mil litros/minuto
15.6 miles de litros/minuto
(b) 1,747 miles de litros

35 $\int_1^\infty(1/x^2)\,dx$



37 (a) 18, 61.2, 198
(b) $2\sqrt{b}-2$
(c) No converge

39 (a) $\int_0^\infty 1{,}000te^{-0.5t}\,dt$
(b)

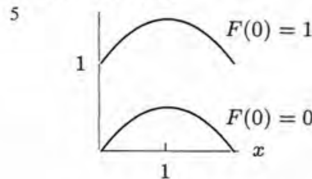


Sección 7.4

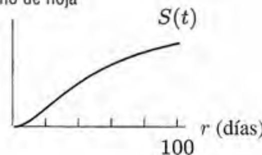
1 $F(0)=0$
$F(1)=1$
$F(2)=1.5$
$F(3)=1$
$F(4)=0$
$F(5)=-1$
$F(6)=-1.5$

3 Máximo en (4.3)

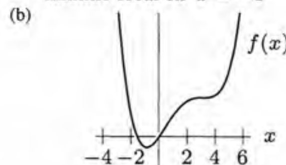
5



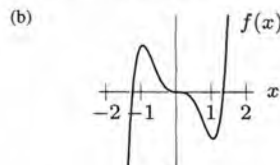
7



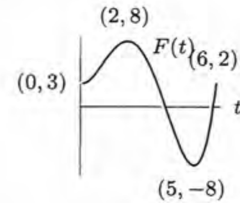
9 (a) Creciente para $-1<x<3$, $x>3$,
decreciente para $x<-1$,
mínimo local en $x=-1$
(b)



11 (a) Creciente para $x<-1$, $x>1$,
decreciente para $-1<x<1$,
máximo local en $x=-1$,
mínimo local en $x=1$
(b)

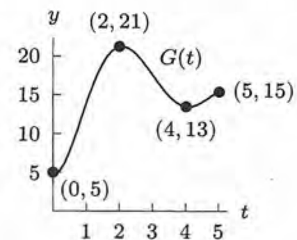


13 $F(2)=8$; $F(5)=-8$; $F(6)=2$

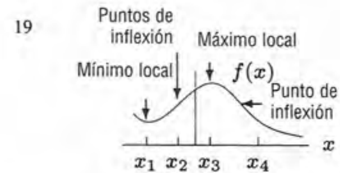


15 (a) (I) volumen (II) razón de flujo
(b) (I) es una antiderivada de (II)

17 Puntos críticos: (0, 5), (2, 21), (4, 13), (5, 15)

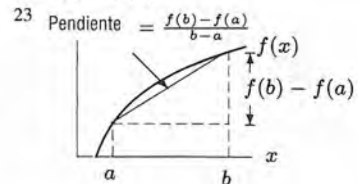


19

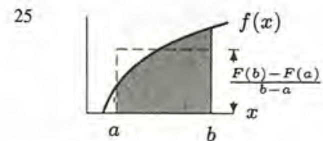


21 $f(3)-f(2)$,
$[f(4)-f(2)]/2$,
$f(4)-f(3)$.

23



25



Repaso del capítulo 7

1 $10x+2x^4$

3 $-e^{-3t}/3$

5 $2x^3-4x^2+3x$

7 $F(x)=(x^2/2)+(x^6/6)-(x^{-4}/4)+C$

9 $P(r)=\pi r^2+C$

11 $F(x)=x^7/7+x^{-5}/35+C$

13 $G(t) = 5t + \operatorname{sen} t + C$

15 $G(x) = (x+1)^4/4 + C$

17 $3x^3 + C$

19 $t^3/3 - 3t^2 + 5t + C$

21 $e^x + 5x + C$

23 $3\ln|t| + \frac{2}{t} + C$

25 $2x^4 + \ln|x| + C$

27 $2\ln|x| - \pi\cos x + C$

29 22

31 $20(e^{0.15} - 1)$

33 $1/2$

35 $F(x) = x^2$
(única posibilidad)

37 $F(x) = -\cos x + 1$
(única posibilidad)

39 $e^{q^2+1} + C$

41 $-1/(3(3x+1)) + C$

43 $\frac{1}{55}(5x-7)^{11} + C$

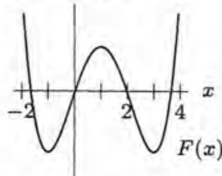
45 $\frac{1}{9}(3x^2+4)^{3/2} + C$

47 $4\operatorname{sen}(x^3) + C$

49 (a) 5.3 miles de millones, 6.1 miles de millones
(b) 5.7 miles de millones

51 $1, 0, -1/2, 0, 1$

53 (a) $x = -1, x = 1, x = 3$
(b) Mínimo local en $x = -1, x = 3$; máximo local en $x = 1$
(c)



55 (a) Primer caso ≈ 23,211
Segundo caso ≈ 3.5 miles de millones
(b) En ambos casos es 6.7 años.
(c) Aproximadamente 3.5 años.

57 (a) $0.4988, 0.49998,$
$0.4999996,$
0.499999998
(b) $(1 - e^{-2b})/2$
(c) Converge a 0.5

59 (a) No
(b) $\int_0^\infty (60/50^t)\, dt$
(c) Sí; 15.34 millas

Práctica: Integración

1 $t^4/4 + 2t^3 + C$

3 $x^3/3 - 1/x + C$

5 $2w^{3/2} + C$

7 $t^3/3 + 5t^2/2 + t + C$

9 $w^5/5 - 3w^4 + 2w^3 - 10w + C$

11 $2q^{1/2} + C$

13 $4\ln|x| - 5/x + C$

15 $q^4/4 + 4q^2 + 15q + C$

17 $-5\cos x + 3\operatorname{sen} x + C$

19 $\pi h r^3/3 + C$

21 $5p^3q^4 + C$

23 $x^3 + 3e^{2x} + C$

25 $2.5e^{2q} + C$

27 $Ax^4/4 + Bx^2/2 + C$

29 $x^3/3 + 8x + e^x + C$

31 $x^4/4 + 5x^3/3 + 6x + C$

33 $Aq^2/2 + Bq + C$

35 $\frac{1}{2}e^{2t} + 5t + C$

37 $3\operatorname{sen}(4x) + C$

39 $\frac{1}{14}(x^2+9)^7 + C$

41 $\ln|y+2| + C$

43 $\ln(e^t + 1) + C$

45 $2\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} + C$

Sección 8.1

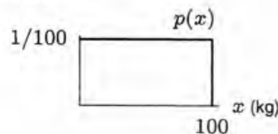
1 0.04

3 0.008

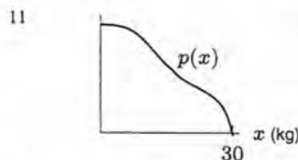
5 (a) 0.25
(b) 0.7
(c) 0.15

7 (a) 0.4375
(b) 0.49
(c) 0.2475

9



11



13 10–12: 27%
< 8: 12%
> 12 :45%
12–13 días

15 (b) Aproximadamente 3/4

17 (a) 0.19
(b) Décimo; igual para ambos
(c) 0.02, 0.38, 0.21

Sección 8.2

3 (a) (i) (III), (ii) (VI)
(b) (i) (I), (ii) (V)
(c) (i) (IV), (ii) (II)

5 % de la población por dólar de ingreso



% de la población que tenga por lo menos este ingreso



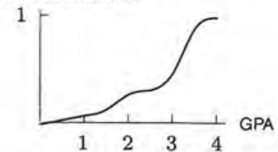
7 (b) $F(7) > F(6)$

9 (a) El primero: 30 de enero
El último: 28 de agosto
(b) 65%
(c) 25%

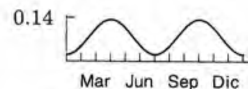
(d) 10%
(e) 10 abril – 30 de abril

11 (a) 0.9 m–1.1 m

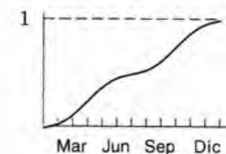
13 (a) 2/3
(b) 1/3
(c) Posiblemente muchos trabajaron tan sólo para pasar.
(d) fracción de estudiantes



15 Función de densidad



Función de distribución acumulativa



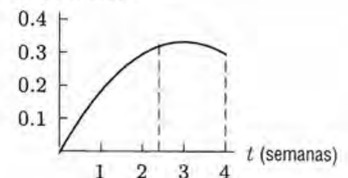
17 (a) 25%
(b) 32.5%
(c) 0

Sección 8.3

1 5.35 toneladas

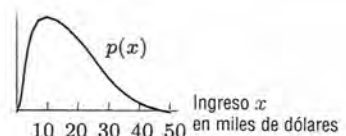
3 (a) 36
(b) Positiva: $5 < t < 65$
Creciente: $5 < t < 35$
Decreciente: $35 < t < 65$
Máximo: $t = 35$

5 2.4 semanas



7 Mediana: 5.68 segundos,
media: 7.83 segundos

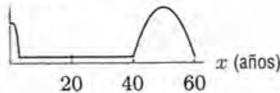
9 (a) $6/25 = 24\%$
(b) \$12,600
(c) ≈ \$8,000



11 (a) 0.2685
(b) 0.067

Repaso del capítulo 8

1 fracción de muertes por año

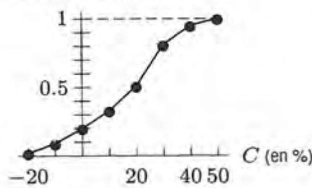


3 1/15

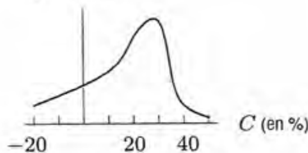
5 1/5

7 30%

9 (a) Distribución acumulativa

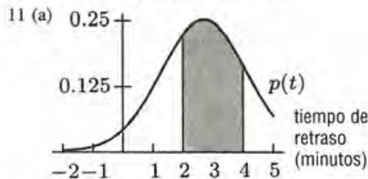


(b) Densidad de probabilidad

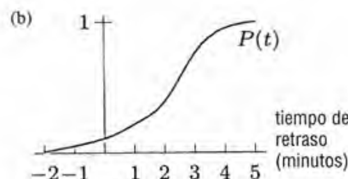


(c) Más de 50%: 1%
Entre 20% y 50%: 49%
El más probable: $C \approx 28\%$

11 (a)



(b)



13 (a) $c = 0.0176$
(b) 9%

15 Falso

17 Verdadero

19 Verdadero

Sección 9.1

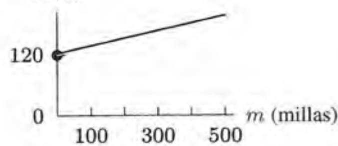
1 $f(20, p)$: 2.65, 2.59, 2.51, 2.43
$f(100, p)$: 5.79, 5.77, 5.60, 5.53
$f(I, 3.00)$: 2.65, 4.14, 5.11, 5.35, 5.79
$f(I, 4.00)$ 2.51, 3.94, 4.97, 5.19, 5.60

5 $P = 0.052pf(I, p)/I$

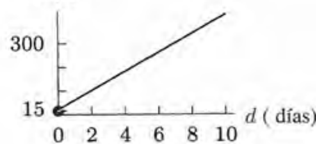
7 (a) Decreciente
(b) Decreciente

9 Función decreciente de x
Función creciente de y

11 (a) $150
(b)

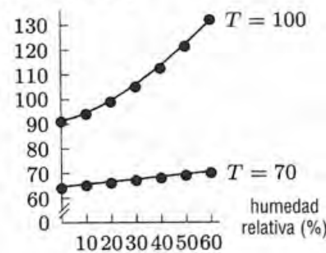


(c)



13 (a) −31°F
(b) 10 mph
(c) Aproximadamente 5.5 mph
(d) Aproximadamente 23.5 °F

17 índice de calor (grados Fahrenheit)



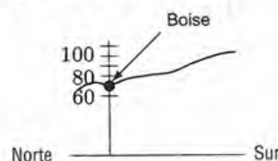
19 c: decreciente
t: creciente

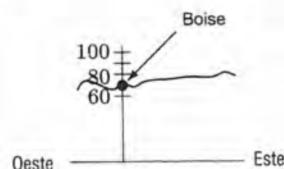
21 $D = 100(c/t)$

Sección 9.2

1 (a) 80-90 °F
(b) 60-72 °F
(c) 60-100 °F

3

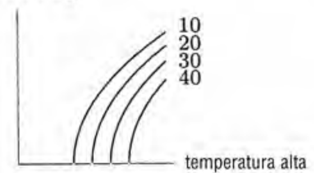




5 Función decreciente de x
Función creciente de y

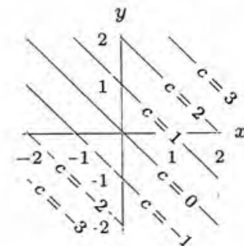
7 eje x: precio
eje y: publicidad

9 temperatura baja

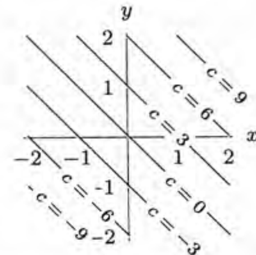


13 (a) Aproximadamente $137
(b) Aproximadamente $250

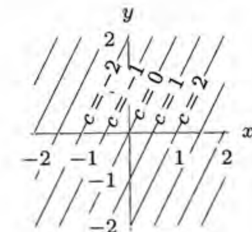
15 Contornos uniformemente espaciados.



17 Contornos uniformemente espaciados.



19 Contornos uniformemente espaciados.



23 (a) Falso
(b) Verdadero
(c) Falso
(d) Verdadero

25 (a) A
(b) B
(c) A

27 (a) (IV)
(b) (I)
(c) (III)

29 72 °F; 76 °F

31 (a) 12 L/min; 7.5 L/min; 4.2 horas
(b) Creciente
(c) Decreciente
(d) Decrece lentamente al principio; después de t = 4 lo hace rápidamente.

Sección 9.3

1 (a) f_c es negativa
f_t es positiva

3 (c) Positiva
(d) Negativa

5 (a) Negativa

9 (a) $f_x < 0$; $f_y > 0$
(b) -0.6; 3.5
(c) 97; 92

11 $f_x(5, 2)$

13 (a) -0.24
(b) 0.0205
(c) 6.215 lbs

15 (a) Negativa
(b) Negativa
(c) Negativa

17 2777

19 $f_w(10, 25) \approx -1.6$

21 $f_w(5, 20) \approx -2.6$

23 $\frac{\partial I}{\partial H}|_{(50,80)} \approx 0.1$
$\frac{\partial I}{\partial T}|_{(50,80)} \approx 1.4$

25 (a) $150{,}350$
(b) $151{,}000$
(c) $152{,}250$

27 (a) Ambas negativas
(b) Ambas negativas

29 $z_x(1, 0) \approx 2$
$z_x(0, 1) \approx 0$
$z_y(0, 1) \approx 10$

31

		w (g/m^3)		
		0.1	0.2	0.3
T (°C)	10	1300	900	1200
	20	800	800	900
	30	800	700	800

Sección 9.4

1 13; 3; 12

3 $f_x = 2x + 2y$
$f_y = 2x + 3y^2$

5 $4x$; $6y$

7 $100te^{rt}$

9 $200xy$; $100x^2$

11 $2xy + 10x^4y$

13 $(a + b)/2$

15 $f_x = 10xy^3 + 8y^2 - 6x$,
$f_y = 15x^2y^2 + 16xy$

17 $f_x(1, 2) = 15$,
$f_y(1, 2) = -5$

19 Pre^{rt}; Pte^{rt}; e^{rt}

21 \$102,116
$\$201.20$ por unidad
$\$101.50$ por unidad

23 $h_x(2, 5) = -0.38$ pies/asiento
$h_t(2, 5) = 0.76$ pies/segundos

25 (a) $Q_K = 18.75K^{-0.25}L^{0.25}$,
$Q_L = 6.25K^{0.75}L^{-0.75}$
(b) $Q = 1704.33$
$Q_K = 21.3$
$Q_L = 4.26$

27 (a) $Q = 102{,}197$
(b) $Q = 229{,}425$; $Q \to 2^{7/6} \cdot Q$

29 $f_{xx} = 2y$, $f_{xy} = 2x$,
$f_{yy} = 0$, $f_{yx} = 2x$

31 $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = e^y$,
$f_{yy} = xe^y$, $f_{yx} = e^y$

33 $f_{xx} = 2y^2$, $f_{xy} = 4xy$,
$f_{yy} = 2x^2$, $f_{yx} = 4xy$

35 $Q_{p_1p_1} = 10p_2^{-1}$,
$Q_{p_2p_2} = 10p_1^2p_2^{-3}$,
$Q_{p_1p_2} = Q_{p_2p_1} = -10p_1p_2^{-2}$

37 $P_{KK} = 0$, $P_{LL} = 4K$,
$P_{KL} = P_{LK} = 4L$

39 $f_{xx} = -8t$, $f_{tt} = 6t$,
$f_{xt} = f_{tx} = -8x$

41 $f(x, y) = x^4y^2 - 3xy^4 + C$

Sección 9.5

1 Mississippi:
87-88 (máximo), 83-87 (mínimo)
Alabama:
88-89 (máximo), 83-87 (mínimo)
Pennsylvania
89-90 (máximo), 80(mínimo)
Nueva York
81-84 (máximo), 74-76 (mínimo)
California
100-101 (máximo), 65-68 (mínimo)
Arizona
102-107 (máximo), 85-87 (mínimo)
Massachussets:
81-84 (máximo), 70 (mínimo)

3 $(-2, 0)$, mínimo

5 $(4, 2)$, ninguno

7 Punto silla o de ensilladura en $(0, -5)$
Mínimo local en $(2, -5)$

9 Máximo local en $(0, -1)$
Punto silla o de ensilladura en $(0, 1)$ y en $(2, -1)$
Mínimo local en $(2, 1)$

11 Máximo local: $(1, 5)$

13 $f(0, 0) \approx 12.5$ es un máximo local y global
$f(13, 30) \approx 4.5$ es un mínimo local
$f(37, 18) \approx 2.5$ es un mínimo local y global
$f(32, 34) \approx 10.5$ es un máximo local

15 Máximo: 1 en $(\pi/2, 0)$; $(\pi/2, 2\pi)$
Mínimo: -1 en $(\pi/2, \pi)$

17 $A = 10, B = 4, C = -2$

19 $q_1 = 300, q_2 = 225$.

21 $h = 25\%, t = 25$ °C

Sección 9.6

1 $f(10, 25) = 250$

3 $f(66.7, 33.3) = 13{,}333$

5 Mínimo $= -\sqrt{2}$, máximo $= \sqrt{2}$

7 Mínimo $= 11.25$; no es máximo

9 Mínimo $= -2$, máximo $= 2$

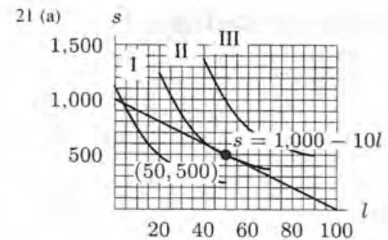
11 $x = 6$; $y = 6$; $f(6, 6) = 400$

13 (a) Reduce K en 1/2 unidad
aumenta L en 1 unidad

15 (b) $L = \$400$; $K = \$600$
(c) $12{,}244$ unidades
(d) 12.24 unidades/\$

17 (a) 1215
(b) 1185

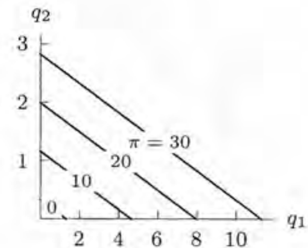
19 (a) $P(x, y)$; $C(x, y) = 50{,}000$
(b) $C(x, y)$; $P(x, y) = 2{,}000$

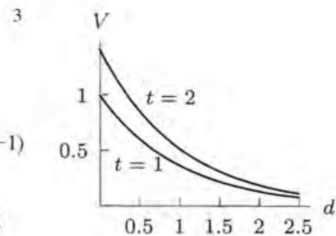
21 (a)


(b) $s = 1{,}000 - 10l$

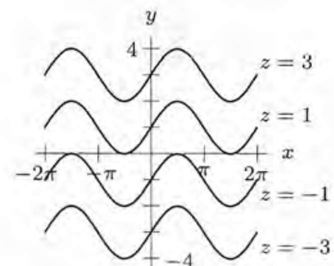
Repaso del capítulo 9

1 (a) $\pi = 3q_1 + 12q_2 - 4$
(miles de dólares)

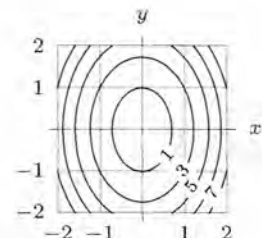


3


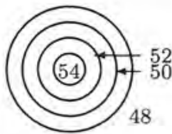
5 Contornos uniformemente espaciados



7 Elipses



9



11 $P_a = 2a - 2b^2, P_b = -4ab$

13 $\frac{\partial f}{\partial x} = 5e^{-2t}, \frac{\partial f}{\partial t} = -10xe^{-2t}$

15 $f_x = x/\sqrt{x^2+y^2}$
$f_y = y/\sqrt{x^2+y^2}$

21 (a) $-3/8$ °C/m, $2/5$ °C/min
(b) -1 °C/m, $3/28$ °C/min

25 (b) $\partial q/\partial p_1 = -8 \cdot 10^6$
$\partial q/\partial p_2 = 4 \cdot 10^6$
$\partial q/\partial p_3 = 2$

27 $\partial q/\partial I > 0$
$\partial q/\partial p_1 < 0$
$\partial q/\partial p_2 > 0$

29 $(1,0), (-1,0)$; $f(1,0)$ es un mínimo local

33 (b) $L = 40, K = 30$

Teoría: mínimos cuadrados

1 $y = 2/3 - (1/2)x$

3 $y = 2/3 - (1/2)x$

5 $y = x - 1/3$

7 (a) (i) Función potencial
(ii) Función lineal
(b) $\ln N = 1.20 + 0.32 \ln A$
De acuerdo con la regla biológica

Sección 10.1

1 (a) (III)
(b) (V)
(c) (I)
(d) (II)
(e) (IV)

3 $dP/dt = kP, k > 0$

5 (a) $dA/dt = -0.17A$
(b) -17 mg

7 $dB/dt = 0.04B - 2{,}000$

9 $dA/dt = 10 - 0.03A$

11 $dP/dt = -0.08P - 30$

13 y negativa; y positiva

15 B

17 F

Sección 10.2

3 (a) Sí
(b) No

5 12, 18, 27, 40.5

7 $y = 100, 80, 64, 51.2$

9 (a) (III)
(b) (IV)
(c) (I)
(d) (II)

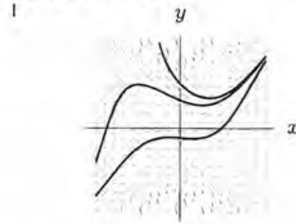
13 $k = 5$

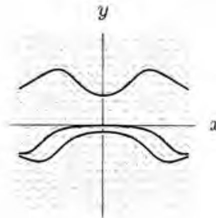
15 $y = t^2 + C$

17 (a) (II), (V)
(b) (I)
(c) No hay soluciones
(d) (IV)
(e) (III)

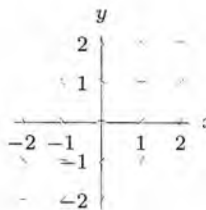
Sección 10.3

1

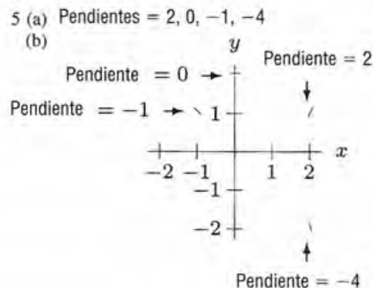




3 (a)



5 (a) Pendientes = 2, 0, −1, −4
(b)



7 $dP/dt = 3P(1-P)$

9 A medida que x aumenta, $y \to \infty$.

11 Cuando $x \to \infty$, y oscila dentro de cierto rango

13 $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$

15 (a) II
(b) VI
(c) IV
(d) I
(e) III
(f) V

Sección 10.4

1 $P = 20e^{0.02t}$

3 $w = 30e^{3r}$

5 $Q = 50e^{(1/5)t}$

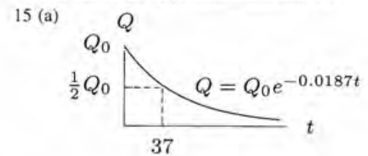
7 (a) $dB/dt = 0.07B$
(b) $B = B_0e^{0.07t}$
(c) $B = 5000e^{0.07t}$
(d) $B(10) \approx \$10{,}068.75$

9 (a) $dS/dt = kS$
(b) $S = Ce^{kt}$
(c) $C = 5$
(d) $S = 5e^{0.1576t}$

11 $dQ/dt = -0.09Q, Q = Ce^{-0.09t}$,
Q es la cantidad de yodo, t es el tiempo en días

13 El más largo: Great Lake (Lago Superior).
El más corto: Lago Erie
La razón es aproximadamente 75

15 (a)



(b) $dQ/dt = -0.0187Q$
(c) 3 días

17 (a) 69,300 barriles/año
(b) 25.9 años

19 (a) $k \approx 0.000121$
(b) 779.4 años

Sección 10.5

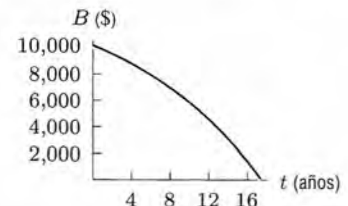
1 $H = 75 - 75e^{3t}$

3 $P = 104e^t - 4$

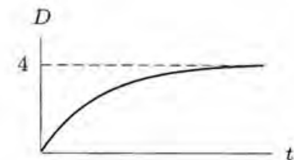
5 $Q = 400 - 350e^{0.3t}$

7 $B = 25 + 75e^{2-2t}$

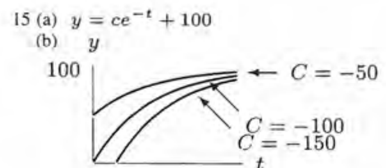
11 (a) $dB/dt = 0.07B - 1{,}000$
(b) $B \approx \$14{,}285.71$
(c) $B = 14{,}285.71 - (4285.71)e^{0.07t}$
(d) $B(5) \approx \$8{,}204$
(e) El saldo es \$0 a largo plazo



13 $dD/dt = -0.75(D-4)$
Equilibrio = 4g/cm²



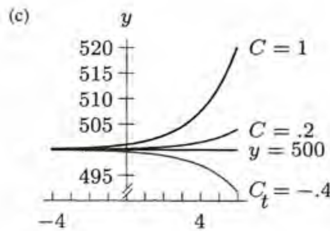
15 (a) $y = ce^{-t} + 100$
(b)



(c) $y = 100 - 100e^{-t}$

17 (a) $y = 500$
(b) $y = 500 + Ce^{0.5t}$

(c)



(d) Inestable

19 (a) $H = 200 - 180e^{-kt}$
(b) $k \approx 0.027$ (si t está dado en minutos)

21 (a) $dB/dt = 0.10B + 1{,}000$
(b) $B = 10{,}000e^{0.1t} - 10{,}000$

23 (a) $dT/dt = -k(T - 68)$
(b) $T = 68 + 22.3e^{-0.06t}$; 3:45 am.

25 (a) $dy/dt = -k(y - a)$
(b) $y = (1 - a)e^{-kt} + a$
(c) a: fracción que se recuerda a largo plazo
k: razón de material que se olvida

Sección 10.6

1 x y y aumentan, aproximadamente, a la misma razón

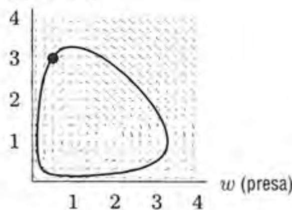
3 x decrece rápidamente mientras que y aumenta más lentamente

7 Simétrica respecto a la recta $r = w$: curvas solución cerradas

9 Petirrojos:
Máximo $\approx 2{,}500$
Mínimo ≈ 500
Cuando los petirrojos aumentan al máximo, la población de gusanos es de aproximadamente un millón

13 (a) $dw/dt = 0$
$dr/dt = 1.2$
(b) $w \approx 2.2, r \approx 1.1$
(c) En $t = 0.2$:
$w \approx 2.2, r \approx 1.3$
En $t = 0.3$
$w \approx 2.1, r \approx 1.4$

15 (a)



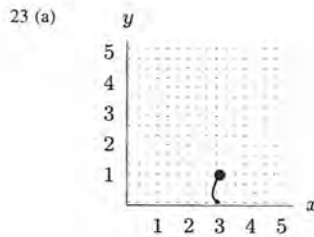
(b) Abajo y a la izquierda
(c) $r = 3.3, w = 1$
(d) $w = 3.3, r = 1$

17 $dx/dt = -x + xy,$
$dy/dt = y$

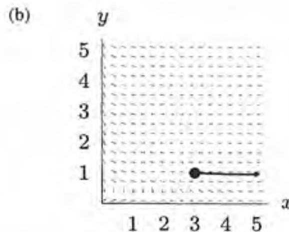
19 (a) $x \to \infty$ exponencialmente
$y \to 0$ exponencialmente
(b) Depredador-presa

21 (a) $x \to \infty$ exponencialmente
$y \to 0$ exponencialmente
(b) y es ayudada con la presencia de x

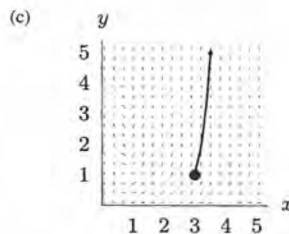
23 (a)



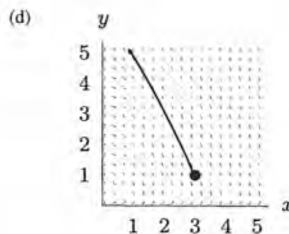
(b)



(c)



(d)



Sección 10.7

5 (a) $I_0 = 1, S_0 = 349$
(b) Aumenta: se propaga

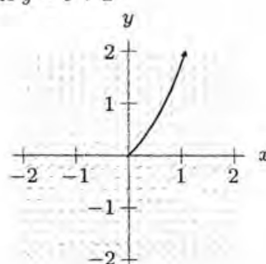
7 Aumenta: se propaga
$t \approx 6$ días

9 5

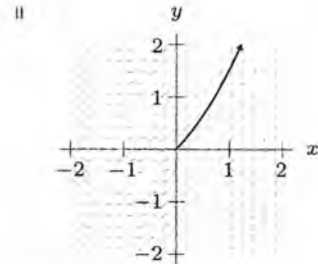
Repaso del capítulo 10

1 (a) $y = Cx^3$
(b) $C = 5$

3 (a) I es $y' = 1 + y$
II es $y' = 1 + x$
(b) I



II



(c) I: $y' = -1$, inestable
II: ninguna

5 $y = Ce^{5t}$

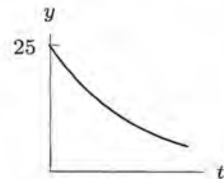
7 $P = Ce^{0.03t}$

9 $Q = Ce^{2t}, C \neq 0$

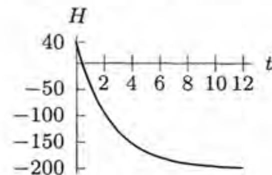
11 $y = 100 + Ce^{-t}$

13 $H = Ce^{0.5t} - 20$

15 $y = 25e^{-0.2t}$



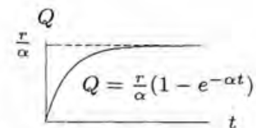
17 $H = 240e^{-0.5t} - 200$



19 (a) $y = 0, = 4$ y $y = -2$
(b) $y = 0$ es estable
$y = -2$ y $y = 4$ son inestables

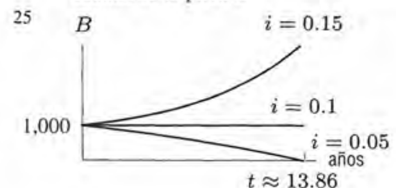
21 (a) $dV/dt = 0.02V - 80{,}000$
(b) $V = \$4{,}000{,}000$
(c) $V = 4{,}000{,}000 + Ce^{0.02t}$
(d) $\$2{,}728{,}751$

23 (a) $Q = (r/\alpha)(1 - e^{-\alpha t})$
$Q_\infty = r/\alpha$



(b) Al duplicar r se duplica Q_∞
Al modificar r no se modifica el tiempo que le toma alcanzar (1/2) Q_∞
(c) Tanto Q_∞ como el tiempo en el que alcanza a (1/2) Q_0 se reducen a la mitad cuando se duplica α

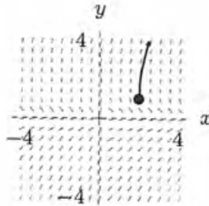
25



27 (a) $dW/dt = (1/3{,}500)(I - 20W)$

(b) $W = I/20 + (W_0 - I/20)\,e^{-(2/350)t}$

29 (a) Una ayuda a la otra
(b) x decrece, y crece
(c) $dy/dx = (-y + 5xy)/(-3x + 2xy)$
(d), (e)



Sección 11.1

1 171.95

3 2046

5 200

7 1.9961

9 400

11 31.25

13 $3(2^{11} - 1)/2^{10}$

15 (a) \$3,037.75, \$2,537.75
(b) \$6,167.78, \$5,667.78

17 555.556 mg, 455.556 mg

19 1,860.40, 6,489.67, 18,008.78, 46,672.00, si

Sección 11.2

1 Saldo = \$48,377.01,
\$20,000. de los depósitos
\$28,377.01 de los intereses

3 \$33,035.37

5 (a) \$373,008.50
(b) \$744,444.44

7 17.54 pagos

9 (a) $N(k/(1 - k))$
(b) $5.667N$

11 (a) \$1.27
(b) \$163.83
(c) \$20,971.51
(d) \$2,684,354.55

13 0.45%

Sección 11.3

1 (a) 98 mg
(b) 121.5 mg
(c) 125 mg

3 227.42 mg

5 (a) 0.7937
(b) 194.27 mg
(c) 242.37 mg

7 (a) $2D$
(b) 150 mg

9 1604.0 microgramos
1596.0 microgramos

11 (a) 4.10 mg
(b) 7.54 mg
(c) 14.46 mg
(d) 35.24 mg
(e) 69.87 mg

13 24.5 años

15 70 años

17 (a) 41.1 años
(b) 26.1 años

19 (a) 62.4 años
(b) 28.3 años

Repaso del capítulo 11

1 555.10

3 96.154

5 39,375

7 1.375 mg

9 (a) $\approx 7\%$
(b) $Q_n = 50(1 - (0.07)^{n+1})/(1 - 0.07)$
(c) $P_n = 0.07(50)(1-(0.07)^n)/(1-0.07)$

11 (a) $h_n = 10(3/4)^n$
(b) $D_1 = 10$ pies
$D_2 = h_0 + 2h_1 = 25$ pies
$D_3 = h_0 + 2h_1 + 2h_2 = 36.25$ pies
$D_4 = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + 2h_3$
≈ 44.69 pies
(c) $D_n = 10 + 60\left(1 - (3/4)^{n-1}\right)$

13 (a) (i) \$16.43 millones
(ii) \$24.01 millones
(b) \$16.87 millones

15 £250

17 \$1,081.11

ÍNDICE

D

E

F

Z

RESUMEN DE FÓRMULAS DE ÁLGEBRA

Líneas

Pendiente de una línea recta (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta con pendiente m y ordenada en el origen b:

$$y = b + mx$$

Definición de exponentes cero, negativo y fracción

$$a^0 = 1, \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{y en general} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{1/2} = \sqrt{a}, \quad a^{1/3} = \sqrt[3]{a} \quad \text{y en general} \quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

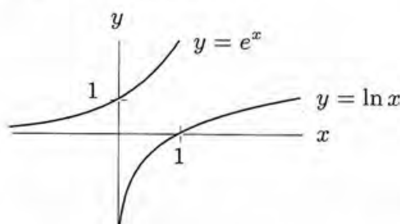
$$\text{También}, \ a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Reglas de los exponentes

1. $a^x \cdot a^t = a^{x+t}$ Por ejemplo $2^4 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7$.
2. $\dfrac{a^x}{a^t} = a^{x-t}$ Por ejemplo $\dfrac{2^4}{2^3} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^1$.
3. $(a^x)^t = a^{xt}$ Por ejemplo $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6$.

Definición del logaritmo natural

$y = \ln x$ significa $e^y = x$; por ejemplo: $\ln 1 = 0$, ya que $e^0 = 1$.



Reglas de los logaritmos naturales

$$\ln(AB) = \ln A + \ln B$$

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$$

$$\ln A^p = p \ln A$$

Identidades

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

RESUMEN DE FÓRMULAS: CÁLCULO

Fórmulas de derivación

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

2. $(kf(x))' = kf'(x)$

3. $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

5. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

6. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

7. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

8. $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \quad (a > 0)$

9. $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

10. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

11. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

Fórmulas de integración

1. $\displaystyle\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$

3. $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C$

4. $\displaystyle\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$

5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$

6. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$

Esta obra se terminó de imprimir en noviembre del 2004
en los talleres de Programas Educativos, S. A. de C. V.
Calz. Chabacano No. 65, Col. Asturias
C.P. 06850, México, D.F.

Empresa Certificada por el Instituto Mexicano de Normalización y
Certificación A. C. bajo la Norma ISO-9002: 1994/NMX-CC-004:1995
con el Núm. de Registro RCS-048 y bajo la Norma ISO-14001:
1996/SAA-1998 con el Núm. de Registro RSAA-003

El cálculo, uno de los mayores logros del intelecto humano, es presentado a lo largo de este libro como una excelente herramienta para reducir problemas complicados a simples reglas y procedimientos.

En esta segunda edición de *Cálculo aplicado* se mantiene el esfuerzo por crear un nuevo enfoque en la enseñanza del cálculo, tanto en sus conceptos como en sus procedimientos. No obstante, presenta una nueva organización en la estructura del texto y algunas modificaciones en el contenido de ciertos capítulos.

Es un libro práctico y funcional en el que los estudiantes aprenden el cálculo ejercitando una gran cantidad de problemas; algunos de carácter variado (muy sencillos o aquellos que representan un verdadero reto) y otros que están circunscritos en la famosa "regla de cuatro", donde se muestran en forma geométrica, numérica, analítica y verbal.

Se ha aprovechado el uso de computadoras y calculadoras graficadoras para ayudar a los estudiantes en el aprendizaje del pensamiento matemático.

En *Cálculo aplicado*, segunda edición, usted encontrará material sobre las funciones, la razón de cambio, los métodos breves de derivación, el uso de la derivada, la integral definida, las antiderivadas, la probabilidad, las funciones de varias variables, el modelado matemático mediante ecuaciones diferenciales y las series geométricas, entre otros tantos temas.





COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL